

Sammlung

geometrischer Aufgaben

von

Meier Hirsch,

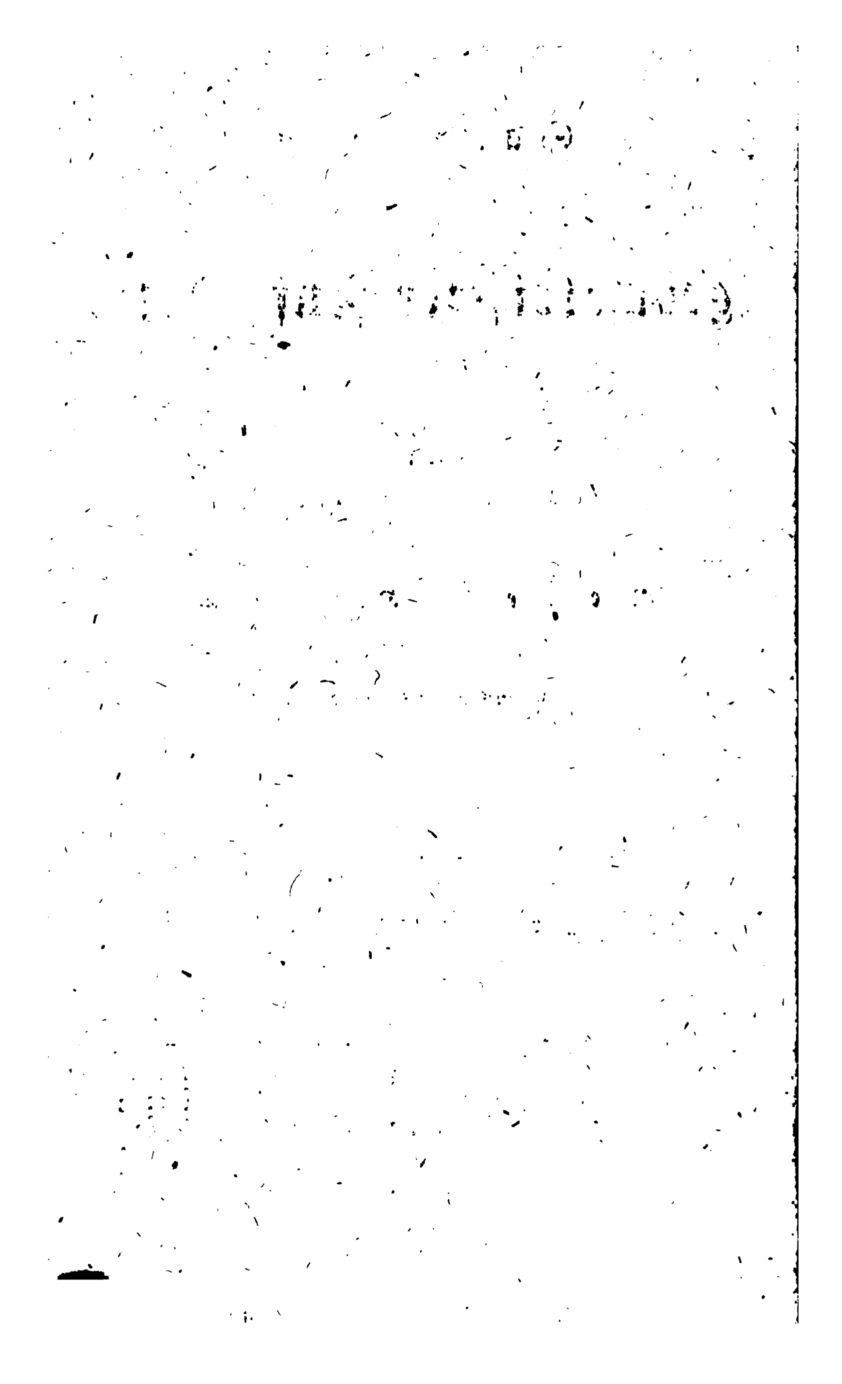
Privatlehrer der Mathematik.

Zweyter Theil.

Mit 10 Kupfertafeln.

Berlin,

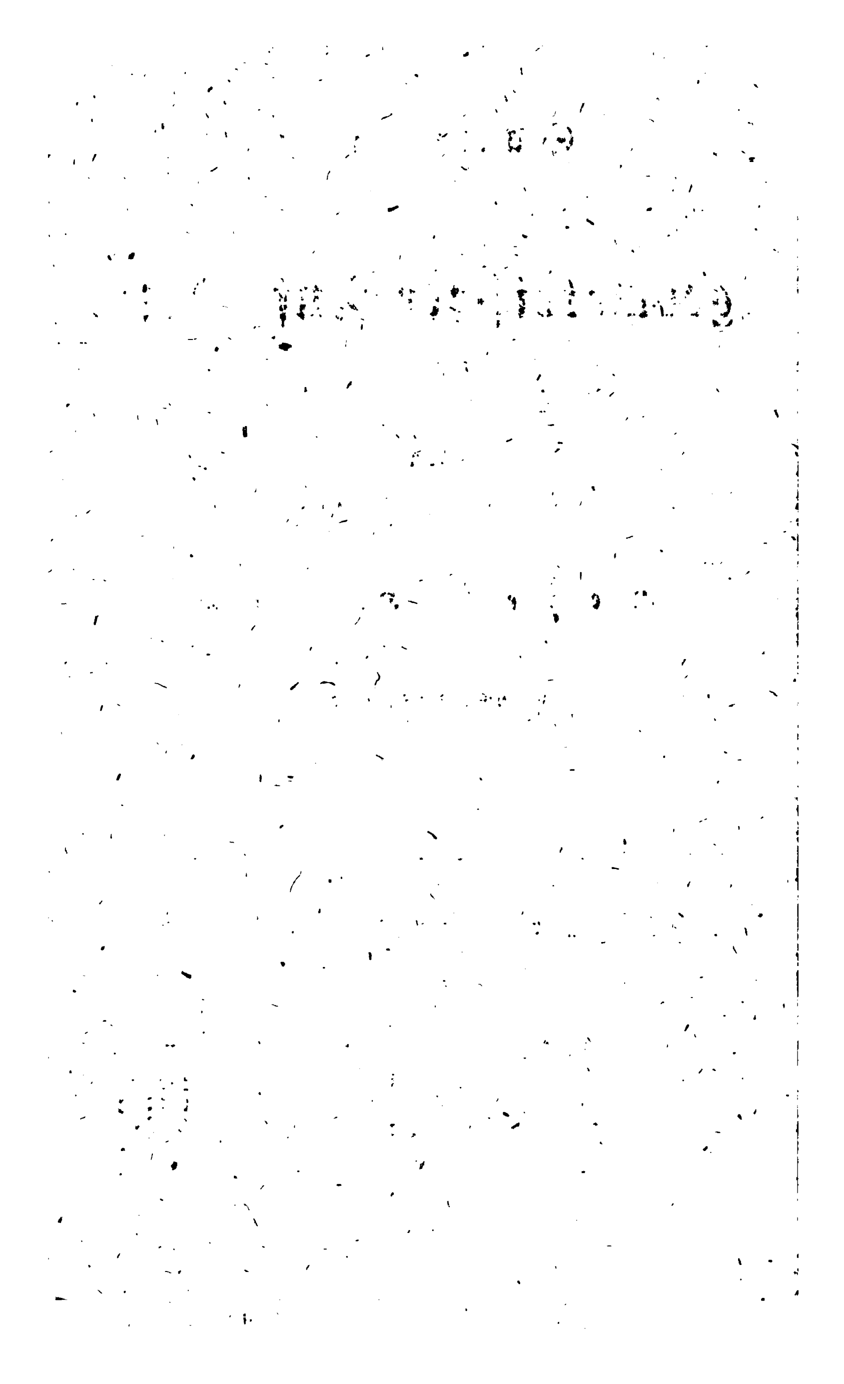
bey Heinrich Frölich. 1807.



Vorrede.

Ueber den Zweck und Plan dieser geometrischen Sammlung im Allgemeinen habe ich mich schon in der Vorrede zum ersten Theile hinlänglich erklärt. Hier also nur etwas Weniges über das, was diesen zweyten Theil insbesondere betrifft.

Die sphärische Trigonometrie, die Stereometrie,



Vorrede.

Ueber den Zweck und Plan dieser geometrischen Sammlung im Allgemeinen habe ich mich schon in der Vorrede zum ersten Theile hinlänglich erklärt. Hier also nur etwas Weniges über das, was diesen zweyten Theil insbesondere betrifft.

Die sphärische Trigonometrie, die Stereometrie,

und einige andere, damit in Verbindung stehende Gegenstände, haben größtentheils den Stoff dazu hergegeben; jedoch nur in so weit, als die bloße Elementar-Geometrie zum Verstehen hinreicht, und weder die Kenntniß der höheren Geometrie noch der Differentialrechnung dabey vorausgesetzt werden darf. Der folgende Theil, der vielleicht, wenn gewisse Umstände es nöthig machen sollten, auch noch unter einem besonderen Titel erscheinen dürfte, wird es mit der höhern Geometrie und der Goniometrie zu thun haben.

Unter den Aufgaben, welche hier vorkommen, dürfte man sehr viele neue finden; aber auch viele andere, denen zwar das Prädikat der absoluten Neuheit nicht beigelegt werden kann, die sich aber doch wenigstens durch eine einfachere, oder allgemeinere Behandlungsart, als die gewöhnliche, auszeichnen.

Zu der Berechnung der Körper, welche von an-
deren Arten regulärer Figuren eingeschlossen werden,
wurde ich durch eine vortreffliche analytische Abhan
lung von Euler über die regulären Körper vera
laßt. *) Ich wandte seine Methode, mit glücklich
Erfolge, auch auf jene Körper an, deren Unters
chung aber, wie sich leicht erachten läßt, mit w
größeren Schwierigkeiten verknüpft ist. Die Aufga
§ 155 verdient, wegen der Allgemeinheit der Aufl
sung und der sehr einfachen kombinatorischen Form
welche daselbst gefunden worden, einige Aufmerksa
keit. Die Berechnung des Inhaltes der von schief
Vierecken eingeschlossenen Körper, kann in vielen F
len, besonders in der Stereotomie von Nutzen sey

---

*) De corporib. regularib. per doctrinam sphaerica
determinatis, Act. Petrop. 1778. P. I. p. 3.

und dies um so mehr, da die Formel, welche §. 189 gefunden worden, diese Berechnung sehr leicht macht.

Berlin, den 1. Oktober 1806.

Inhalt.

Seite.

I. Construktionen im Raume vermittelst der Projektionen. 1

II. Analytische Ableitung der sphärisch-trigonometrischen Formeln. 21

III. Anwendung der vorhergehenden Formeln auf die sphärische Trigonometrie. 36

IV. Flächeninhalt der sphärischen Dreyecke und Vielecke . 69

V. Einige Anwendungen der sphärischen Trigonometrie auf Feldmesser-Aufgaben. 77

VI. Fundamentalsätze aus der Lehre von den eckigen Körpern, zum Behufe des Folgenden. 89

VII. Aufgaben für Parallelepipeden, Prismen, Pyramiden, und einige andere einfache Körper. . . 100

VIII. Reguläre Körper. 127

IX. Körper, welche von regulären Figuren zweyerley Art begränzt werden. 139

Seite.

X. Körper, welche von regulären Figuren dreyerley Art begränzt werden. 270

XI. Körper, welche von lauter Rhomben begränzt werden. 186

XII. Polyedrometrische Aufgaben. 196

XIII. Runde, ringförmige und krumme Körper. . 218

XIV. Vom Maximum und Minimum, in so fern dieser Gegenstand zur Elementar-Geometrie gehört. (Fortsetzung.) 262

XV. Gleichungen für die gerade Linie, die Ebene, den Kreis und die Kugel. 304

XVI. Relationen zwischen den Coordinaten dreyer Punkte. Gebrauch derselben bey der Auflösung einiger, die dreyseitigen Pyramiden betreffenden Aufgaben. 341

XVII. Einige vermischte Aufgaben und Lehrsätze. . 361

I. Con-

I. Construktionen im Raume vermittelst der Projektionen.

Einleitung.

§ 1.

Construktionen im Raume nenne ich diejenigen Construktionen, welche nicht in einer und derselben Ebene ausgeführt werden können, im Gegensatze mit denen, welche zu ihrer Ausführung nur einer Ebene bedürfen, und die ich aus diesem Grunde Construktionen in der Ebene nennen will; die ersteren sind in Beziehung auf die Körper das, was die letzteren in Beziehung auf die ebenen Figuren sind; jene erfordern zu ihrer Darstellung drey Dimensionen, Länge, Breite und Höhe, diese nur zwey, Länge und Breite.

Mit den Construktionen im Raume und ihrer Darstellung durch Zeichnung, haben sich in den neuern Zeiten die Franzosen, namentlich Monge und Lacroix mit glücklichem Erfolge beschäftigt, und aus allen dahin gehörigen Lehren einen besondern Zweig der Geometrie geschaffen, welchen sie Géométrie descriptive nennen. Einer ihrer Hauptgegenstände ist die, in mehreren Theilen der Baukunst, besonders bey den Ge-

wölben, sehr nützliche Construktion der Schnitte krummer Flächen, worüber Monge in den Séances des écoles normales viele tief durchdachte Abhandlungen geliefert hat. Lacroix's Elementarwerk: Essais de Géométrie, sur les plans et les surfaces courbes; ou élémens de Géométrie descriptive, seconde édition, 1802 *), empfiehlt sich vorzüglich durch seine Deutlichkeit und durch die logische Anordnung des Vortrags.

§ 2.

Die Lage eines Punktes im Raume ist gegeben, wenn man die Entfernungen dieses Punktes von drey Ebenen kennet, deren Lage bekannt ist, vorausgesetzt, daß diese Ebenen nicht parallel sind.

Man denke sich drey Ebenen von willkührlicher, nicht paralleler Lage, welche der Kürze wegen und um keiner Zeichnung zu bedürfen, durch E, E′, E″, bezeichnet werden sollen; ferner einen Punkt P, dessen respektive Entfernungen von jenen Ebenen d, d′, d″, heißen mögen, wobey es übrigens vorerst noch unbestimmt bleiben soll, ob dieser Punkt zur rechten oder zur linken Seite, ober oder unterhalb dieser Ebenen liegt. Man stelle sich nun vor, es wären auf beyden Seiten der Ebene E, in der Entfernung d, zwey ihr parallele unbegränzte Ebenen gelegt; in einer dieser beyden Ebenen liegen

*) Die erste Auflage erschien 1795. Von diesem Werke ist so eben eine Uebersetzung, unter folgendem Titel erschienen: „Weitere Ausführung zu Lacroix's Geometrie, oder Versuch einer Geometrie über die ebnen oder krummen Oberflächen nebst Anfangsgründen der Perspektive, zum besondern Gebrauch für Architekten, und für die ausübenden Meßkünstler überhaupt. Aus dem Französischen übersetzt von E. M. Hahn, Königl. Preuß. Cammer-Conducteur. Mit 10 Kupfertafeln. Berlin 1806, bey Heinrich Frölich."

alsdann nothwendig alle die Punkte, welche von der Ebene E den Abstand d haben, außerhalb derselben keiner; unter dieser unendlichen Menge von Punkten befindet sich nun auch der Punkt P. Um ihn näher zu bestimmen, denke man sich zwey andere unbegränzte Ebenen, welche, in der Entfernung d', auf beyden Seiten der Ebene E' ihr parallel laufen. In einer dieser beyden Ebenen liegt nun gewiß der Punkt P; da er aber auch in einer der beyden vorher erwähnten Ebenen liegen muß, so kann er, um beyde Bedingungen zugleich zu erfüllen, nirgends wo anders liegen, als in einer der vier Linien, in welchen sich die vier Ebenen je zwey und zwey einander schneiden. Alle Punkte dieser Linien haben demnach die Eigenschaft mit einander gemein, daß sie von der Ebene E den Abstand d, und von der Ebene E' den Abstand d' haben. Aber, nicht alle Punkte dieser Linien besitzen auch zugleich die Eigenschaft, daß sie von der Ebene E'' die Entfernung d'' haben, welches die dritte Bedingung für den Punkt P ist. In Hinsicht auf diese dritte Bedingung muß der Punkt P in einer der beyden Ebenen liegen, welche in der Entfernung d'' auf beyden Seiten der Ebene E'' ihr parallel laufen, und folglich nothwendig in einem der acht Punkte, in welchen diese Ebenen jene vier Linien schneiden. Jeder dieser acht Punkte erfüllt die drey gegebenen Bedingungen; welcher darunter der gesuchte Punkt P sey, muß aus andern Umständen entschieden werden.

§ 3.

Die leichteste und einfachste Art den Punkt P unter den acht, im vorigen § erwähnten Punkten auszuzeichnen, ist die, daß man angiebt, auf welcher Seite einer jeden der drey Ebenen dieser Punkt liegen soll. In diesem Falle giebt es nämlich für jede der drey Ebenen E, E', E'', anstatt zweyer pa-

rallelen Ebenen, nur eine, welche den erforderlichen Abstand hat, und worin der Punkt P liegen kann; folglich in allem nur drey Ebenen, die in Betrachtung gezogen werden dürfen. Zwey derselben geben in ihrem Durchschnitte nur eine einzige gerade Linie, in welcher der Punkt P liegen kann, und der Durchschnitt dieser Linie mit der dritten Ebene giebt den Punkt selbst.

Da in der Folge von dieser Bestimmung der Punkte im Raume vermittelst dreyer Ebenen häufig Gebrauch gemacht wird, so habe ich die Gründe, worauf dieselbe beruhet, etwas umständlicher aus einander gesetzt, als es der zu behandelnde Gegenstand unmittelbar erforderte.

§ 4.

Ein noch einfacheres Mittel zur Erreichung unseres Zweckes, die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, geben uns die Projektionen an die Hand.

Projektion eines Punktes auf einer Ebene, heißt der Punkt, worin ein Perpendikel, aus dem zu projicirenden Punkte auf der Ebene herabgelassen, diese trifft. Die Länge des Perpendikels zwischen dem gegebenen Punkte und der Ebene ist die Höhe desselben über der Ebene.

Sind die Projektionen eines Punktes auf zwei Ebenen von bekannter Lage im Raume gegeben, so ist es auch der Punkt selbst.

Denn, wenn man aus der Projektion in der einen Ebene ein Perpendikel auf dieselbe errichtet, so gehet dieses Perpendikel nothwendig durch den gegebenen Punkt; errichtet man aus der Projektion in der anderen Ebene ein Perpendikel, so gehet auch dieses Perpendikel durch den gegebenen Punkt; dieser Punkt liegt folglich zugleich in zwey Linien von bestimmter Lage; er ist demnach kein anderer als der Durchschnittspunkt dieser Linien, und daher bekannt.

§ 5.

Wenn man von allen Punkten einer beliebigen geraden Linie AB (Fig. 1) auf eine, der Lage nach gegebenen Ebene LMNO, Perpendikel herabläßt, so liegen alle Punkte, in welchen diese Perpendikel die Ebene treffen, in einer und derselben Linie ab; denn alle diese Linien liegen in einer Ebene, welche durch AB gehet und auf LMNO perpendikulär stehet, folglich auch die Punkte, worin sie die Ebene LMNO treffen; diese Punkte liegen demnach in beiden Ebenen zugleich, und daher nothwendig in der Durchschnittslinie derselben, also in einer geraden Linie.

Die Linie ab, welche durch die Projektionen aller Punkte einer anderen geraden Linie AB auf der Ebene LMNO gehet, heißt die Projektion der Linie AB auf dieser Ebene.

Da zwey Punkte die Lage einer geraden Linie bestimmen, so braucht man nur die Projektionen zweyer Punkte einer geraden Linie zu kennen, um die Projektion derselben zu finden.

Stehet also eine gerade Linie auf einer Projektions-Ebene perpendikulär, so ist ihre Projektion ein Punkt, und zwar derjenige, worin die Linie diese Ebene trifft.

Sind die Projektionen (Fig. 2) ab, a′b′, einer geraden Linie AB auf zwey Ebenen LMNO, LMPQ, von bekannter Lage gegeben, so ist auch die Lage dieser Linie gegeben. Denn man lege durch die eine Projektion ab eine Ebene auf LMNO perpendikulär; alsdann gehet diese Ebene nothwendig durch die Linie AB. Legt man eben so durch die andere Projektion a′b′ eine Ebene auf LMPQ perpendikulär, so gehet auch diese Ebene durch die Linie AB. Die gesuchte Linie AB ist also keine andere, als die Durchschnittslinie dieser Ebenen.

Das hier Gesagte gilt immer, die Lage der Ebenen LMNO, LMPQ, sey welche sie wolle. Des Gebrauches we-

gen, den man gewöhnlich von den Projektionen macht, ist es indessen rathsam, auch hier diese Ebenen auf einander perpendikulär anzunehmen. Es ist aber leicht zu begreifen, daß, wenn man die Ebene LMPQ in ihrer aufrechten Lage so zeichnen wollte, wie sie sich dem Auge darstellt, die darin gezeichneten Linien und Figuren ganz andere Verhältnisse und Lagen bekommen würden, als sie wirklich haben. Da es nun bey den Projektionen mehr auf eine genaue als anschauliche Darstellung ankommt, so stelle man sich vor, die Ebene LMPQ drehe sich um die Linie LM so lange, bis sie mit LMNO in eine Ebene zu liegen kommt, und zeichne alsdann in LMP′Q′ alles so, wie es die Regeln der Projektionen erfordern.

Mehrerer Deutlichkeit wegen soll die Ebene LMNO die horizontale, und LMPQ die vertikale Ebene heißen, obgleich diese nicht vertikal und jene nicht horizontal zu seyn braucht.

§ 6.

Es seyen a und a′ die horizontale und vertikale Projektion des Punktes A (Fig. 2); alsdann ist die Ebene aAa′C, welche durch die Perpendikel Aa, Aa′ gelegt wird, auf beyden Ebenen zugleich perpendikulär, folglich auch auf ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte LM, und daher sind auch die Linien aC, a′C, auf LM perpendikulär. Indem nun die vertikale Ebene sich um LM drehet, bleibt die Linie Ca′ immer auf LM perpendikulär, sie ist es also auch dann noch, wenn die Ebene LMPQ in LMP′Q′ und Ca′ in Ca″ fällt. Hieraus folgt demnach, daß die Linie Ca″ in der Verlängerung von Ca liegt; auf die nämliche Art verhält es sich auch mit den Linien Db″, Db, für jeden anderen Punkt B. Durch diesen Umstand wird das Auftragen der Projektionen um vieles erleichtert; denn hat man einmal die horizontalen Projektionen einer gewissen Anzahl Punkte gefunden, so darf man nur von

jedem dieser Punkte auf LM ein Perpendikel fällen; in der Verlängerung dieses Perpendikels liegt alsdann die vertikale Projektion jenes Punktes. Dies gilt auch umgekehrt, wenn die vertikale Projektion gegeben ist, und die horizontale gefunden werden soll.

---

§ 7.

Aufg. Die horizontale nebst der vertikalen Projektion einer geraden Linie ist gegeben: man soll die Länge dieser Linie finden.

Aufl. Es seyen (Fig. 2) ab, a′b′, die gegebenen Projektionen der Linie AB, deren Länge gesucht wird.

1) Man ziehe aus A die Horizontale AE, welche die Vertikale BE in E trifft; aus E ziehe man die Horizontale Ee, welche die Vertikale b′D in e trifft, und hierauf die Linie a′e.

2) Alsdann sind DE, Ab, AC, Parallelogramme, und daher eD = Eb = Aa = a′C. Da also a′C der eD gleich und parallel ist, so ist auch a′e der CD gleich und parallel, folglich auf b′D perpendikulär.

3) Da ab gegeben ist, so ist auch CD = a′e gegeben. Man kennt demnach in dem rechtwinklichten Dreyecke a′eb′ zwey Seiten a′b′, a′e, folglich auch die dritte b′e = BE.

4) In dem rechtwinklichten Dreyecke AEB kennet man demnach die beyden Catheten BE und AE (= der gegebenen Projektion ab), folglich auch die Hypothenuse AB. Hieraus ergiebt sich folgende Construktion.

Es sey LM (Fig. 3) die Durchschnittslinie der horizontalen und vertikalen Ebene, ab die horizontale, und a″b″ die auf die Horizontalebene reducirte vertikale Projektion. Man ziehe die Linie b″b, welche mit der eben so bezeichneten Linie in Fig. 2 übereinstimmt, und daher auf LM perpendikulär stehet; durch a″ ziehe man die Horizontale He, welche

der Linie $b''b$ in e begegnet; nehme $eH = ab$, und ziehe die Hypothenuse $b''H$, so wird diese Linie der gesuchten an Länge gleich seyn.

§ 8.

Aufg. Es sind die Projektionen eines Punktes und einer Linie gegeben: man soll die Projektionen einer zweyten Linie finden, welche der ersten parallel läuft, und durch den gegebenen Punkt gehet.

Aufl. 1) Die gesuchte Linie ist der gegebenen parallel, folglich sind auch die Vertikalebenen, welche durch diese Linien gehen, einander parallel, mithin auch die Durchschnittslinien dieser Ebenen mit der horizontalen, d. h. die Projektionen der gesuchten und der gegebenen Linie. Auf eine ähnliche Art verhält es sich mit den vertikalen Projektionen.

2) Die gesuchte Linie soll durch den gegebenen Punkt gehen; es müssen also auch ihre Projektionen durch die respektiven Projektionen dieses Punktes gehen. Hieraus ergiebt sich folgende Construktion:

Wenn ab, $a''b''$ (Fig. 4), die Projektionen der gegebenen Linie, d, d'', die Projektionen des gegebenen Punktes sind, so ziehe man durch den Punkt d die Linie ef der ab, und durch den Punkt d'' die Linie $e''f''$ der $a''b''$ parallel; alsdann werden ef und $e''f''$ die gesuchten Projektionen seyn.

§ 9.

Aufg. Es sind die Durchschnittslinien einer Ebene mit den beyden Projektionsebenen, nebst den Projektionen eines Punktes gegeben, durch den eine zweyte Ebene der vorigen parallel gelegt ist: man soll die Durchschnittslinien dieser zweyten Ebene mit den Projektionsebenen finden.

Aufl. 1) Die respektiven Schnitte der gesuchten Ebene müssen den respektiven Schnitten der gegebenen Ebene parallel seyn; denn diese Schnitte sind, zu zwey und zwey betrach-

tet, die Schnitte zweyer Ebenen durch eine dritte. Könnte man daher für jeden derselben nur einen einzigen Punkt bestimmen, durch welchen er gehen muß, so wäre die Aufgabe aufgelößt.

2) Es seyen AB, BC (Fig. 5), die Schnitte der gegebenen Ebene mit den Projektionsebenen; LM wie immer die Durchschnittslinie dieser Ebenen; g'', g, die Projektionen des gegebenen Punktes; DE, EF, die Schnitte der gesuchten Ebene.

3) Man denke sich in der gesuchten Ebene durch den gegebenen Punkt eine Horizontallinie gezogen, die der Kürze wegen L heißen mag; die Projektionen derselben werden gefunden, wenn man durch den Punkt g'' die Horizontale g''F ziehet, und durch den Punkt g eine gerade Linie gI der AB parallel.

4) Verlängert man die Linie gI so weit, bis sie den Schnitt LM in I trifft, so ist dieser Punkt die horizontale Projektion des Durchschnittspunktes der Linie L mit der Vertikalebene; der erwähnte Durchschnittspunkt kann also nirgends wo anders liegen, als in der Vertikalen IF, welche durch I gehet.

5) Da er nun aber auch in g''F liegen muß, so kann es kein anderer seyn als der Durchschnittspunkt F der Linien IF, g''F; und dieser Punkt liegt sowohl in der vertikalen, als in der gesuchten Ebene, folglich in dem Schnitte dieser Ebenen.

6) Man ziehe daher durch den Punkt F die Linie FE der CB parallel, so ist diese Linie der Schnitt der gesuchten Ebene mit der vertikalen; ziehet man ferner aus E, wo sie die LM trifft, die Linie ED der AB parallel, so hat man auch den Schnitt dieser Ebene mit der horizontalen.

Anmerk. Anstatt, wie hier geschehen, in der gesuchten Ebene eine Horizontale zu ziehen, hätte man auch der vertikalen Ebene eine Parallele ziehen können; alsdann würde man durch ähnliche Schlüsse folgende Construktion erhalten haben:

Man ziehe aus g der LM die Linie gD parallel; aus dem Punkte g'' ziehe man die Linie g''H der BC parallel, welche, hinlänglich verlängert, die LM in H schneidet; aus H errichte man auf LM das Perpendikel HD, welches die gD in den Punkt D schneidet; ziehet man hierauf durch D die Linie DE der AB parallel, und aus dem Punkte E, wo sie die LM trifft, die EF der BC parallel, so sind wieder DE und EF die gesuchten Schnitte.

§ 10.

Aufg. Die Schnitte einer Ebene mit den beyden Projektionsebenen nebst den Projektionen eines Punktes sind gegeben: man soll die Lage der Projektionen eines Perpendikels finden, welches aus dem gegebenen Punkte auf die gegebene Ebene herabgelassen worden.

Aufl. 1) Es seyen AB, BC, (Fig. 6), die gegebenen Schnitte der Ebene mit der horizontalen und vertikalen Projektionsebene; d, d'', die gegebenen Projektionen des Punktes, aus welchem das Perpendikel gezogen werden soll.

2) Man ziehe aus d auf AB das Perpendikel dg, und aus d'' auf BC das Perpendikel d''g''; so geben die Linien dg, d''g'' die gesuchte Lage der Projektionen des Perpendikels.

3) Denn denkt man sich durch dieses Perpendikel eine Vertikalebene gelegt, welche, der Deutlichkeit wegen, E heißen mag, so stehet solche auf der Horizontalebene perpendikulär; aber auch auf der Ebene ABC (Elem. XI. 18), folglich auf dem Schnitt AB dieser Ebene mit der horizontalen (Elem. XI. 19). Da also AB auf der Ebene E perpendikulär stehet, so stehet sie auch auf dem Schnitt dieser Ebene mit der Horizontalebene perpendikulär; dieser Schnitt ist aber nichts anders, als die Projektion des Perpendikels auf der Horizontalebene; und da dieselbe auch durch den Punkt d gehen muß, so ist dg die gesuchte Projektion.

4) Auf die nämliche Art wird bewiesen, daß d''g'' die gesuchte Projektion auf der Vertikalebene sey.

§ 11.

Aufg. Unter denselben Voraussetzungen, wie die in der Aufgabe des vorigen §'s, die Projektionen des Punktes zu finden, wo das Perpendikel die Ebene trifft.

Aufl. 1) Es sey, wie im vorigen §, E die Vertikalebene durch das Perpendikel; ferner heiße L die Linie, in welcher diese Ebene die Ebene ABC schneidet; alsdann ist e ein Punkt dieser Linie.

2) Man fälle aus e auf LM das Perpendikel eE, so ist E die Projektion dieses Punktes auf der vertikalen Projektionsebene, und folglich E ein Punkt in der vertikalen Projektion der Linie L.

3) Man verlängere dg, bis sie die LM in F trifft, und errichte aus F auf LM das Perpendikel Ff'', so ist Ff'' der Schnitt der Ebene E mit der vertikalen Projektionsebene. In dieser Linie liegt demnach der Punkt, in welcher die Linie L die vertikale Projektionsebene trifft; dieser Punkt liegt aber auch in der Linie BC, folglich in dem Durchschnittspunkte f'' dieser Linien.

4) Aus 2 und 3 ergiebt sich, daß f''E die vertikale Projektion der Linie L ist; in ihr liegt demnach auch die Projektion des Punktes, in welcher das gesuchte Perpendikel die Ebene ABC trifft; die Projektion dieses Punktes liegt aber auch nothwendig in der Linie d''g''; es kann also kein anderer als der Punkt g'' seyn; g'' ist demnach die vertikale Projektion des gesuchten Punktes.

5) Um nun auch die horizontale Projektion zu finden, ziehe man g''g auf LM perpendikulär; alsdann ist der Punkt g, wo diese Linie die dF schneidet, die horizontale Projektion des gesuchten Punktes (§ 6).

Zus. Die Linien $d''g''$, dg, geben die Länge der Projektionen desjenigen Theiles des Perpendikels, welcher zwischen dem gegebenen und dem gesuchten Punkte enthalten ist.

§ 12.

Aufg. Die Projektionen einer geraden Linie und eines Punktes sind gegeben: man soll eine Ebene konstruiren, welche durch den gegebenen Punkt gehet, und auf der gegebenen Linie perpendikulär stehet.

Aufl. 1) In § 10 wurde gezeigt, daß die Projektionen einer Linie, welche auf einer Ebene perpendikulär stehet, auf den respektiven Schnitten dieser Ebene mit den beyden Projektionsebenen perpendikular stehen müssen. Es kommt also hier bloß darauf an, für jeden dieser Schnitte einen Punkt anzugeben, durch welchen er gehet, weil alsdann diese Schnitte bekannt sind, wodurch die Lage der Ebene bestimmt wird.

2) Man denke sich zu dem Ende in der gesuchten Ebene durch den gegebenen Punkt eine Horizontallinie bis zur vertikalen Projektionsebene gezogen; diese Linie will ich, der Kürze wegen, L nennen.

3) Es seyen nun d, d'' (Fig. 7), die Projektionen des gegebenen Punktes, ab, $a''b''$ die Projektionen der gegebenen Linie. Man ziehe aus d'' die unbegränzte Horizontale $d''G$, und aus d auf ab das Perpendikel dH, welche der LM in H begegnet; alsdann ist $d''G$ die vertikale, und dH die horizontale Projektion der Linie L; ferner H die horizontale Projektion des Punktes, wo diese Linie die vertikale Projektionsebene trifft.

4) Dieser Punkt liegt daher nothwendig in der Linie HG, welche aus H auf LM perpendikulär errichtet ist; aber auch in $d''G$; folglich in G, wo sich diese Linien schneiden.

5) Der Punkt G liegt demnach in der gesuchten und in der vertikalen Projektionsebene zugleich, folglich in dem Schnitte dieser Ebenen. Man erhält demnach diesen Schnitt, wenn man FC auf a''b'' durch den Punkt G perpendikulär ziehet.

6) Ziehet man nun aus C, wo die Linie FC die LM trifft, die Linie CE auf ab perpendikulär, so ist CE der zweyte von den gesuchten Schnitten, und demnach ECF die gesuchte Ebene.

Zus. Wollte man den Punkt konstruiren, wo die gegebene Linie die gesuchte Ebene trifft, so dürfte man nur gerade so verfahren, wie im § 11 gelehrt worden.

§ 13.

Aufg. Die Schnitte zweyer Ebenen mit den beyden Projektionsebenen sind gegeben: man soll die Durchschnittslinie dieser Ebenen konstruiren.

Aufl. 1) Es seyen (Fig. 8) ABC, DEF, die beyden Ebenen, deren Schnitte mit der vertikalen Projektionsebene BC, EF, so wie die mit der horizontalen, AB, DE, gegeben sind.

2) Die Punkte H, G, worin sich die Linien BC, EF, und AB, DE, schneiden, sind den beiden Ebenen gemeinschaftlich, und liegen demnach in der Durchschnittslinie derselben: sie liegen aber auch in den Projektionsebenen; folglich ist H ein Punkt der vertikalen, und G ein Punkt der horizontalen Projektion.

3) Ziehet man nun die Linien HI, GK, auf LM perpendikulär, so ist I die horizontale Projektion des Punktes H, und K die vertikale Projektion des Punktes G.

4) Aus 2 und 3 folgt, daß G, I, die horizontalen, und H, K, die vertikalen Projektionen der beyden äußersten Punkte des gesuchten Schnittes sind; folglich sind GI, HK, die gesuchten Projektionen.

§ 14.

Aufg. Drey Ebenen sind durch ihre Schnitte mit

den beyden Projektionsebenen gegeben: man soll den Punkt konstruiren, welchen diese drey Ebenen gemeinschaftlich haben.

Aufl. Der gesuchte Punkt muß nothwendig in den drey Durchschnittslinien dieser Ebenen zugleich liegen; man darf daher nur die Projektionen von irgend zwey dieser Durchschnittslinien konstruiren, so giebt der Punkt, wo sich die beyden vertikalen Projektionen schneiden, die vertikale, und der Punkt, worin sich die beyden horizontalen Projektionen schneiden, die horizontale Projektion des gesuchten Punktes.

§ 15.

Aufg. Durch drey Punkte, deren Projektionen gegeben sind, ist eine Ebene gelegt worden: man soll ihre Schnitte mit den Projektionsebenen bestimmen.

Aufl. 1) Es seyen a, b, c (Fig. 9), die horizontalen, und a'', b'', c'', die vertikalen Projektionen der drey gegebenen Punkte, durch welche die Ebene gelegt werden soll; es heiße ferner, der Kürze wegen, L die Linie, welche die Punkte, deren Projektionen a, b, a'', b'', sind, verbindet, und L' die Linie, welche die beiden Punkte verbindet, deren Projektionen a, c, a'', c'' sind.

2) Man ziehe die Linien a''b'', a''c'', und errichte aus den Punkten H, F, wo sie die LM schneiden, die Perpendikel HA, FD; ziehe hierauf ab, ac, und verlängere diese Linien, bis sie jene Perpendikel in A, D schneiden; alsdann ist A der Punkt, wo die Linie L, und D der Punkt, wo die Linie L' die horizontale Projektionsebene schneidet. Ziehet man daher durch A und D die Linie AB, so ist diese Linie der Schnitt der gesuchten Ebene mit der horizontalen Projektionsebene.

3) Um nun auch den vertikalen Schnitt zu bestimmen, dürfte man nur die horizontale Projektionsebene mit der ver-

kalen vertauschen; man kann aber auch auf folgende Art verfahren.

4) Man ziehe aus a die aG der AB, und aus a'' die a''E der LM parallel; aus dem Punkte G, wo die erstere die LM schneidet, errichtet man das Perpendikel GE, welches die zweyte in E schneidet, und ziehe durch B und E die Linie BC, so hat man den gesuchten Schnitt.

5) Denn denkt man sich durch den Punkt, dessen Projektion a ist, in der gesuchten Ebene eine Linie der AB parallel gezogen, so sind aG, a''E die Projektionen dieser Linie, folglich ist E der Punkt, worin diese Linie die vertikale Projektionsebene trifft, und daher auch ein Punkt des Schnittes der gesuchten Ebene mit der vertikalen, woraus das Uebrige folgt.

§ 16.

Aufg. Die Schnitte zweyer Ebenen mit den beyden Projektionsebenen sind gegeben: man soll den Winkel, den sie einschließen, konstruiren.

Aufl. 1) Es seyen ABC, ADE (Fig. 10), die beyden Ebenen; BC, DE, ihre Schnitte mit der vertikalen, AD, AB die mit der horizontalen Projektionsebene. Es sey ferner AF die nach § 13 bestimmte horizontale Projektion ihrer Durchschnittslinie.

2) Man nehme auf dieser Durchschnittslinie irgend einen Punkt an, der K heißen mag, und lege durch diesen Punkt eine auf derselben perpendikuläre Ebene, welche die beyden gegebenen Ebenen in zwey geraden Linien schneidet, die den gesuchten Winkel einschließen. Sie schneidet ferner die Horizontalebene in einer Linie, welche, als der Durchschnitt zweyer auf der Ebene AFF'' perpendikulären Ebenen, auf dieser, und folglich auf AF perpendikulär stehet.

3) Dieser letztere Schnitt sey gh, für welchen man jede beliebige auf AF perpendikuläre Linie annehmen kann. Man stelle sich nun vor, das Dreyeck, welches durch die in 2 erwähnten drey Linien eingeschlossen wird, drehe sich um die Linie gh, so bleibt bey dieser Drehung der Punkt K beständig in der durch AF gelegten Vertikalebene, und fällt endlich auf AF selbst in irgend einen Punkt l. Der Winkel glh ist alsdann der gesuchte Winkel. Um diesen Winkel zu konstruiren, bedarf es weiter nichts, als die Höhe des Dreyecks il zu finden.

4) Zu dem Ende errichte man in F das Perpendikel Ff = Ff″, ziehe Af, und fälle ik darauf perpendikulär, so ist ik = iK = il. Man mache daher il = ik, und ziehe die Linien lg, lh, so ist glh der gesuchte Winkel.

§ 17.

Aufg. Die Schnitte einer Ebene mit den beyden Projektionsebenen sind gegeben: man soll die Schnitte einer anderen Ebene finden, welche mit der ersteren einen gegebenen Winkel einschließt.

Aufl. Um diese Aufgabe aufzulösen, braucht man nur das Verfahren im vorigen § umzukehren.

Es seyen (Fig. 10) DA, DE die Schnitte der gegebenen Ebene mit den beyden Projektionsebenen, A und f″ zwey willkührliche Punkte auf denselben. Man fälle auf LM aus f″ das Perpendikel f″F, und ziehe AF; aus F errichte man in der Horizontalebene auf AF das Perpendikel Ff = Ff″, und ziehe Af. Man nehme nun auf AF irgend einen Punkt i an, fälle aus demselben auf Af das Perpendikel ik, und errichte zugleich das unbegränzte Perpendikel gh, welches die AD in g schneidet; mache il = ik, ziehe gl, und lege an diese Linie in l einen, dem gegebenen gleichen Winkel glh; durch den Punkt h, wo die Linie lh die gh schneidet, und durch den

Punkt A ziehe man die Linie AB: diese Linie ist der gesuchte horizontale Schnitt. Um den vertikalen zu finden, darf man nur durch B und f'' die Linie BC ziehen.

§ 18.

Aufg. Es sind drey ebene Winkel gegeben: man soll aus denselben einen körperlichen Winkel konstruiren.

Aufl. 1) Es sey LM (Fig. 11), wie gewöhnlich, der Schnitt der beyden Projektionsebenen. Aus irgend einem Punkte A dieses Schnittes, errichte man in der horizontalen Projektionsebene das Perpendikel Aa von willkührlicher Länge, und lege daran einen Winkel AaB, welcher einem der gegebenen gleich sey; an Aa und aB lege man die beyden anderen gegebenen Winkel AaC, Bac. Wenn C der Punkt ist, wo die Linie aC die LM trifft, mache man ac = aC, fälle aus c auf aB das Perpendikel cd, welches verlängert die LM in E trifft.

2) Man stelle sich nun vor, der Winkel Bac drehe sich um die Linie aB, und der Winkel AaC um die Linie aA, so lange, bis die Linien aC, ac, folglich auch die Punkte C, c, auf einander fallen und so den gesuchten körperlichen Winkel bilden. Die Linien dc, AC, beschreiben bey dieser Drehung zwey Ebenen, die beyde auf der horizontalen Projektionsebene perpendikulär stehen, und solche nach den Richtungen der Linien cE, CE schneiden.

3) Der Punkt E ist diesen beyden vertikalen Ebenen gemeinschaftlich; er liegt folglich in der vertikalen Durchschnittslinie dieser Ebenen; er ist demnach die horizontale Projektion des Punktes, worin C, c zusammen treffen. Die Linie aE ist folglich die horizontale Projektion der oberen Kante des körperlichen Winkels, welche durch die Vereinigung der Linien ac, aC erzeugt wird.

4) Der Punkt, worin C, c sich vereinigen, liegt in der

Peripherie des Kreises, welchen AC bey der Umdrehung beschreibt. Denkt man sich daher die Ebene dieses Kreises, wie gewöhnlich, auf die Horizontalebene gebracht, so ist das Perpendikel Ee'' die Höhe dieses Punktes über E; demnach ist e'' ein Punkt in der vertikalen Projektion der in 3 erwähnten, oberen Kante; und da auch A ein Punkt in derselben ist, so ist Ae'' diese vertikale Projektion. Man hat also die beyden Projektionen dieser Kante; sie ist demnach gegeben.

Anmerk. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn einer der gegebenen Winkel größer ist, als die beyden anderen zusammen genommen, wie auch eine leichte Betrachtung der Figur zeigt; denn in diesem Falle wird der Punkt E ausserhalb des Durchmessers DC fallen.

§ 19.

Aufg. Die horizontalen und vertikalen Projektionen zweyer sich schneidenden Linien sind gegeben: man soll den Winkel konstruiren, welchen sie mit einander bilden.

Aufl. 1) Es seyen (Fig. 12) ab, ac, die horizontalen, a''b'', a''c'', die vertikalen Projektionen der Linien im Raume; alsdann ist der Punkt a, wo sich die ersteren begegnen, die horizontale, und der Punkt a'', wo sich die letzteren begegnen, die vertikale Projektion des Durchschnittspunktes der beyden Linien im Raume, und liegen folglich in einer Linie aGa'', welche auf LM perpendikulär stehet (§ 8).

2) Man denke sich die beyden Linien im Raume so weit verlängert, bis jede derselben die Horizontalebene in irgend einen Punkt trifft. Um diese Punkte zu bestimmen, verlängere man die Linien a''b'', a''c'' so weit, bis sie die LM in die Punkte D und E treffen, welche die vertikalen Projektionen der gesuchten Punkte sind; diese Punkte liegen demnach nothwendig in den aus D, E errichteten Perpendikeln, und folg-

lich da, wo diese Linien von den respektiven horizontalen Projektionen ab, ac geschnitten werden, d. h. in d und e.

3) Ziehet man nun die Linie de, so bildet diese Linie mit den Theilen der beyden gegebenen Linien, welche zwischen ihrem Durchschnittspunkte und den Punkten d, e liegen, ein Dreyeck, worin derjenige Winkel, welcher der Seite de gegenüber liegt, der gesuchte ist; es kommt also bloß darauf an, dieses Dreyeck zu konstruiren.

4) Zu dem Ende ziehe man af auf de perpendikulär, und stelle sich vor, dieses Dreyeck drehe sich um die Linie de, und senke sich so zur Horizontalebene herab. Die Spitze dieses Dreyecks bleibt alsdann beständig in der durch af gelegten Vertikalebene, und wird also irgendwo auf af oder ihre Verlängerung fallen, etwa in den Punkt h: es bleibt demnach bloß hf zu bestimmen übrig.

5) die Linie hf ist in ihrer natürlichen Lage über der Horizontalebene die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyeckes, dessen eine Cathete die horizontale Projektion af, und die andere die Höhe der Dreyecksspitze über der Horizontalebene, oder die Linie a''G ist. Man darf daher nur noch GF = af machen, a''F ziehen, und hf = a''F machen, um das gesuchte Dreyeck zu erhalten.

6) Ziehet man demnach die Linien eh, dh, so ist dhe der gesuchte Winkel.

§ 20.

Aufg. Es sind die Projektionen einer geraden Linie, und die Schnitte einer Ebene mit den beyden Projektionsebenen gegeben: man soll den Winkel konstruiren, welchen die Linie mit der Ebene bildet.

Aufl. 1) Man denke sich von irgend einem Punkte der gegebenen Linie auf der gegebenen Ebene ein Perpendikel her-

abgelassen; alsdann ist der Winkel, welchen dieses Perpendikel mit der gegebenen Linie macht, der Ergänzungswinkel des gesuchten zu einem Rechten. Hat man demnach jenen gefunden, so ist auch dieser bekannt.

2) Zu dem Ende nehme man auf den beyden Projektionen der gegebenen Linie zwey Punkte an, welche in einer und derselben auf der Durchschnittslinie der Projektionsebenen perpendikulären Linie liegen, und ziehe von diesen Punkten auf die gegebenen Schnitte der Ebene mit den Projektionsebenen Perpendikel; so sind diese Perpendikel die Projektionen eines im Raume, aus einem Punkte der gegebenen Linie auf der Ebene gefällten Perpendikels (§ 10).

3) Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, einen Winkel zu konstruiren, den zwei Linien einschließen, deren Projektionen gegeben sind, welches die Aufgabe des vorigen §'s ist.

§ 21.

Aufg. Die Neigungswinkel zweyer sich schneidenden Linien gegen die Horizontalebene sind gegeben, wie auch der Winkel, unter welchem sie sich schneiden: man soll die horizontale Projektion dieses leztern Winkels konstruiren.

Aufl. 1) Es sey A (Fig. 13) die horizontale Projektion des Punktes, wo diese beyden Linien sich schneiden; AB die horizontale Projektion eines seiner Schenkel. Könnte man nun die Projektion des andern Schenkels finden, so wäre die Aufgabe aufgelöst.

2) Man nehme AB für den Schnitt der Projektionsebenen an, ziehe aus A die Vertikale Aa'', und mache den Winkel ABa'' dem einen der gegebenen Neigungswinkel gleich; der Punkt a'', wo sich die Linien Aa'', Ba'' schneiden, ist alsdann nothwendig die Spitze des Winkels, dessen Projektion man sucht.

3) Man ziehe nun aus a'' an LM die Linie a''C unter dem Winkel ACa'', welcher dem zweiten der gegebenen Nei-

gungswinkel gleich ist, und beschreibe aus A mit AC den Bogen Cde; in diesem Bogen muß sich die gesuchte Projektion endigen. Es kommt also bloß darauf an, die Entfernung dieses Punktes von irgend einem anderen, etwa von B zu bestimmen, oder, welches das Nämliche ist, die Entfernung der Punkte, wo die Schenkel des Winkels, dessen Projektion gesucht wird, die Horizontalebene treffen. Hieraus ergiebt sich das Uebrige der Construktion.

4) Man mache nämlich Ba''D dem gegebenen Winkel gleich, mache a''D = a''O, und ziehe BD; schneide hierauf mit Bd = BD den Bogen Cde in d, und ziehe Ad, so ist der Winkel BAd die gesuchte Projektion.

Das Bisherige mag vorerst zu einer vorläufigen Kenntniß dessen, worauf es bey den Constructionen im Raume ankommt, hinreichen; die weitere Entwickelung dieses Gegenstandes, und insbesondere die wichtige Anwendung auf die Schnitte krummer Flächen, kann erst in den folgenden Sammlungen ihren Platz finden, weil dazu eine Bekanntschaft mit der höheren Geometrie erfordert wird, welche ich hier noch nicht voraussetzen darf.

II. Analytische Ableitung der sphärisch-trigonometrischen Formeln.

§ 22.

Es sey ABC (Fig. 14) irgend ein sphärisches Dreyeck; S der Mittelpunkt der Kugelfläche, zu welcher dasselbe gehört, und aus diesem Punkte die Halbmesser SA, SB, SC gezogen, welche mit dem Kugeldreyecke die sphärische Pyramide SABC bilden, die von den drey Seitenflächen SAB, SBC, SAC eingeschlossen wird.

Man lasse nun von irgend einer Spitze des sphärischen Dreyeckes, etwa, C, auf die gegenüber liegende Seitenfläche SAB das Perpendikel CD herab; aus D, wo dieses Perpendikel die Ebene trifft, ziehe man DE auf SA, und DF auf SB perpendikulär, und aus C die Linien CE, CF. Alsdann ist, wie bekannt, CFD der Neigungswinkel der Ebenen SAB, SBC, und CED der Neigungswinkel der Ebenen SAC, SAB. Aus den Punkten E, D ziehe man ferner EG der DF, und DH der SB parallel.

Um dem Gedächtnisse zu Hülfe zu kommen, bezeichne man die inneren Winkel des sphärischen Dreyeckes ABC; mit den, an ihren Spitzen befindlichen großen Buchstaben A, B, C, und die ihnen gegenüber liegenden Seiten mit den ähnlichen kleinen a, b, c; z. B. den Winkel bey A mit A, und die gegenüber liegende Seite BC mit a.

§ 25.

1) Wird der Halbmesser der Kugel, der Leichtigkeit wegen, = 1 gesetzt, so hat man;

$$CE = \text{Sin.}\,CA = \text{Sin.}\,b, \quad SE = \text{Cos.}\,CA = \text{Cos.}\,b,$$
$$CF = \text{Sin.}\,CB = \text{Sin.}\,a, \quad SF = \text{Cos.}\,CB = \text{Cos.}\,a.$$

Aus dem bey D rechtwinkeligen Dreyecke CDE, worin CED = A, erhält man,

$$CD = CE\,\text{Sin.}\,CED = \text{Sin.}\,b\,\text{Sin.}\,A,$$
$$DE = CE\,\text{Cos.}\,CED = \text{Sin.}\,b\,\text{Cos.}\,A;$$

ferner, aus dem bey D rechtwinkeligen Dreyecke CDF, worin CFD = B,

$$CD = CF\,\text{Sin.}\,CFD = \text{Sin.}\,a\,\text{Sin.}\,B,$$
$$DF = CF\,\text{Cos.}\,CFD = \text{Sin.}\,a\,\text{Cos.}\,B.$$

Setzt man die beyden Ausdrücke der Linie CD einander gleich, so erhält man die Gleichung

$$\text{I.} \quad \text{Sin.}\,b\,\text{Sin.}\,A = \text{Sin.}\,a\,\text{Sin.}\,B.$$

2) Da SED = SGE = R, so ist GSE + SEG = SEG + HED, folglich HED = GSE (= ASB); daher ist,

$$HD = DE \,\text{Sin.}\, HED = DE \,\text{Sin.}\, c = \text{Cos.}\, A \,\text{Sin.}\, b \,\text{Sin.}\, c.$$

Ueberdies ist auch

$$SG = SE \,\text{Cos.}\, ESG = \text{Cos}\, b \,\text{Cos.}\, c.$$

Da nun auch SF = Cos. a = SG + GF = SG + HD; so erhält man die Gleichung

$$\text{II.} \quad \text{Cos.}\, a = \text{Cos.}\, b \,\text{Cos.}\, c + \text{Cos.}\, A \,\text{Sin.}\, b \,\text{Sin.}\, c.$$

3) Die Formel I. giebt die Relation zwischen zwey Winkel und den ihnen gegenüber liegenden Seiten; die Formel II. die Relation zwischen einer Seite, den beyden andern Seiten, und dem Winkel, welchen sie einschließen. Diese beyden Gleichungen sind hinreichend, um alle übrigen, welche in der sphärischen Trigonometrie vorkommen, daraus zu entwickeln. Hierzu dient besonders der, aus der gewählten Bezeichnung entspringende, vortheilhafte Umstand, daß man in jeder Gleichung, welche eine Relation zwischen den Winkeln A, B, C und den Seiten a, b, c ausdruckt, die ersteren auf alle mögliche Arten mit einander vertauschen kann, wenn man nur mit den letztern eine ähnliche Vertauschung vornimmt; und z. B. wenn B für A gesetzt wird, auch zugleich b für a setzt.

§ 24.

Die gehörige Vertauschung der Buchstaben in den Gleichungen I. und II. des vorigen §'s giebt sogleich, wenn diese beyden noch mit zugezogen werden, folgende sechs;

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sin.}\, a \,\text{Sin.}\, B = \text{Sin.}\, b \,\text{Sin.}\, A \\ \text{Sin.}\, a \,\text{Sin.}\, C = \text{Sin.}\, c \,\text{Sin.}\, A \\ \text{Sin.}\, b \,\text{Sin.}\, C = \text{Sin.}\, c \,\text{Sin.}\, B \end{array}\right\} \ldots [A]$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos.}\, a = \text{Cos.}\, b \,\text{Cos.}\, c + \text{Cos.}\, A \,\text{Sin.}\, b \,\text{Sin.}\, c \\ \text{Cos.}\, b = \text{Cos.}\, a \,\text{Cos.}\, c + \text{Cos.}\, B \,\text{Sin.}\, a \,\text{Sin.}\, c \\ \text{Cos.}\, c = \text{Cos.}\, a \,\text{Cos.}\, b + \text{Cos.}\, C \,\text{Sin.}\, a \,\text{Sin.}\, b \end{array}\right\} \ldots [B]$$

§ 25.

Man setze den Werth von Cos. a aus der ersten der Gleichungen [B] in die beyden anderen; dies giebt:

$$\text{Cos. } b = \text{Cos. } b \text{ Cos. } c^2 + \text{Cos. } A \text{ Sin. } b \text{ Sin. } c \text{ Cos. } c + \text{Cos. } B \text{ Sin. } a \text{ Sin. } c;$$

$$\text{Cos. } c = \text{Cos. } c \text{ Cos. } b^2 + \text{Cos. } A \text{ Sin. } b \text{ Sin. } c \text{ Cos. } b + \text{Cos. } C \text{ Sin. } a \text{ Sin. } b;$$

oder wenn $1 - \text{Sin. } c^2$ für $\text{Cos. } c^2$, $1 - \text{Sin. } b^2$ für $\text{Cos. } b^2$ gesetzt, und hierauf durch Sin. c und Sin. b dividirt wird,

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos. } B \text{ Sin. } a = \text{Cos. } b \text{ Sin. } c - \text{Cos. } A \text{ Sin. } b \text{ Cos. } c \\ \text{Cos. } C \text{ Sin. } a = \text{Cos. } c \text{ Sin. } b - \text{Cos. } A \text{ Sin. } c \text{ Cos. } b \end{array}\right\} \ldots (\varphi).$$

Man multiplicire die zweyte dieser Gleichungen mit Cos. A, addire sie hierauf zur ersten, und setze $1 - \text{Sin. } A^2$ für $\text{Cos. } A^2$; hierdurch entstehet:

$$\text{Sin. } a (\text{Cos. } B + \text{Cos. } A \text{ Cos. } C) = \text{Sin. } A^2 \text{ Cos. } b \text{ Sin. } c.$$

Wenn hierin für Sin. c Sin. A sein Werth Sin. a Sin. C aus der zweyten der Gleichungen [A] § 24 substituirt wird, so erhält man endlich:

$$\text{Cos. } B = - \text{Cos. } A \text{ Cos. } C + \text{Cos. } b \text{ Sin. } A \text{ Sin. } C.$$

§ 26.

Durch die Verbindung dieser Gleichung mit den zweyen, durch die Vertauschung der Buchstaben daraus abgeleiteten, ergeben sich folgende drey Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos. } A = - \text{Cos. } B \text{ Cos. } C + \text{Sin. } B \text{ Sin. } C \text{ Cos. } a \\ \text{Cos. } B = - \text{Cos. } A \text{ Cos. } C + \text{Sin. } A \text{ Sin. } C \text{ Cos. } b \\ \text{Cos. } C = - \text{Cos. } A \text{ Cos. } B + \text{Sin. } A \text{ Sin. } B \text{ Cos. } c \end{array}\right\} . [C].$$

§ 27.

Aus den Gleichungen [A] § 24, findet man,

$$\text{Sin. } a = \frac{\text{Sin. } b \text{ Sin. } A}{\text{Sin. } B}, \quad \text{Sin. } a = \frac{\text{Sin. } c \text{ Sin. } A}{\text{Sin. } C},$$

Wird der erste dieser Werthe des Sin. a in der ersten, und der zweyte Werth desselben in der zweyten der Gleichungen (φ) in § 25 substituirt, und zugleich Cot. B für $\frac{\text{Cos. B}}{\text{Sin. B}}$ und Cot. C für $\frac{\text{Cos. C}}{\text{Sin. C}}$ gesetzt, so erhält man:

$$\text{Cot. B Sin. A Sin. b} = \text{Cos. b Sin. c} - \text{Cos. A Sin. b Cos. c}$$
$$\text{Cot. C Sin. A Sin. c} = \text{Cos. c Sin. b} - \text{Cos. A Sin. c Cos. b.}$$

§ 28.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich durch die Vertauschung der Buchstaben folgende sechs:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Sin. a Sin. B Cot. A} = \text{Cos. a Sin. c} - \text{Cos. B Sin. a Cos. c} \\
\text{Sin. a Sin. C Cot. A} = \text{Cos. a Sin. b} - \text{Cos. C Sin. a Cos. b} \\
\text{Sin. b Sin. A Cot. B} = \text{Cos. b Sin. c} - \text{Cos. A Sin. b Cos. c} \\
\text{Sin. b Sin. C Cot. B} = \text{Cos. b Sin. a} - \text{Cos. C Sin. b Cos. a} \\
\text{Sin. c Sin. A Cot. C} = \text{Cos. c Sin. b} - \text{Cos. A Sin. c Cos. b} \\
\text{Sin. c Sin. B Cot. C} = \text{Cos. c Sin. a} - \text{Cos. B Sin. c Cos. a}
\end{array}\right\} [D]$$

§ 29.

Man setze in den Gleichungen [A] § 24 und [C] § 26,

$$A = 180^\circ - A', \quad B = 180^\circ - B', \quad C = 180^\circ - C',$$
$$a = 180^\circ - a', \quad b = 180^\circ - b', \quad c = 180^\circ = c';$$

Hierdurch verwandeln sie sich in folgende:

$$\text{Sin. a' Sin. B'} = \text{Sin. b' Sin. A'}$$
$$\text{Sin. a' Sin. C'} = \text{Sin. c' Sin. A'}$$
$$\text{Sin. b' Sin. C'} = \text{Sin. c' Sin. B'}$$
$$\text{Cos. A'} = \text{Cos. B' Cos. C'} + \text{Cos. a' Sin. B' Sin. C'}$$
$$\text{Cos. B'} = \text{Cos. A' Cos. C'} + \text{Cos. b' Sin. A' Sin. C'}$$
$$\text{Cos. C'} = \text{Cos. A' Cos. B'} + \text{Cos. c' Sin. A' Sin. B'}.$$

Diese Gleichungen sind, in Ansehung der Form, denen in [A] und [B] vollkommen ähnlich, und weichen nur darin von

jenen ab, daß in diesen allenthalben A', B', C' stehet, wo sich in jenen a, b, c befindet, und a', b', c' an der Stelle von A', B', C'. Es werden demnach die hier angegebenen sechs Gleichungen ähnliche Resultate geben, als die Gleichungen [A], [B], wenn man nur die Buchstaben A, B, C, a, b, c, nach eben der Ordnung in a', b', c', A', B', C' umändert.

§ 30.

Die im vorigen § gemachten Substitutionen verwandeln demnach die Gleichungen [D] in folgende:

$$\text{Sin. A' Sin. B' Cot. a'} = \text{Cos. A' Sin. C'} - \text{Cos. b' Sin. A' Cos. C'}$$
$$\text{Sin. A' Sin. C' Cot. a'} = \text{Cos. A' Sin. B'} - \text{Cos. c' Sin. A' Cos. B'}$$

u. s. w.

und wenn man nun hierin für A', B', C', a', b', c', wieder ihre Werthe 180° — A, 180° — B, 180° — C, 180° — a, 180° — b, 180° — c setzt, so entstehen folgende sechs Gleichungen;

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Sin. A Sin. b Cot. a} = \text{Cos. A Sin. C} + \text{Cos. b Sin. A Cos. C} \\
\text{Sin. A Sin. c Cot. a} = \text{Cos. A Sin. B} + \text{Cos. c Sin. A Cos. B} \\
\text{Sin. B Sin. a Cot. b} = \text{Cos. B Sin. C} + \text{Cos. a Sin. B Cos. C} \\
\text{Sin. B Sin. c Cot. b} = \text{Cos. B Sin. A} + \text{Cos. c Cos. A Sin. B} \\
\text{Sin. C Sin. a Cot. c} = \text{Cos. C Sin. B} + \text{Cos. a Sin. C Cos. B} \\
\text{Sin. C Sin. b Cot. c} = \text{Cos. C Sin. A} + \text{Cos. b Sin. C Cos. A}
\end{array}\right\} [E]$$

Anmerk. Die fünf Klassen von Gleichungen, [A], [B], [C], [D], [E], enthalten alles, was zur Auflösung eines sphärischen Dreyeckes erfordert wird, wie in der Folge gezeigt werden soll. Zum bequemeren Gebrauche der Logarithmen wird es indessen dienlich seyn, noch einige Umänderungen in den Formen der vier letzten Klassen vorzunehmen, wodurch die in denselben vorkommenden Summen und Differenzen in Produkte und Quotienten verwandelt werden.

§ 31.

1) Die erste von den Gleichungen [B] in § 24 giebt,

$$\text{Cos. } A = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c}{\text{Sin. } b.\ \text{Sin. } c}.$$

Hieraus erhält man,

$$1 + \text{Cos. } A = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } (b + c)}{\text{Sin } b.\ \text{Sin. } c} \quad (\text{F. } 10.)\ *)$$

$$1 - \text{Cos. } A = \frac{\text{Cos. } (b - c) - \text{Cos. } a}{\text{Sin } b.\ \text{Sin. } c};$$

folglich, da $\frac{1 - \text{Cos. } A}{1 + \text{Cos. } A} = \text{Tang. } \tfrac{1}{2} A^2$ (F. 46)

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\text{Cos. } (b - c) - \text{Cos. } a}{\text{Cos. } a - \text{Cos. } (b + c)};$$

aber $\text{Cos. } \varphi - \text{Cos. } \psi = -2 \text{Sin. } \tfrac{1}{2} (\varphi + \psi) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi)$ (F. 18), folglich

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} (b - c + a) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} (b - c - a)}{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} (a + b + c) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} (a - b - c)}}.$$

2) Die erste von den Gleichungen [C] giebt,

$$\text{Cos. } a = \frac{\text{Cos. } A + \text{Cos. } B \text{ Cos. } C}{\text{Sin. } B \text{ Sin. } C};$$

woraus man erhält

$$1 + \text{Cos. } a = \frac{\text{Cos. } A + \text{Cos. } (B - C)}{\text{Sin. } B.\ \text{Sin. } C},$$

$$1 - \text{Cos. } a = -\frac{\text{Cos. } (B + C) + \text{Cos. } A}{\text{Sin. } B \text{ Sin. } C};$$

und durch ein, dem vorhergehenden ähnliches Verfahren,

---

*) Ich beziehe mich hier auf die Formeltafel im ersten Theile dieser geometrischen Sammlung.

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}a^2 = -\frac{\text{Cos.}\ (B+C) + \text{Cos.}\ A}{\text{Cos.}\ (B-C) + \text{Cos.}\ A},$$

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B+C+A)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B-C+A)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B-C-A)}}$$

3) Aus den Gleichungen [B] erhält man ferner,

$$\text{Cos.}\ a - \text{Cos.}\ b\ \text{Cos.}\ c = \text{Sin.}\ b\ \text{Sin.}\ c\ \text{Cos.}\ A,$$
$$\text{Cos.}\ b - \text{Cos.}\ a\ \text{Cos.}\ c = \text{Sin.}\ a\ \text{Sin.}\ c\ \text{Cos.}\ B.$$

Man dividire die erste dieser Gleichungen durch die zwente, und setze hierauf für $\frac{\text{Sin.}\ b}{\text{Sin.}\ a}$ seinen Werth $\frac{\text{Sin.}\ B}{\text{Sin.}\ A}$, welchen man aus der ersten der Gleichungen [A] erhält; dies giebt:

$$\frac{\text{Cos.}\ a - \text{Cos.}\ b\ \text{Cos.}\ c}{\text{Cos.}\ b - \text{Cos.}\ a\ \text{Cos.}\ c} = \frac{\text{Sin.}\ B\ \text{Cos.}\ A}{\text{Sin.}\ A\ \text{Cos.}\ B}.$$

Man setze auf beyden Seiten 1 hinzu; hierdurch entstehet die Gleichung:

$$1 + \frac{\text{Cos.}\ a - \text{Cos.}\ b\ \text{Cos.}\ c}{\text{Cos.}\ b - \text{Cos.}\ a\ \text{Cos.}\ c} = 1 + \frac{\text{Sin.}\ B\ \text{Cos.}\ A}{\text{Sin.}\ A\ \text{Cos.}\ B},$$

oder

$$\frac{(\text{Cos.}\ a + \text{Cos.}\ b)(1 - \text{Cos.}\ c)}{\text{Cos.}\ b - \text{Cos.}\ a\ \text{Cos.}\ c} = \frac{\text{Sin.}\ (A+B)}{\text{Sin.}\ A\ \text{Cos.}\ B}.$$

Ziehet man 1 ab, anstatt zu addiren, so erhält man:

$$\frac{\text{Cos.}\ a - \text{Cos.}\ b\ \text{Cos.}\ c}{\text{Cos.}\ b - \text{Cos.}\ a\ \text{Cos.}\ c} - 1 = \frac{\text{Sin.}\ B\ \text{Cos.}\ A}{\text{Sin.}\ A\ \text{Cos.}\ B} - 1,$$

oder

$$\frac{(\text{Cos.}\ a - \text{Cos.}\ b)(1 + \text{Cos.}\ c)}{\text{Cos.}\ b - \text{Cos.}\ a\ \text{Cos.}\ c} = \frac{\text{Sin.}\ (B-A)}{\text{Sin.}\ A\ \text{Cos.}\ B}.$$

Diese Gleichung durch die vorige dividirt, giebt, wenn man $\text{Cot.}\ \tfrac{1}{2}c^2$ für $\frac{1 + \text{Cos.}\ c}{1 - \text{Cos.}\ c}$ setzt:

$$\frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b}}{\text{Cos. a} + \text{Cos. b}} \text{Cot.} \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{\text{Sin. } (B - A)}{\text{Sin. } (B + A)}.$$

Vermittelst der Formeln

$$\frac{\text{Cos. } \varphi - \text{Cos. } \psi}{\text{Cos. } \varphi + \text{Cos. } \psi} = \text{Tang.} \tfrac{1}{2} (\varphi + \psi) \text{ Tang.} \tfrac{1}{2} (\psi - \varphi) \text{ (§. 41)}$$

Sin. φ = 2 Sin. $\frac{1}{2}\varphi$ Cos. $\frac{1}{2}\varphi$ (§. 25) verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (b - a) \text{ Tang. } \tfrac{1}{2} (b + a) \text{ Cot. } \tfrac{1}{2} c^2$$
$$= \frac{\text{Sin. } (B - A)}{\text{Sin. } (B + A)} = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} (B - A) \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} (B - A)}{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} (B + A) \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} (B + A)}.$$

Wenn man auf beyden Seiten der Gleichung

$$\frac{\text{Sin. b}}{\text{Sin. a}} = \frac{\text{Sin. B}}{\text{Sin. A}}$$

sowohl 1 addirt als subtrahirt, und dann beyde Resultate durch einander dividirt, so erhält man:

$$\frac{\text{Sin. b} - \text{Sin. a}}{\text{Sin. b} + \text{Sin. a}} = \frac{\text{Sin. B} - \text{Sin. A}}{\text{Sin. B} + \text{Sin. A}},$$

welche sich in folgende verwandelt (§. 36):

$$\text{Tang.} \tfrac{1}{2} (b - a) \text{ Cot.} \tfrac{1}{2} (b + a) = \frac{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} (B - A) \text{ Cos.} \tfrac{1}{2} (B + A)}{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} (B + A) \text{ Cos.} \tfrac{1}{2} (B - A)}.$$

Man verbinde diese Gleichung mit der vorigen, indem man erst das, was sich auf derselben Seite des Gleichheitszeichens befindet, mit einander multiplicirt; hierdurch erhält man, wenn Tang. $\frac{1}{2}$ (b + a) Cot. $\frac{1}{2}$ (b + a) = 1 (§. 6) gesetzt wird:

$$[\text{Tang.} \tfrac{1}{2} (b - a)^2] \text{ Cot.} \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{[\text{Sin.} \tfrac{1}{2} (B - A)]^2}{[\text{Sin.} \tfrac{1}{2} (B + A)]^2},$$

und wenn auf beyden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen wird,

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (b - a) \text{ Cot.} \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} (B - A)}{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} (B + A)}.$$

Man dividire nun auch die erste Gleichung durch die zweyte; dies giebt

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b+a)\,\text{Cot.}\tfrac{1}{2}c = \frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B+A)}.$$

Die Division der beyden eben gefundenen Gleichungen durch Cot. $\tfrac{1}{2}$c giebt endlich, wenn Tang. $\tfrac{1}{2}$c für $\frac{1}{\text{Cot.}\tfrac{1}{2}c}$ gesetzt wird:

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b-a) = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(B+A)},$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b+a) = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B+A)}.$$

4) Aus den Gleichungen [C] bekommt man

$$\text{Cos.}A + \text{Cos.}B\,\text{Cos.}C = \text{Sin.}B\,\text{Sin.}C\,\text{Cos.}a$$

$$\text{Cos.}B + \text{Cos.}A\,\text{Cos.}C = \text{Sin.}A\,\text{Sin.}C\,\text{Cos.}b$$

Die Division der ersten durch die zwente Gleichung giebt,

$$\frac{\text{Cos.}A + \text{Cos.}B\,\text{Cos.}C}{\text{Cos.}B + \text{Cos.}A\,\text{Cos.}C} = \frac{\text{Sin.}B\,\text{Cos.}a}{\text{Sin.}A\,\text{Cos.}b} = \frac{\text{Sin.}b\,\text{Cos.}a}{\text{Sin.}a\,\text{Cos.}b}.$$

Durch die successive Addition und Subtraktion der Einheit findet man wie in 3

$$\frac{(\text{Cos.}A + \text{Cos.}B)(1 + \text{Cos.}C)}{\text{Cos.}B + \text{Cos.}A\,\text{Cos.}C} = \frac{\text{Sin.}(b+a)}{\text{Sin.}a\,\text{Cos.}b},$$

$$\frac{(\text{Cos.}A - \text{Cos.}B)(1 - \text{Cos.}C)}{\text{Cos.}B + \text{Cos.}A\,\text{Cos.}C} = \frac{\text{Sin.}(b-a)}{\text{Sin.}a\,\text{Cos.}b},$$

und durch Division der zweyten Gleichung durch die erste,

$$\frac{\text{Cos.}A - \text{Cos.}B}{\text{Cos.}A + \text{Cos.}B}\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\text{Sin.}(b-a)}{\text{Sin.}(b+a)},$$

oder

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(B-A)\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(B+A)\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}C^2$$

$$= \frac{\text{Sin.}(b-a)}{\text{Sin.}(b+a)} = \frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b-a)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-a)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+a)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+a)}.$$

Aus der schon in 3 gebrauchten Gleichung

$$\frac{\text{Sin. } b - \text{Sin. } a}{\text{Sin. } b + \text{Sin. } a} = \frac{\text{Sin. } B - \text{Sin. } A}{\text{Sin. } B + \text{Sin. } A}$$

leitet man auf eine ähnliche Art wie dort die folgende her:

$$\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(b-a) \text{ Cos. } \frac{1}{2}(b+a)}{\text{Sin. } \frac{1}{2}(b+a) \text{ Cos. } \frac{1}{2}(b-a)} = \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(B-A) \text{ Cot. } \tfrac{1}{2}(B+A).$$

Die Multiplikation und Division der unmittelbar vorhergehenden Gleichung durch diese, giebt, nach der Ausziehung der Quadratwurzel, folgende zwey:

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(B-A) = \text{Cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(b-a)}{\text{Sin. } \frac{1}{2}(b+a)},$$

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(B+A) = \text{Cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{Cos. } \frac{1}{2}(b-a)}{\text{Cos. } \frac{1}{2}(b+a)}.$$

5) Aus 1 und 2 lassen sich auch noch, wenn für $1 + \text{Cos. } A$, $1 - \text{Cos. } A$, $1 + \text{Cos. } a$, $1 - \text{Cos. } a$, ihre Werthe $2 \text{ Cos. } \frac{1}{2} A^2$, $2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} A^2$, $2 \text{ Cos. } \frac{1}{2} a^2$, $2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} a^2$, (§. 7 und 8) gesetzt werden folgende Gleichungen herleiten:

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{-\text{Sin. } \frac{1}{2}(b-c+a) \text{ Sin. } \frac{1}{2}(b-c-a)}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c}},$$

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{-\text{Sin. } \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ Sin. } \frac{1}{2}(a-b-c)}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c}},$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\text{Cos. } \frac{1}{2}(B+C+A) \text{ Cos. } \frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin. } B \text{ Sin. } C}},$$

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{Cos. } \frac{1}{2}(A+B-C) \text{ Cos. } \frac{1}{2}(A-B+C)}{\text{Sin. } B \text{ Sin. } C}}.$$

Anmerk. Auch aus diesen Gleichungen lassen sich eine Menge andere durch Vertauschung der Buchstaben herleiten. Der leichtern Uebersicht wegen, und um sie in der Folge be-

quemer anführen zu können, will ich nun alle bisher gefundenen zusammen stellen.

§ 32.

I. Sin. a Sin. B = Sin. b Sin. A. (§ 24.)
II. Sin. a Sin. C = Sin. c Sin. A.
III. Sin. b Sin. C = Sin. c Sin. B.

IV. Cos. a = Cos. b Cos. c + Cos. A Sin. b Sin. c. (§ 24.)
V. Cos. b = Cos. a Cos. c + Cos. B Sin. a Sin. c.
VI. Cos. c = Cos. a Cos. b + Cos. C Sin. a Sin. b.

VII. Cos. A = — Cos. B Cos. C + Cos. a Sin. B Sin. C. (§ 26.)
VIII. Cos. B = — Cos. A Cos. C + Cos. b Sin. A Sin. C.
IX. Cos. C = — Cos. A Cos. B + Cos. c Sin. A Sin. B.

(§ 28.)
X. Sin. a Sin. B Cot. A = Cos. a Sin. c — Cos. B Sin. a Cos. c.
XI. Sin. a Sin. C Cot. A = Cos. a Sin. b — Cos. C Sin. a Cos. b.
XII. Sin. b Sin. A Cot. B = Cos. b Sin. c — Cos. A Sin. b Cos. c.
XIII. Sin. b Sin. C Cot. B = Cos. b Sin. a — Cos. C Sin. b Cos. a.
XIV. Sin. c Sin. A Cot. C = Cos. c Sin. b — Cos. A Sin. c Cos. b.
XV. Sin. c Sin. B Cot. C = Cos. c Sin. a — Cos. B Sin. c Cos. a.

(§ 30.)
XVI. Sin. A Sin. b Cot. a = Cos. A Sin. C + Cos. b Sin. A Cos. C.
XVII. Sin. A Sin. c Cot. a = Cos. A Sin. B + Cos. c Sin. A Cos. B.
XVIII. Sin. B Sin. a Cot. b = Cos. B Sin. C + Cos. a Sin. B Cos. C.
XIX. Sin. B Sin. c Cot. b = Sin. A Cos. B + Cos. c Sin. B Cos. A.
XX. Sin. C Sin. a Cot. c = Cos. C Sin. B + Cos. c Sin. C Cos. B.
XXI. Sin. C Sin. b Cot. c = Cos. C Sin. A + Cos. b Sin. C Cos. A.

XXII

(§ 31.)

XXII. $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b-c)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin. } b\ \text{Sin. } c}}$ *).

XXIII. $\text{Cos.}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin. } b\ \text{Sin. } c}}$.

XXIV. $\text{Tang.}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b-c)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b+c-a)}}$.

XXV. $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b+c-a)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{Sin. } a\ \text{Sin. } c}}$.

XXVI. $\text{Cos.}\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin. } a\ \text{Sin. } c}}$.

XXVII. $\text{Tang.}\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b+c-a)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+c-b)}}$.

XXVIII. $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+c-b)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin. } a\ \text{Sin. } b}}$.

XXIX. $\text{Cos.}\,\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{Sin. } a\ \text{Sin. } b}}$.

XXX. $\text{Tang.}\,\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+c-b)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b-c)}}$.

XXXI. $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin. } B\ \text{Sin. } C}}$.

XXXII. $\text{Cos.}\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin. } B\ \text{Sin. } C}}$.

---

*) Wenn man nämlich Sin. $\frac{1}{2}(a+c-b)$ anstatt $-$ Sin. $\frac{1}{2}(b-c-a)$, und eben so Sin. $\frac{1}{2}(b+c-a)$ anstatt $-$ Sin. $\frac{1}{2}(a-b-c)$ setzt. Auch ist Cos. $\frac{1}{2}(B-C-A) =$ Cos. $\frac{1}{2}(A+C-B)$.

$$\text{XXXIII. Tang.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}}.$$

$$\text{XXXIV. Sin.}\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin. }A\ \text{Sin. }C}}.$$

$$\text{XXXV. Cos.}\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin. }A\ \text{Sin. }C}}.$$

$$\text{XXXVI. Tang.}\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}}.$$

$$\text{XXXVII. Sin.}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\text{Sin. }A\ \text{Sin. }B}}.$$

$$\text{XXXVIII. Cos.}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+C-B)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin. }A\ \text{Sin. }B}}.$$

$$\text{XXXIX. Tang.}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+C-B)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}}.$$

$$\text{XL. Tang.}\frac{b-a}{2} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(B+A)}.$$

$$\text{XLI. Tang.}\frac{b+a}{2} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B+A)}.$$

$$\text{XLII. Tang.}\frac{c-b}{2} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\,\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(C-B)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(C+B)}.$$

$$\text{XLIII. Tang.}\frac{c+b}{2} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\,\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(C-B)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(C+B)}.$$

$$\text{XLIV. Tang.}\frac{a-c}{2} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}b\,\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A-C)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A+C)}.$$

$$\text{XLV. Tang.}\frac{a+c}{2} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}b\,\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-C)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+C)}.$$

XLVI. $\text{Tang.}\,\frac{B-A}{2} = \text{Cot.}\,\frac{1}{2}C\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b-a)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b+a)}$.

XLVII. $\text{Tang.}\,\frac{B+A}{2} = \text{Cot.}\,\frac{1}{2}C\,\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(b-a)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(b+a)}$.

XLVIII. $\text{Tang.}\,\frac{C-B}{2} = \text{Cot.}\,\frac{1}{2}A\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(c+b)}$.

XLIX. $\text{Tang.}\,\frac{C+B}{2} = \text{Cot.}\,\frac{1}{2}A\,\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c+b)}$.

L. $\text{Tang.}\,\frac{A-C}{2} = \text{Cot.}\,\frac{1}{2}B\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a-c)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+c)}$.

LI. $\text{Tang.}\,\frac{A+C}{2} = \text{Cot.}\,\frac{1}{2}B\,\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(a-c)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(a+c)}$.

§ 35.

Wenn man in den Gleichungen des vorigen §'s einen der Winkel, etwa C, $= 90°$ setzt, so erhält man eben so viele Gleichungen für das rechtwinkelige sphärische Dreyeck, wovon ich nur folgende hersetzen will:

I.	$\text{Sin.}\,a = \text{Sin.}\,c\ \text{Sin.}\,A.$	(Aus II.)
II.	$\text{Sin.}\,b = \text{Sin.}\,c\ \text{Sin.}\,B.$	(Aus III.)
III.	$\text{Cos.}\,c = \text{Cos.}\,a\ \text{Cos.}\,b.$	(Aus VI.)
IV.	$\text{Cos.}\,A = \text{Cos.}\,a\ \text{Sin.}\,B.$	(Aus VII.)
V.	$\text{Cos.}\,B = \text{Cos.}\,b\ \text{Sin.}\,A.$	(Aus VIII.)
VI.	$\text{Cos.}\,c = \text{Cot.}\,A\ \text{Cot.}\,B.$	(Aus IX.)
VII.	$\text{Sin.}\,b = \text{Tang.}\,a\ \text{Cot.}\,A.$	(Aus XI.)
VIII.	$\text{Sin.}\,a = \text{Tang.}\,b\ \text{Cot.}\,B.$	(Aus XIII.)
IX.	$\text{Cos.}\,A = \text{Tang.}\,b\ \text{Cot.}\,c.$	(Aus XIV.)
X.	$\text{Cos.}\,B = \text{Tang.}\,a\ \text{Cot.}\,c.$	(Aus XV.)

XI. $\text{Cot. A} = \text{Sin. b Cot. a.}$ (Aus XVI.)
XII. $\text{Cot. B} = \text{Sin. a Cot. b.}$ (Aus XVIII.)
XIII. $\text{Sin. a} = \text{Sin. c Cos. B.}$ (Aus XX.)

III. Anwendung der vorhergehenden Formeln auf die sphärische Trigonometrie.

§ 34.

Aufg. Die drey Seiten (a, b, c) eines sphärischen Dreyeckes sind gegeben: man soll einen seiner Winkel (A) finden.

Aufl. Hierzu dienen die Formeln

1) $\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b Cos. c}}{\text{Sin. b Sin. c}}$. (§ 32 IV.)

2) $\text{Sin.} \frac{1}{2} \text{A} = \sqrt{\frac{\text{Sin.} \frac{1}{2}(a+b-c)\,\text{Sin.} \frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin. b Sin. c}}}$.

Die erste dieser beyden Formeln kann in manchen Fällen ihren Nutzen haben; die zweyte ist zur Rechnung bequemer.

Erstes Beysp. Für $a = 51^\circ 41' 14''$, $b = 70^\circ 20' 50''$, $c = 38^\circ 28' 0''$, findet man $\frac{1}{2} A = 26^\circ 15' 0''$, und daher $A = 52^\circ 30' 0''$.

Zweyt. Beysp. Für $a = 51^\circ 2' 0''$, $b = 73^\circ 58' 54''$, $c = 38^\circ 45' 0''$, findet man $A = 46^\circ 33' 41''$.

Dritt. Beysp. Für $a = 69^\circ 50' 0''$, $b = 109^\circ 39' 10''$, $c = 46^\circ 42' 0''$, findet man $A = 32^\circ 54' 28''$.

§ 35.

Aufg. Zwey Seiten (b, c) eines Dreyeckes und der

von denselben eingeschlossene Winkel (A) sind gegeben: man soll die beyden anderen Winkel (B, C) finden.

Aufl. Hierzu dienen die Formeln,

$$\text{Tang.}\,\frac{C-B}{2} = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}A\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(c+b)}.\quad (\S\ 32.\ \text{XLVIII.})$$

$$\text{Tang.}\,\frac{C+B}{2} = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}A\,\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c+b)}.\quad (\S\ 32.\ \text{XLIX.})$$

Man erhält nämlich aus der ersten Gleichung den Winkel $\frac{C-B}{2}$, und aus der zweyten den Winkel $\frac{C+B}{2}$, woraus alsdann ferner B und C gefunden werden.

Erst. Beysp. Für $b = 70^\circ\ 20'\ 50''$, $c = 38^\circ\ 28'\ 0''$, $A = 52^\circ\ 30'\ 0''$, ist $\frac{1}{2}(c-b) = -15^\circ\ 56'\ 25''$, $\frac{1}{2}(c+b) = 54^\circ\ 24'\ 25''$; daher $\frac{1}{2}(C-B) = -34^\circ\ 24'\ 20''$, $\frac{1}{2}(C+B) = 73^\circ\ 22'\ 47''$; woraus man $C = 38^\circ\ 58'\ 27''$, $B = 107^\circ\ 47'\ 7''$ erhält.

Zweyt. Beysp. Für $b = 73^\circ\ 58'\ 54''$, $c = 38^\circ\ 45'\ 0''$, $A = 46^\circ\ 33'\ 41''$, ist $\frac{1}{2}(c-b) = -17^\circ\ 36'\ 57''$, $\frac{1}{2}(c+b) = 56^\circ\ 21'\ 57''$; daher $\frac{1}{2}(C-B) = -40^\circ\ 11'\ 26''$, $\frac{1}{2}(C+B) = 75^\circ\ 57'\ 41''$; woraus man $C = 35^\circ\ 46'\ 15''$, $B = 115^\circ\ 9'\ 7''$ erhält.

Dritt. Beysp. Für $b = 109^\circ\ 39'\ 10''$, $c = 46^\circ\ 42'\ 0''$, $A = 32^\circ\ 54'\ 28''$, ist $\frac{1}{2}(c-b) = -31^\circ\ 28'\ 35''$, $\frac{1}{2}(c+b) = 78^\circ\ 10'\ 35''$; daher $\frac{1}{2}(C-B) = -61^\circ\ 1'\ 41'',5$, $\frac{1}{2}(C+B) = 85^\circ\ 56'\ 28''$; folglich $C = 24^\circ\ 54'\ 47''$, $B = 146^\circ\ 58'\ 9''$.

§ 36.

Aufg. Die drey Winkel (A, B, C) eines sphärischen Dreyecks sind gegeben: man soll eine seiner Seiten (a) finden.

Aufl. Man hat,

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2} a^2 = - \frac{\text{Cos.}\,(B + C) + \text{Cos.}\,A}{\text{Cos.}\,(B - C) + \text{Cos.}\,A},$$

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B + C + A)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B + C - A)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B - C + A)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B - C - A)}}$$

3) Aus den Gleichungen [B] erhält man ferner,

$$\text{Cos.}\,a - \text{Cos.}\,b\ \text{Cos.}\,c = \text{Sin.}\,b\ \text{Sin.}\,c\ \text{Cos.}\,A$$
$$\text{Cos.}\,b - \text{Cos.}\,a\ \text{Cos.}\,c = \text{Sin.}\,a\ \text{Sin.}\,c\ \text{Cos.}\,B.$$

Man dividire die erste dieser Gleichungen durch die zweyte, und setze hierauf für $\frac{\text{Sin.}\,b}{\text{Sin.}\,a}$ seinen Werth $\frac{\text{Sin.}\,B}{\text{Sin.}\,A}$, welchen man aus der ersten der Gleichungen [A] erhält; dies giebt:

$$\frac{\text{Cos.}\,a - \text{Cos.}\,b\ \text{Cos.}\,c}{\text{Cos.}\,b - \text{Cos.}\,a\ \text{Cos.}\,c} = \frac{\text{Sin.}\,B\ \text{Cos.}\,A}{\text{Sin.}\,A\ \text{Cos.}\,B}.$$

Man setze auf beyden Seiten 1 hinzu; hierdurch entstehet die Gleichung:

$$1 + \frac{\text{Cos.}\,a - \text{Cos.}\,b\ \text{Cos.}\,c}{\text{Cos.}\,b - \text{Cos.}\,a\ \text{Cos.}\,c} = 1 + \frac{\text{Sin.}\,B\ \text{Cos.}\,A}{\text{Sin.}\,A\ \text{Cos.}\,B},$$

oder

$$\frac{(\text{Cos.}\,a + \text{Cos.}\,b)(1 - \text{Cos.}\,c)}{\text{Cos.}\,b - \text{Cos.}\,a\ \text{Cos.}\,c} = \frac{\text{Sin.}\,(A + B)}{\text{Sin.}\,A\ \text{Cos.}\,B}.$$

Ziehet man 1 ab, anstatt zu addiren, so erhält man:

$$\frac{\text{Cos.}\,a - \text{Cos.}\,b\ \text{Cos.}\,c}{\text{Cos.}\,b - \text{Cos.}\,a\ \text{Cos.}\,c} - 1 = \frac{\text{Sin.}\,B\ \text{Cos.}\,A}{\text{Sin.}\,A\ \text{Cos.}\,B} - 1,$$

oder

$$\frac{(\text{Cos.}\,a - \text{Cos.}\,b)(1 + \text{Cos.}\,c)}{\text{Cos.}\,b - \text{Cos.}\,a\ \text{Cos.}\,c} = \frac{\text{Sin.}\,(B - A)}{\text{Sin.}\,A\ \text{Cos.}\,B}.$$

Diese Gleichung durch die vorige dividirt, giebt, wenn man $\text{Cot.}\ \tfrac{1}{2} c^2$ für $\frac{1 + \text{Cos.}\,c}{1 - \text{Cos.}\,c}$ setzt:

$$\frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b}}{\text{Cos. a} + \text{Cos. b}} \text{Cot.} \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{\text{Sin. } (B - A)}{\text{Sin. } (B + A)}.$$

Vermittelst der Formeln

$$\frac{\text{Cos. } \varphi - \text{Cos. } \psi}{\text{Cos. } \varphi + \text{Cos. } \psi} = \text{Tang.} \tfrac{1}{2} (\varphi + \psi) \text{ Tang.} \tfrac{1}{2} (\psi - \varphi) \text{ (§. 41)}$$

$\text{Sin. } \varphi = 2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} \varphi \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} \varphi$ (§. 25) verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (b - a) \text{ Tang. } \tfrac{1}{2} (b + a) \text{ Cot. } \tfrac{1}{2} c^2$$
$$= \frac{\text{Sin. } (B - A)}{\text{Sin. } (B + A)} = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} (B - A) \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} (B - A)}{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} (B + A) \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} (B + A)}.$$

Wenn man auf beyden Seiten der Gleichung

$$\frac{\text{Sin. b}}{\text{Sin. a}} = \frac{\text{Sin. B}}{\text{Sin. A}}$$

sowohl 1 addirt als subtrahirt, und dann beyde Resultate durch einander dividirt, so erhält man:

$$\frac{\text{Sin. b} - \text{Sin. a}}{\text{Sin. b} + \text{Sin. a}} = \frac{\text{Sin. B} - \text{Sin. A}}{\text{Sin. B} + \text{Sin. A}},$$

welche sich in folgende verwandelt (§. 36):

$$\text{Tang.} \tfrac{1}{2} (b - a) \text{ Cot.} \tfrac{1}{2} (b + a) = \frac{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} (B - A) \text{ Cos.} \tfrac{1}{2} (B + A)}{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} (B + A) \text{ Cos.} \tfrac{1}{2} (B - A)}.$$

Man verbinde diese Gleichung mit der vorigen, indem man erst das, was sich auf derselben Seite des Gleichheitszeichens befindet, mit einander multiplicirt; hierdurch erhält man, wenn $\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (b + a) \text{ Cot. } \tfrac{1}{2} (b + a) = 1$ (§. 6) gesetzt wird:

$$[\text{Tang.} \tfrac{1}{2} (b - a)^2] \text{ Cot.} \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{[\text{Sin.} \tfrac{1}{2} (B - A)]^2}{[\text{Sin.} \tfrac{1}{2} (B + A)]^2},$$

und wenn auf beyden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen wird,

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (b - a) \text{ Cot.} \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} (B - A)}{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} (B + A)}.$$

Man dividire nun auch die erste Gleichung durch die zweyte; dies giebt

$$\text{Tang.} \tfrac{1}{2}(b+a) \text{ Cot.} \tfrac{1}{2}c = \frac{\text{Cos.} \tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{Cos.} \tfrac{1}{2}(B+A)}.$$

Die Division der beyden eben gefundenen Gleichungen durch Cot. $\tfrac{1}{2}$ c giebt endlich, wenn Tang. $\tfrac{1}{2}$c für $\frac{1}{\text{Cot.} \tfrac{1}{2} c}$ gesetzt wird:

$$\text{Tang.} \tfrac{1}{2}(b-a) = \text{Tang.} \tfrac{1}{2}c \frac{\text{Sin.} \tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{Sin.} \tfrac{1}{2}(B+A)},$$

$$\text{Tang.} \tfrac{1}{2}(b+a) = \text{Tang.} \tfrac{1}{2}c \frac{\text{Cos.} \tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{Cos.} \tfrac{1}{2}(B+A)}.$$

4) Aus den Gleichungen [C] bekommt man

$$\text{Cos. } A + \text{Cos. } B \text{ Cos. } C = \text{Sin. } B \text{ Sin. } C \text{ Cos. } a$$

$$\text{Cos. } B + \text{Cos. } A \text{ Cos. } C = \text{Sin. } A \text{ Sin. } C \text{ Cos. } b.$$

Die Division der ersten durch die zweyte Gleichung giebt,

$$\frac{\text{Cos. } A + \text{Cos. } B \text{ Cos. } C}{\text{Cos. } B + \text{Cos. } A \text{ Cos. } C} = \frac{\text{Sin. } B \text{ Cos. } a}{\text{Sin. } A \text{ Cos. } b} = \frac{\text{Sin. } b \text{ Cos. } a}{\text{Sin. } a \text{ Cos. } b}.$$

Durch die successive Addition und Subtraktion der Einheit findet man wie in 3

$$\frac{(\text{Cos. } A + \text{Cos. } B)(1 + \text{Cos. } C)}{\text{Cos. } B + \text{Cos. } A \text{ Cos. } C} = \frac{\text{Sin. } (b+a)}{\text{Sin. } a \text{ Cos. } b},$$

$$\frac{(\text{Cos. } A - \text{Cos. } B)(1 - \text{Cos. } C)}{\text{Cos. } B + \text{Cos. } A \text{ Cos. } C} = \frac{\text{Sin. } (b-a)}{\text{Sin. } a \text{ Cos. } b},$$

und durch Division der zweyten Gleichung durch die erste,

$$\frac{\text{Cos. } A - \text{Cos. } B}{\text{Cos. } A + \text{Cos. } B} \text{Tang.} \tfrac{1}{2} C^2 = \frac{\text{Sin. } (b-a)}{\text{Sin. } (b+a)},$$

oder

$$\text{Tang.} \tfrac{1}{2}(B-A) \text{ Tang.} \tfrac{1}{2}(B+A) \text{ Tang.} \tfrac{1}{2} C^2$$

$$= \frac{\text{Sin. } (b-a)}{\text{Sin. } (b+a)} = \frac{\text{Sin.} \tfrac{1}{2}(b-a) \text{ Cos.} \tfrac{1}{2}(b-a)}{\text{Sin.} \tfrac{1}{2}(b+a) \text{ Cos.} \tfrac{1}{2}(b+a)}.$$

Aus der schon in 3 gebrauchten Gleichung

$$\frac{\text{Sin. } b - \text{Sin. } a}{\text{Sin. } b + \text{Sin. } a} = \frac{\text{Sin. } B - \text{Sin. } A}{\text{Sin. } B + \text{Sin. } A}$$

leitet man auf eine ähnliche Art wie dort die folgende her:

$$\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b-a)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(b+a)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b+a)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(b-a)} = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(B-A)\,\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}(B+A).$$

Die Multiplikation und Division der unmittelbar vorhergehenden Gleichung durch diese, giebt, nach der Ausziehung der Quadratwurzel, folgende zwey:

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(B-A) = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\,C\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(b-a)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(b+a)},$$

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(B+A) = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\,C\,\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\,(b-a)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\,(b+a)}.$$

5) Aus 1 und 2 lassen sich auch noch, wenn für $1 + \text{Cos.}\,A$, $1 - \text{Cos.}\,A$, $1 + \text{Cos.}\,a$, $1 - \text{Cos.}\,a$, ihre Werthe $2\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\,A^2$, $2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,A^2$, $2\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\,a^2$, $2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,a^2$, (§. 7 und 8) gesetzt werden folgende Gleichungen herleiten:

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{-\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b-c+a)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b-c-a)}{\text{Sin. } b\ \text{Sin. } c}},$$

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{-\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a-b-c)}{\text{Sin. } b\ \text{Sin. } c}},$$

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+C+A)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin. } B\ \text{Sin. } C}},$$

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A-B+C)}{\text{Sin. } B\ \text{Sin. } C}}.$$

Anmerk. Auch aus diesen Gleichungen lassen sich eine Menge andere durch Vertauschung der Buchstaben herleiten. Der leichtern Uebersicht wegen, und um sie in der Folge be-

quemer anführen zu können, will ich nun alle bisher gefunde-
nen zusammen stellen.

§ 32.

I. Sin. a Sin. B = Sin. b Sin. A. (§ 24.)
II. Sin. a Sin. C = Sin. c Sin. A.
III. Sin. b Sin. C = Sin. c Sin. B.

IV. Cos. a = Cos. b Cos. c + Cos. A Sin. b Sin. c. (§ 24.)
V. Cos. b = Cos. a Cos. c + Cos. B Sin. a Sin. c.
VI. Cos. c = Cos. a Cos. b + Cos. C Sin. a Sin. b.

VII. Cos. A = — Cos. B Cos. C + Cos. a Sin. B Sin. C. (§ 26.)
VIII. Cos. B = — Cos. A Cos. C + Cos. b Sin. A Sin. C.
IX. Cos. C = — Cos. A Cos. B + Cos. c Sin. A Sin. B.

(§ 28.)

X. Sin. a Sin. B Cot. A = Cos. a Sin. c — Cos. B Sin. a Cos. c.
XI. Sin. a Sin. C Cot. A = Cos. a Sin. b — Cos. C Sin. a Cos. b.
XII. Sin. b Sin. A Cot. B = Cos. b Sin. c — Cos. A Sin. b Cos. c.
XIII. Sin. b Sin. C Cot. B = Cos. b Sin. a — Cos. C Sin. b Cos. a.
XIV. Sin. c Sin. A Cot. C = Cos. c Sin. b — Cos. A Sin. c Cos. b.
XV. Sin. c Sin. B Cot. C = Cos. c Sin. a — Cos. B Sin. c Cos. a.

(§ 30.)

XVI. Sin. A Sin. b Cot. a = Cos. A Sin. C + Cos. b Sin. A Cos. C.
XVII. Sin. A Sin. c Cot. a = Cos. A Sin. B + Cos. c Sin. A Cos. B.
XVIII. Sin. B Sin. a Cot. b = Cos. B Sin. C + Cos. a Sin. B Cos. C.
XIX. Sin. B Sin. c Cot. b = Sin. A Cos. B + Cos. c Sin. B Cos. A.
XX. Sin. C Sin. a Cot. c = Cos. C Sin. B + Cos. c Sin. C Cos. B.
XXI. Sin. C Sin. b Cot. c = Cos. C Sin. A + Cos. b Sin. C Cos. A.

XXII

XXII. $$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin. } b\ \text{Sin. } c}}\ ^{*}).$$

XXIII. $$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin. } b\ \text{Sin. } c}}.$$

XXIV. $$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}}.$$

XXV. $$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\text{Sin. } a\ \text{Sin. } c}}.$$

XXVI. $$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin. } a\ \text{Sin. } c}}.$$

XXVII. $$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}}.$$

XXVIII. $$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin. } a\ \text{Sin. } b}}.$$

XXIX. $$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\text{Sin. } a\ \text{Sin. } b}}.$$

XXX. $$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}}.$$

XXXI. $$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin. } B\ \text{Sin. } C}}.$$

XXXII. $$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin. } B\ \text{Sin. } C}}.$$

---

*) Wenn man nämlich Sin. $\tfrac{1}{2}(a+c-b)$ anstatt $-$Sin. $\tfrac{1}{2}(b-c-a)$, und eben so Sin. $\tfrac{1}{2}(b+c-a)$ anstatt $-$Sin. $\tfrac{1}{2}(a-b-c)$ setzt. Auch ist Cos. $\tfrac{1}{2}(B-C-A) =$ Cos. $\tfrac{1}{2}(A+C-B)$.

XXXIII. $\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{-\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+C-B)}}.$

XXXIV. $\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\dfrac{-\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin. } A \text{ Sin. } C}}.$

XXXV. $\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\dfrac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin. } A \text{ Sin. } C}}.$

XXXVI. $\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\dfrac{-\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}}.$

XXXVII. $\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\dfrac{-\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B-C)}{\text{Sin. } A \text{ Sin. } B}}.$

XXXVIII. $\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\dfrac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+C-B)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin. } A \text{ Sin. } B}}.$

XXXIX. $\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\dfrac{-\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B-C)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+C-B)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}}.$

XL. $\text{Tang.}\,\dfrac{b-a}{2} = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}c\,\dfrac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(B-A)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(B+A)}.$

XLI. $\text{Tang.}\,\dfrac{b+a}{2} = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}c\,\dfrac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B-A)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(B+A)}.$

XLII. $\text{Tang.}\,\dfrac{c-b}{2} = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}a\,\dfrac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(C-B)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(C+B)}.$

XLIII. $\text{Tang.}\,\dfrac{c+b}{2} = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}a\,\dfrac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(C-B)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(C+B)}.$

XLIV. $\text{Tang.}\,\dfrac{a-c}{2} = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}b\,\dfrac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(A-C)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(A+C)}.$

XLV. $\text{Tang.}\,\dfrac{a+c}{2} = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}b\,\dfrac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A-C)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+C)}.$

XLVI. $\text{Tang.}\,\frac{B-A}{2} = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}C\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b-a)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(b+a)}.$

XLVII. $\text{Tang.}\,\frac{B+A}{2} = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}C\,\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(b-a)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(b+a)}.$

XLVIII. $\text{Tang.}\,\frac{C-B}{2} = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}A\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(c+b)}.$

XLIX. $\text{Tang.}\,\frac{C+B}{2} = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}A\,\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c+b)}.$

L. $\text{Tang.}\,\frac{A-C}{2} = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}B\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a-c)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+c)}.$

LI. $\text{Tang.}\,\frac{A+C}{2} = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}B\,\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(a-c)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(a+c)}.$

§ 35.

Wenn man in den Gleichungen des vorigen §'s einen der Winkel, etwa C, = 90° setzt, so erhält man eben so viele Gleichungen für das rechtwinkelige sphärische Dreyeck, wovon ich nur folgende hersetzen will:

I. $\text{Sin.}\,a = \text{Sin.}\,c\ \text{Sin.}\,A.$ (Aus II.)

II. $\text{Sin.}\,b = \text{Sin.}\,c\ \text{Sin.}\,B.$ (Aus III.)

III. $\text{Cos.}\,c = \text{Cos.}\,a\ \text{Cos.}\,b.$ (Aus VI.)

IV. $\text{Cos.}\,A = \text{Cos.}\,a\ \text{Sin.}\,B.$ (Aus VII.)

V. $\text{Cos.}\,B = \text{Cos.}\,b\ \text{Sin.}\,A.$ (Aus VIII.)

VI. $\text{Cos.}\,c = \text{Cot.}\,A\ \text{Cot.}\,B.$ (Aus IX.)

VII. $\text{Sin.}\,b = \text{Tang.}\,a\ \text{Cot.}\,A.$ (Aus XI.)

VIII. $\text{Sin.}\,a = \text{Tang.}\,b\ \text{Cot.}\,B.$ (Aus XIII.)

IX. $\text{Cos.}\,A = \text{Tang.}\,b\ \text{Cot.}\,c.$ (Aus XIV.)

X. $\text{Cos.}\,B = \text{Tang.}\,a\ \text{Cot.}\,c.$ (Aus XV.)

XI. $\text{Cot. } A = \text{Sin. } b \text{ Cot. } a.$ (Aus XVI.)
XII. $\text{Cot. } B = \text{Sin. } a \text{ Cot. } b.$ (Aus XVIII.)
XIII. $\text{Sin. } a = \text{Sin. } c \text{ Cos. } B.$ (Aus XX.)

III. Anwendung der vorhergehenden Formeln auf die sphärische Trigonometrie.

§ 34.

Aufg. Die drey Seiten (a, b, c) eines sphärischen Dreyeckes sind gegeben: man soll einen seiner Winkel (A) finden.

Aufl. Hierzu dienen die Formeln

1) $\text{Cos. } A = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c}$. (§ 32 IV.)

2) $\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(a+b-c) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c}}$.

Die erste dieser beyden Formeln kann in manchen Fällen ihren Nutzen haben; die zweyte ist zur Rechnung bequemer.

Erstes Beysp. Für $a = 51^\circ 41' 14''$, $b = 70^\circ 20' 50''$, $c = 38^\circ 28' 0''$, findet man $\tfrac{1}{2} A = 26^\circ 15' 0''$, und daher $A = 52^\circ 30' 0''$.

Zweyt. Beysp. Für $a = 51^\circ 2' 0''$, $b = 73^\circ 58' 54''$, $c = 38^\circ 45' 0''$, findet man $A = 46^\circ 33' 41''$.

Dritt. Beysp. Für $a = 69^\circ 50' 0''$, $b = 109^\circ 39' 10''$, $c = 46^\circ 42' 0''$, findet man $A = 32^\circ 54' 28''$.

§ 35.

Aufg. Zwey Seiten (b, c) eines Dreyeckes und der

von denselben eingeschlossene Winkel (A) sind gegeben: man soll die beyden anderen Winkel (B, C) finden.

Aufl. Hierzu dienen die Formeln,

$$\text{Tang.}\,\frac{C-B}{2} = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}A\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(c+b)}. \quad (\S\ 32.\ \text{XLVIII.})$$

$$\text{Tang.}\,\frac{C+B}{2} = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}A\,\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c+b)}. \quad (\S\ 32.\ \text{XLIX.})$$

Man erhält nämlich aus der ersten Gleichung den Winkel $\frac{C-B}{2}$, und aus der zweyten den Winkel $\frac{C+B}{2}$, woraus alsdann ferner B und C gefunden werden.

Erst. Beysp. Für $b = 70^\circ\ 20'\ 50''$, $c = 38^\circ\ 28'\ 0''$, $A = 52^\circ\ 30'\ 0''$, ist $\frac{1}{2}(c-b) = -15^\circ\ 56'\ 25''$, $\frac{1}{2}(c+b) = 54^\circ\ 24'\ 25''$; daher $\frac{1}{2}(C-B) = -34^\circ\ 24'\ 20''$, $\frac{1}{2}(C+B) = 73^\circ\ 22'\ 47''$; woraus man $C = 38^\circ\ 58'\ 27''$, $B = 107^\circ\ 47'\ 7''$ erhält.

Zweyt. Beisp. Für $b = 73^\circ\ 58'\ 54''$, $c = 38^\circ\ 45'\ 0''$, $A = 46^\circ\ 33'\ 41''$, ist $\frac{1}{2}(c-b) = -17^\circ\ 36'\ 57''$, $\frac{1}{2}(c+b) = 56^\circ\ 21'\ 57''$; daher $\frac{1}{2}(C-B) = -40^\circ\ 11'\ 26''$, $\frac{1}{2}(C+B) = 75^\circ\ 57'\ 41''$; woraus man $C = 35^\circ\ 46'\ 15''$, $B = 115^\circ\ 9'\ 7''$ erhält.

Dritt. Beysp. Für $b = 169^\circ\ 39'\ 10''$, $c = 46^\circ\ 42'\ 0''$, $A = 32^\circ\ 54'\ 28''$, ist $\frac{1}{2}(c-b) = -31^\circ\ 28'\ 35''$, $\frac{1}{2}(c+b) = 78^\circ\ 10'\ 35''$; daher $\frac{1}{2}(C-B) = -61^\circ\ 1'\ 41'',5$, $\frac{1}{2}(C+B) = 85^\circ\ 56'\ 28''$; folglich $C = 24^\circ\ 54'\ 47''$, $B = 146^\circ\ 58'\ 9''$.

§ 36.

Aufg. Die drey Winkel (A, B, C) eines sphärischen Dreyecks sind gegeben: man soll eine seiner Seiten (a) finden.

Aufl. Man hat,

1) $\text{Cos. } a = \frac{\text{Cos. } A + \text{Cos. } B \text{ Cos. } C}{\text{Sin. } B \text{ Sin. } C}$ (§. 32. VII.)

2) $\text{Sin. } \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\text{Cos. } \frac{1}{2}(A+B+C) \text{ Cos. } \frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin. } B \text{ Sin. } C}}$. (§ 32. XXXI.)

Anstatt der zweyten kann man auch die Formeln XXXII, XXXIII, brauchen.

Erstes Beysp. Für $A = 52^\circ\ 30'\ 0''$, $B = 107^\circ\ 47'\ 7''$, $C = 38^\circ\ 58'\ 27''$, ist $a = 51^\circ\ 41'\ 14''$ beynahe.

Zwey t. Beysp. Für $A = 46^\circ\ 33'\ 41''$, $B = 115^\circ\ 9'\ 7''$, $C = 35^\circ\ 46'\ 15''$, ist $a = 51^\circ\ 2'\ 0''$ beynahe.

Dritt. Beysp. Für $A = 32^\circ\ 54'\ 28''$, $B = 146^\circ\ 58'\ 9''$, $C = 24^\circ\ 54'\ 47''$, ist $a = 69^\circ\ 30'\ 0''$ beynahe.

§ 37.

Aufg. Zwey Winkel (B, C) eines sphärischen Dreyecks, nebst der daran liegenden Seite (a) sind gegeben; man soll die beyden anderen Seiten (b, c) finden.

Aufl. Hierzu dienen die Formeln

$\text{Tang. } \frac{c-b}{2} = \text{Tang. } \frac{1}{2} a \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(C-B)}{\text{Sin. } \frac{1}{2}(C+B)}$. (§. 32. XLII.)

$\text{Tang. } \frac{c+b}{2} = \text{Tang. } \frac{1}{2} a \frac{\text{Cos. } \frac{1}{2}(C-B)}{\text{Cos. } \frac{1}{2}(C+B)}$. (§ 32. XLIII),

woraus sich $\frac{c-b}{2}$, $\frac{c+b}{2}$, folglich auch c und b bestimmen läßt.

Erst. Beysp. Für $B = 107^\circ\ 47'\ 7''$, $C = 38^\circ\ 58'\ 27''$, $a = 51^\circ\ 41'\ 14''$ ist $c = 38^\circ\ 28'\ 0''$, $b = 70^\circ\ 20'\ 50''$ ungefähr.

Zweyt. Beysp. Für $B = 115^\circ\ 9'\ 7''$, $C = 35^\circ\ 46'\ 15''$, $a = 51^\circ\ 2'\ 0''$, ist $c = 38^\circ\ 45'\ 0''$, $b = 73^\circ\ 58'\ 54''$ ungefähr.

Dritt. Beysp. Für B = 146° 58′ 9″, C = 42° 54′ 47″, a = 69° 50′ 0″, ist c = 46° 42′ 0″, b = 109° 39′ 10″ ungefähr.

§ 38.

Aufg. In einem sphärischen Dreyecke sind gegeben, zwey Winkel (A, B) und die Seite (a), welche einem derselben gegenüber liegt: man soll das Uebrige finden.

Aufl. 1) Die Seite b wird gefunden aus der Gleichung:

$$\text{Sin. } b = \frac{\text{Sin. } a \text{ Sin. } B}{\text{Sin. } A}. \quad (32. \text{ I.})$$

2) Man kennet also in dem Dreyecke die Winkel A, B, und Seiten a, b; hieraus erhält man C, vermittelst der Formeln § 32 XLVII, XLVI.

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}(b-a)}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}(b+a)} \text{ Cot. } \tfrac{1}{2}(A+B),$$

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(b-a)}{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(b+a)} \text{ Cot. } \tfrac{1}{2}(B-A).$$

3) Ferner, die dritte Seite c, aus den Formeln § 32. XLI, XL.

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}(B+A)}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}(B-A)} \text{ Tang. } \tfrac{1}{2}(b+a),$$

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(B+A)}{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(B-A)} \text{ Tang. } \tfrac{1}{2}(b-a).$$

§ 39.

Aufg. In einem sphärischen Dreyecke sind zwey Seiten (a, b) gegeben, und der Winkel (A), welcher einer derselben gegenüber liegt; man soll das Uebrige finden.

Aufl. 1) Der Winkel B wird gefunden aus der Gleichung:

$$\text{Sin. } B = \frac{\text{Sin. } b \text{ Sin. } A}{\text{Sin. } a} \quad (\S\ 32\ I).$$

2) Man kennet also die Winkel A, B, und Seiten a, b, woraus das Uebrige wie in 2 und 3 des vorigen §'s bestimmt wird.

§ 40.

Die sechs, in § 34—39 aufgelösten Aufgaben, enthalten alles, was zur Berechnung eines sphärischen Dreyeckes gehört, so lange keine andere Bestimmungsstücke zugelassen werden, als die unmittelbar gegebenen Seiten und Winkel desselben. Ehe ich mich indessen zu anderen Aufgaben wende, muß noch eine anscheinende Schwierigkeit aus dem Wege geräumt werden.

In den Formeln § 38, 39, werden die gesuchten Winkel und Seiten durch ihre Sinusse gegeben. Hieraus entstehet aber nothwendig eine Ungewißheit in der Bestimmung derselben, weil jedem Sinus zwey Winkel zugehören, deren einer das Complement des anderen zu 180° ist. Es können indessen hierbey Fälle eintreten wo wirklich zwey Auflösungen statt finden; wie dies erkannt wird, zeigt unter anderen Kästner in seinen Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie, 6te Aufl. 1800, S. 571 — 577 sehr deutlich. Ich setze hier nur die Resultate her.

1) Für die Formel § 38. I ist,

a zweydeutig, wenn

$A < 90°$, $b < 90°$, $B < A$

$A > 90°$, $b > 90°$, $B > A$

$A < 90°$, $b > 90°$, $B > 180° - A$

$A > 90°$, $b < 90°$, $B < 180° - A$

a spitz, wenn

$A < 90°$, $b < 90°$, $B > A$

$A < 90°$, $b > 90°$, $B < 180° - A$

a stumpf, wenn

$A > 90°$, $b > 90°$, $B < A$

$A > 90°$, $b < 90°$, $B > 180° - A$.

2) Für die Formel § 39 ist

A zweydeutig, wenn

$B < 90°$, $a < 90°$, $b < a$

$B > 90°$, $a > 90°$, $b > a$

$B < 90°$, $a > 90°$, $b < 180° - a$

$B > 90°$, $a < 90°$, $b > 180° - a$,

A spitz, wenn

$B < 90°$, $a < 90°$, $b > a$

$B > 90°$, $a < 90°$, $b < 180° - a$,

A stumpf, wenn

$B > 90°$, $a > 90°$, $b < a$

$B < 90°$, $a > 90°$, $b > 180° - a$.

§ 41.

Aufg. Die drey Seiten eines sphärischen Dreyecks sind gegeben: man soll das Perpendikel finden, welches von einer seiner Spitzen auf die gegenüber liegende Seite gezogen worden.

Aufl. 1) Es sey ABC (Fig. 15) das sphärische Dreyeck; die Bezeichnung seiner Seiten und Winkel wie immer; das Perpendikel $BD = p$.

2) Man multiplicire die beyden Gleichungen XXII, XXIII. in § 32 mit einander, und setze $\frac{1}{2}$ Sin. A für Sin. $\frac{1}{2}$ A Cos. $\frac{1}{2}$ A; dies giebt, wenn noch mit 2 multiplicirt wird,

$$\text{Sin.}\,A = \frac{2}{\text{Sin.}\,b\,\text{Sin.}\,c}\sqrt{\begin{bmatrix}\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-c)\times\\ \text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c-b)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c-a)\end{bmatrix}}$$

3) In dem bey D rechtwinklichen Dreyecke ABD ist aber nach I. § 33, wenn p für das dortige a gesetzt wird,

$$\text{Sin.}\,p = \text{Sin.}\,c\,\text{Sin.}\,A:$$

substituirt man demnach den in 2 gefundenen Ausdruck für Sin. A, so erhält man,

$$\text{Sin.}\,p = \frac{2}{\text{Sin.}\,b}\sqrt{\begin{bmatrix}\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-c)\times\\ \text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c-b)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c-a)\end{bmatrix}}.$$

§ 42.

Aufg. Die drey Seiten eines sphärischen Dreyeckes sind gegeben: man soll die Segmente einer Seite finden, welche durch die Herablassung eines Perpendikels von der gegenüber liegenden Spitze erzeugt werden.

Aufl. 1) Es sey ABC (Fig. 15) das gegebene Dreyeck, das Perpendikel BD = p, das gesuchte Segment AD = x, das andere CD = y = b − x.

2) Alsdann ist nach III. § 33,

$$\text{Cos.}\,p\,\text{Cos.}\,x = \text{Cos.}\,c$$
$$\text{Cos.}\,p\,\text{Cos.}\,y = \text{Cos.}\,a,$$

oder, da Cos. y = Cos. (b − x) = Cos. b Cos. x + Sin. b Sin. x,

$$\text{Cos.}\,p\,\text{Cos.}\,x = \text{Cos.}\,c$$
$$\text{Cos.}\,p\,(\text{Cos.}\,b\,\text{Cos.}\,x + \text{Sin.}\,b\,\text{Sin.}\,x) = \text{Cos.}\,a.$$

3) Man dividire die zweyte Gleichung durch die erste, und setze Tang x für $\frac{\text{Sin.}\,x}{\text{Cos.}\,x}$; dies giebt

$$\text{Cos.}\,b + \text{Sin.}\,b\,\text{Tang.}\,x = \frac{\text{Cos.}\,a}{\text{Cos.}\,c};$$

woraus man erhält,

$$\text{Tang. } x = \frac{\text{Cos. } a}{\text{Sin. } b \text{ Cos. } c} - \text{Cot. } b.$$

4) Durch die Vertauschung des a mit c und des x mit y erhält man ferner aus dieser Gleichung,

$$\text{Tang. } y = \frac{\text{Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Cos. } a} - \text{Cot. } b.$$

5) Aus 3 läßt sich nun x, und aus 4 auch y durch Rechnung finden.

§ 43.

Aufg. Die Grundlinie eines sphärischen Dreyeckes, die Summe seiner Seiten, und der Scheitelwinkel desselben sind gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. 1) Es sey ABC (Fig. 15) das gesuchte Dreyeck, AC = b die gegebene Grundlinie, AB + BC = s die gegebene Summe der Seiten, und B der gegebene Scheitelwinkel. Es sey die unbekannte Seite BC = x; so ist AB = s — x.

2) Zur Auflösung dieser Aufgabe bediene ich mich der Gleichung,

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} B^2 = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(a+b+c) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin. } a \text{ Sin. } c} \text{ (§ 32. XXVI)},$$

indem ich a = x und c = s — x setze. Hierdurch entstehet die Gleichung

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} B^2 = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(s+b) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}(s-b)}{\text{Sin. } x \text{ Sin. } (s-x)},$$

oder

$$\text{Sin. } x \text{ Sin. } (s-x) = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(s+b) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}(s-b)}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2} B^2}.$$

3) Da nun Sin. x Sin. (s — x) = ½ Cos. (2x — s) — ½ Cos. s (§. 14), so erhält man, wenn ½ Cos s auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebracht und mit 2 multiplicirt wird,

$$\text{Cos.}(2x-s) = \frac{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(s+b)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(s-b)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}B^2} + \text{Cos.}\,s,$$

woraus sich $2x - s$, und folglich auch x bestimmen läßt.

§. 44.

Aufg. Die Grundlinie eines sphärischen Dreyeckes, der Unterschied der beyden Winkel an derselben, und der Unterschied seiner Seiten ist gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. 1) In dem Dreyecke (Fig. 15) ist gegeben: $AC = b$, $BAC - ACB = f$, $BC - AB = g$. Die Unterschiede $A - C$, $a - c$, der Winkel und Seiten sind demnach gegeben; es kommt also bloß darauf an die Summen $A + C$, $a + c$, zu finden.

2) Hierzu dient nun die Formel

$$\text{Tang.}\frac{a-c}{2} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}b\,\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A-C)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A+C)}\ (\S\ 32\ \text{XLIV}).$$

Denn setzt man hierin $A - C = f$, $a - c = g$, so erhält man:

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}b\,\text{Sin.}\frac{1}{2}f}{\text{Sin.}\frac{1}{2}g},$$

woraus sich $A + C$ bestimmen läßt. Ich setze es $= h$

3) Werden die Gleichungen L, LI in § 32 durch einander dividirt, so erhält man,

$$\frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}(A-C)}{\text{Tang.}\frac{1}{2}(A+C)} = \frac{\text{Sin}\frac{1}{2}(a-c)\,\text{Cos.}\frac{1}{2}(a+c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a-c)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c)} = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}(a-c)}{\text{Tang.}\frac{1}{2}(a+c)},$$

oder, wenn für $A - C$, $a - c$, $A + C$, ihre Werthe f, g, h, gesetzt werden,

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(a+c) = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}g\,\text{Tang.}\frac{1}{2}h}{\text{Tang.}\frac{1}{2}f},$$

woraus sich $a + c$ bestimmen läßt.

4) Setzt man nun $a + c = l$; so erhält man $A = \frac{h + f}{2}$, $C = \frac{h - f}{2}$, $a = \frac{l + g}{2}$, $c = \frac{l - g}{2}$.

§ 45.

Aufg. Der Scheitelwinkel eines sphärischen Dreyecks und die Segmente, in welche das von der Spitze dieses Winkels auf die Grundlinie gezogene Perpendikel dieselbe theilt, sind gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. 1) In dem Dreyecke ABC (Fig. 15) sey B der gegebene Scheitelwinkel; die gegebenen Segmente AD, CD, sollen m, n heißen; das unbekannte Perpendikel heiße, der Kürze wegen, p.

2) Da $ABD + DBC = B$ bekannt ist, so hängt alles davon ab, den Unterschied dieser Winkel Segmente, nämlich $ABD - DBC$ zu finden. Es sey daher $ABD - DBC = x$. Alsdann ist $ABD = \frac{B + x}{2}$, $DBC = \frac{B - x}{2}$.

3) In den rechtwinkeligen Dreyecken ABD, BDC, hat man demnach aus VIII. § 33,

$$\text{Sin. } p = \text{Tang. } m \text{ Cot. } \tfrac{1}{2}(B + x)$$
$$\text{Sin. } p = \text{Tang. } n \text{ Cot. } \tfrac{1}{2}(B - x);$$

folglich $\text{Tang. } m \text{ Cot. } \frac{1}{2}(B + x) = \text{Tang. } n \text{ Cot. } \frac{1}{2}(B - x)$, oder

$$\frac{\text{Tang. } m}{\text{Tang. } n} = \frac{\text{Cot. } \frac{1}{2}(B - x)}{\text{Cot. } \frac{1}{2}(B + x)} = \frac{\text{Tang. } \frac{1}{2}(B + x)}{\text{Tang. } \frac{1}{2}(B - x)}.$$

4) Nach (§. 36) ist aber

$$\frac{\text{Tang. } \frac{1}{2}(B + x)}{\text{Tang. } \frac{1}{2}(B - x)} = \frac{\text{Sin. } B + \text{Sin. } x}{\text{Sin. } B - \text{Sin. } x};$$

man hat also

$$\frac{\text{Tang. m}}{\text{Tang. n}} = \frac{\text{Sin. B} + \text{Sin. x}}{\text{Sin. B} - \text{Sin. x}};$$

woraus man erhält,

$$\text{Sin. x} = \frac{\text{Tang. m} - \text{Tang. n}}{\text{Tang. m} + \text{Tang. n}} \text{ Sin. B},$$

oder,

$$\text{Sin. x} = \frac{\text{Sin. (m} - \text{n)}}{\text{Sin. (m} + \text{n)}} \text{ Sin. B. (§. 42.)}$$

Zusatz. Aus dieser Gleichung ergiebt sich der schöne Lehrsatz:

Daß in jedem sphärischen Dreyecke, wenn von einem Winkel desselben auf die gegenüber liegende Seite ein Perpendikel herabgelassen wird, der Sinus dieser Seite sich zum Sinus der Differenz ihrer Segmente eben so verhalte, wie der Sinus des Winkels zum Sinus der Differenz seiner Segmente.

§. 46.

Aufg. Aus irgend einer Spitze eines sphärischen Dreyeckes, dessen drey Seiten gegeben sind, wird ein Bogen eines größten Kreises nach der gegenüber liegenden Seite gezogen; die Segmente derselben sind gegeben: man soll den Bogen finden.

Aufl. 1) Es seyen, wie immer, a, b, c, die drey gegebenen Seiten des Dreyeckes ABC (Fig. 15); AD = m, das gegebene Segment; BD = x der gesuchte Bogen.

2) Nach §. 32 IV erhält man aus dem Dreyecke ABC,

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b Cos. c}}{\text{Sin. b Sin. c}},$$

und aus dem Dreyecke ABD,

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. x} - \text{Cos. c Cos. m}}{\text{Sin. c Sin. m}};$$

3) Setzt man diese beyden Werthe des Cos. A einander gleich, so entstehet die Gleichung

$$\frac{\text{Cos. } x - \text{Cos. } c \text{ Cos. } m}{\text{Sin. } c \text{ Sin. } m} = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c};$$

und hieraus ergiebt sich,

$$\text{Cos. } x = (\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c)\frac{\text{Sin. } m}{\text{Sin. } b} + \text{Cos. } c \text{ Cos. } m,$$

woraus sich x bestimmen läßt.

§ 47.

Aufg. Die drey Seiten eines sphärischen Dreyeckes sind gegeben; auf einer dieser Seiten wird irgend ein Punkt angenommen, und aus demselben nach einem gegebenen Punkte auf einer anderen Seite des Dreyeckes ein Bogen gezogen: man soll diesen Bogen finden.

Aufl. 1) Es seyen a, b, c, die drey Seiten des Dreyeckes ABC (Fig. 16); b′, c′, die gegebenen Segmente AH, AG; der gesuchte Bogen GH = x.

2) Man hat alsdann im Dreyecke ABC,

$$\text{Cos. } A = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c},$$

und im Dreyecke AGH,

$$\text{Cos. } A = \frac{\text{Cos. } x - \text{Cos. } b' \text{ Cos. } c'}{\text{Sin. } b' \text{ Sin. } c'}.$$

3) Hieraus ergiebt sich die Gleichung,

$$\frac{\text{Cos. } x - \text{Cos. } b' \text{ Cos. } c'}{\text{Sin. } b' \text{ Sin. } c'} = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c};$$

demnach ist,

$$\text{Cos. } x = (\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c)\frac{\text{Sin. } b' \text{ Sin. } c'}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c} + \text{Cos. } b' \text{ Cos. } c';$$

woraus sich x bestimmen läßt.

1) $\text{Cos. a} = \frac{\text{Cos. A} + \text{Cos. B Cos. C}}{\text{Sin. B Sin. C}}$. (§. 32. VII.)

2) $\text{Sin.} \frac{1}{2} \text{a} = \sqrt{\frac{-\text{Cos.} \frac{1}{2}(A+B+C) \text{Cos.} \frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin. B Sin. C}}}$.

(§ 32. XXXI.)

Anstatt der zweyten kann man auch die Formeln XXXII, XXXIII, brauchen.

Erstes Beysp. Für A = 52° 30′ 0″, B = 107° 47′ 7″, C = 38° 58′ 27″, ist a = 51° 41′ 14″ beynahe.

Zweyt. Beysp. Für A = 46° 33′ 41″, B = 115° 9′ 7″, C = 35° 46′ 15″, ist a = 51° 2′ 0″ beynahe.

Dritt. Beysp. Für A = 32° 54′ 28″, B = 146° 58′ 9″, C = 24° 54′ 47″, ist a = 69° 30′ 0″ beynahe.

§ 37.

Aufg. Zwey Winkel (B, C) eines sphärischen Dreyecks, nebst der daran liegenden Seite (a) sind gegeben; man soll die beyden anderen Seiten (b, c) finden.

Aufl. Hierzu dienen die Formeln

$\text{Tang.} \frac{c-b}{2} = \text{Tang.} \frac{1}{2} \text{a} \frac{\text{Sin.} \frac{1}{2} (C-B)}{\text{Sin.} \frac{1}{2} (C+B)}$. (§. 32. XLII.)

$\text{Tang.} \frac{c+b}{2} = \text{Tang.} \frac{1}{2} \text{a} \frac{\text{Cos.} \frac{1}{2} (C-B)}{\text{Cos.} \frac{1}{2} (C+B)}$. (§ 32. XLIII),

woraus sich $\frac{c-b}{2}$, $\frac{c+b}{2}$, folglich auch c und b bestimmen läßt.

Erst. Beysp. Für B = 107° 47′ 7″, C = 38° 58′ 27″, a = 51° 41′ 14″ ist c = 38° 28′ 0″, b = 70° 20′ 50″ ungefähr.

Zweyt. Beysp. Für B = 115° 9′ 7″, C = 35° 46′ 15″, a = 51° 2′ 0″, ist c = 38° 45′ 0″, b = 73° 58′ 54″ ungefähr.

Dritt. Beysp. Für B = 146° 58′ 9″, C = 42° 54′ 47
a = 69° 50′ 0″, ist c = 46° 42′ 0″, b = 109° 39′ 1
ungefähr.

§ 38.

Aufg. In einem sphärischen Dreyecke sind gegebe zwey Winkel (A, B) und die Seite (a), welche einem de selben gegenüber liegt: man soll das Uebrige finden.

Aufl. 1) Die Seite b wird gefunden aus der Gleichun

$$\text{Sin. } b = \frac{\text{Sin. } a \ \text{Sin. } B}{\text{Sin. } A}. \quad (32. \text{ I.})$$

2) Man kennet also in dem Dreyecke die Winkel A, B und Seiten a, b; hieraus erhält man C, vermittelst der Fo meln § 32 XLVII, XLVI.

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Cos. } \tfrac{1}{2} (b - a)}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2} (b + a)} \text{ Cot. } \tfrac{1}{2} (A + B),$$

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} (b - a)}{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} (b + a)} \text{ Cot. } \tfrac{1}{2} (B - A).$$

3) Ferner, die dritte Seite c, aus den Formeln § 3 XLI, XL.

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{Cos. } \tfrac{1}{2} (B + A)}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2} (B - A)} \text{ Tang. } \tfrac{1}{2} (b + a),$$

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} (B + A)}{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} (B - A)} \text{ Tang. } \tfrac{1}{2} (b - a).$$

§ 39.

Aufg. In einem sphärischen Dreyecke sind zwey Se ten (a, b) gegeben, und der Winkel (A), welcher ein derselben gegenüber liegt; man soll das Uebrige finden.

Aufl. 1) Der Winkel B wird gefunden aus der Gl chung:

$$\text{Sin. B} = \frac{\text{Sin. b Sin. A}}{\text{Sin. a}} \text{ (§ 32 I).}$$

2) Man kennet also die Winkel A, B, und Seiten a, b, woraus das Uebrige wie in 2 und 3 des vorigen §'s bestimmt wird.

§ 40.

Die sechs, in § 34 — 39 aufgelösten Aufgaben, enthalten alles, was zur Berechnung eines sphärischen Dreyeckes gehört, so lange keine andere Bestimmungsstücke zugelassen werden, als die unmittelbar gegebenen Seiten und Winkel desselben. Ehe ich mich indessen zu anderen Aufgaben wende, muß noch eine anscheinende Schwierigkeit aus dem Wege geräumt werden.

In den Formeln § 38, 39, werden die gesuchten Winkel und Seiten durch ihre Sinusse gegeben. Hieraus entstehet aber nothwendig eine Ungewißheit in der Bestimmung derselben, weil jedem Sinus zwey Winkel zugehören, deren einer das Complement des anderen zu 180° ist. Es können indessen hierbey Fälle eintreten wo wirklich zwey Auflösungen statt finden; wie dies erkannt wird, zeigt unter anderen Kästner in seinen Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie, 6te Aufl. 1800, S. 571 — 577 sehr deutlich. Ich setze hier nur die Resultate her.

1) Für die Formel § 38. I ist,

a zweydeutig, wenn

$A < 90°$, $b < 90°$, $B < A$

$A > 90°$, $b > 90°$, $B > A$

$A < 90°$, $b > 90°$, $B > 180° - A$

$A > 90°$, $b < 90°$, $B < 180° - A$

a spitz, wenn

$A < 90^\circ$, $b < 90^\circ$, $B > A$

$A < 90^\circ$, $b > 90^\circ$, $B < 180^\circ - A$

a stumpf, wenn

$A > 90^\circ$, $b > 90^\circ$, $B < A$

$A > 90^\circ$, $b < 90^\circ$, $B > 180^\circ - A$.

2) Für die Formel § 39 ist

A zweydeutig, wenn

$B < 90^\circ$, $a < 90^\circ$, $b < a$

$B > 90^\circ$, $a > 90^\circ$, $b > a$

$B < 90^\circ$, $a > 90^\circ$, $b < 180^\circ - a$

$B > 90^\circ$, $a < 90^\circ$, $b > 180^\circ - a$,

A spitz, wenn

$B < 90^\circ$, $a < 90^\circ$, $b > a$

$B > 90^\circ$, $a < 90^\circ$, $b < 180^\circ - a$,

A stumpf, wenn

$B > 90^\circ$, $a > 90^\circ$, $b < a$

$B < 90^\circ$, $a > 90^\circ$, $b > 180^\circ - a$.

§ 41.

Aufg. Die drey Seiten eines sphärischen Dreyecks sind gegeben: man soll das Perpendikel finden, welches von einer seiner Spitzen auf die gegenüber liegende Seite gezogen worden.

Aufl. 1) Es sey ABC (Fig. 15) das sphärische Dreyeck; die Bezeichnung seiner Seiten und Winkel wie immer; das Perpendikel BD = p.

2) Man multiplicire die beyden Gleichungen XXII, XXIII. in § 32 mit einander, und setze $\frac{1}{2}$ Sin. A für Sin. $\frac{1}{2}$ A Cos. $\frac{1}{2}$ A; dies giebt, wenn noch mit 2 multiplicirt wird,

$$\text{Sin. } A = \frac{2}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c} \sqrt{\begin{bmatrix} \text{Sin.} \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ Sin.} \frac{1}{2}(a+b-c) \times \\ \text{Sin.} \frac{1}{2}(a+c-b) \text{ Sin.} \frac{1}{2}(b+c-a) \end{bmatrix}}$$

3) In dem bey D rechtwinkligen Dreyecke ABD ist aber nach I. § 33, wenn p für das dortige a gesetzt wird,

$$\text{Sin. } p = \text{Sin. } c \text{ Sin. } A:$$

substituirt man demnach den in 2 gefundenen Ausdruck für Sin. A, so erhält man,

$$\text{Sin. } p = \frac{2}{\text{Sin. } b} \sqrt{\begin{bmatrix} \text{Sin.} \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ Sin.} \frac{1}{2}(a+b-c) \times \\ \text{Sin.} \frac{1}{2}(a+c-b) \text{ Sin.} \frac{1}{2}(b+c-a) \end{bmatrix}}.$$

§ 42.

Aufg. Die drey Seiten eines sphärischen Dreyeckes sind gegeben: man soll die Segmente einer Seite finden, welche durch die Herablassung eines Perpendikels von der gegenüber liegenden Spitze erzeugt werden.

Aufl. 1) Es sey ABC (Fig. 15) das gegebene Dreyeck, das Perpendikel BD = p, das gesuchte Segment AD = x, das andere CD = y = b − x.

2) Alsdann ist nach III. § 33,

$$\text{Cos. } p \text{ Cos. } x = \text{Cos. } c$$
$$\text{Cos. } p \text{ Cos. } y = \text{Cos. } a,$$

oder, da Cos. y = Cos. (b − x) = Cos. b Cos. x + Sin. b Sin. x,

$$\text{Cos. } p \text{ Cos. } x = \text{Cos. } c$$
$$\text{Cos. } p\, (\text{Cos. } b \text{ Cos. } x + \text{Sin. } b \text{ Sin. } x) = \text{Cos. } a.$$

3) Man dividire die zweyte Gleichung durch die erste, und setze Tang x für $\frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x}$; dies giebt

$$\text{Cos. } b + \text{Sin. } b \text{ Tang. } x = \frac{\text{Cos. } a}{\text{Cos. } c};$$

woraus man erhält,

$$\text{Tang. } x = \frac{\text{Cos. } a}{\text{Sin. } b \text{ Cos. } c} - \text{Cot. } b.$$

4) Durch die Vertauschung des a mit c und des x mit y erhält man ferner aus dieser Gleichung,

$$\text{Tang. } y = \frac{\text{Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Cos. } a} - \text{Cot. } b.$$

5) Aus 3 läßt sich nun x, und aus 4 auch y durch Rechnung finden.

§ 43.

Aufg. Die Grundlinie eines sphärischen Dreyeckes, die Summe seiner Seiten, und der Scheitelwinkel desselben sind gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. 1) Es sey ABC (Fig. 15) das gesuchte Dreyeck, AC = b die gegebene Grundlinie, AB + BC = s die gegebene Summe der Seiten, und B der gegebene Scheitelwinkel. Es sey die unbekannte Seite BC = x; so ist AB = s — x.

2) Zur Auflösung dieser Aufgabe bediene ich mich der Gleichung,

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} B^2 = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(a + b + c) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}(a + c - b)}{\text{Sin. } a \text{ Sin. } c} \quad (\S\ 32.\ \text{XXVI}),$$

indem ich a = x und c = s — x setze. Hierdurch entstehet die Gleichung

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} B^2 = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(s + b) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}(s - b)}{\text{Sin. } x \text{ Sin. } (s - x)},$$

oder

$$\text{Sin. } x \text{ Sin. } (s - x) = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(s + b) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}(s - b)}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2} B^2}.$$

3) Da nun Sin. x Sin. (s — x) = ½ Cos. (2x — s) — ½ Cos. s (§. 14), so erhält man, wenn ½ Cos s auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebracht und mit 2 multiplicirt wird,

$$\text{Cos.}(2x - s) = \frac{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(s+b)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(s-b)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}B^2} + \text{Cos.}\,s,$$

woraus sich $2x - s$, und folglich auch x bestimmen läßt.

§. 44.

Aufg. Die Grundlinie eines sphärischen Dreyeckes, der Unterschied der beyden Winkel an derselben, und der Unterschied seiner Seiten ist gegeben; man soll das Dreyeck finden.

Aufl. 1) In dem Dreyecke (Fig. 15) ist gegeben: $AC = b$, $BAC - ACB = f$, $BC - AB = g$. Die Unterschiede $A - C$, $a - c$, der Winkel und Seiten sind demnach gegeben; es kommt also bloß darauf an die Summen $A + C$, $a + c$, zu finden.

2) Hierzu dient nun die Formel

$$\text{Tang.}\frac{a-c}{2} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}b\,\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A-C)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A+C)}$$ (§. 32 XLIV).

Denn setzt man hierin $A - C = f$, $a - c = g$, so erhält man:

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}b\,\text{Sin.}\frac{1}{2}f}{\text{Sin.}\frac{1}{2}g},$$

woraus sich $A + C$ bestimmen läßt. Ich setze es $= h$

3) Werden die Gleichungen L, LI in § 32 durch einander dividirt, so erhält man,

$$\frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}(A-C)}{\text{Tang.}\frac{1}{2}(A+C)} = \frac{\text{Sin}\frac{1}{2}(a-c)\,\text{Cos.}\frac{1}{2}(a+c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a-c)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c)} = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}(a-c)}{\text{Tang.}\frac{1}{2}(a+c)};$$

oder, wenn für $A - C$, $a - c$, $A + C$, ihre Werthe f, g, h, gesetzt werden,

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(a+c) = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}g\,\text{Tang.}\frac{1}{2}h}{\text{Tang.}\frac{1}{2}f};$$

woraus sich $a + c$ bestimmen läßt.

4) Setzt man nun $a + c = l$; so erhält man $A = \frac{h + f}{2}$, $C = \frac{h - f}{2}$, $a = \frac{l + g}{2}$, $c = \frac{l - g}{2}$.

§ 45.

Aufg. Der Scheitelwinkel eines sphärischen Dreyecks und die Segmente, in welche das von der Spitze dieses Winkels auf die Grundlinie gezogene Perpendikel dieselbe theilt, sind gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. 1) In dem Dreyecke ABC (Fig. 15) sey B der gegebene Scheitelwinkel; die gegebenen Segmente AD, CD, sollen m, n heißen; das unbekannte Perpendikel heiße, der Kürze wegen, p.

2) Da ABD + DBC = B bekannt ist, so hängt alles davon ab, den Unterschied dieser Winkel Segmente, nämlich ABD — DBC zu finden. Es sey daher ABD — DBC = x. Alsdann ist $ABD = \frac{B + x}{2}$, $DBC = \frac{B - x}{2}$.

3) In den rechtwinkeligen Dreyecken ABD, BDC, hat man demnach aus VIII. § 35,

$$\text{Sin. } p = \text{Tang. } m \text{ Cot. } \tfrac{1}{2} (B + x)$$
$$\text{Sin. } p = \text{Tang. } n \text{ Cot. } \tfrac{1}{2} (B - x);$$

folglich $\text{Tang. } m \text{ Cot. } \tfrac{1}{2} (B + x) = \text{Tang. } n \text{ Cot. } \tfrac{1}{2} (B - x)$, oder

$$\frac{\text{Tang. } m}{\text{Tang. } n} = \frac{\text{Cot. } \tfrac{1}{2} (B - x)}{\text{Cot. } \tfrac{1}{2} (B + x)} = \frac{\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (B + x)}{\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (B - x)}.$$

4) Nach (§. 36) ist aber

$$\frac{\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (B + x)}{\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (B - x)} = \frac{\text{Sin. } B + \text{Sin. } x}{\text{Sin. } B - \text{Sin. } x};$$

man hat also

$$\frac{\text{Tang. m}}{\text{Tang. n}} = \frac{\text{Sin. B} + \text{Sin. x}}{\text{Sin. B} - \text{Sin. x}};$$

woraus man erhält,

$$\text{Sin. x} = \frac{\text{Tang. m} - \text{Tang. n}}{\text{Tang. m} + \text{Tang. n}} \text{Sin. B},$$

oder,

$$\text{Sin. x} = \frac{\text{Sin. (m - n)}}{\text{Sin. (m + n)}} \text{Sin. B. (J. 42.)}$$

Zusatz. Aus dieser Gleichung ergiebt sich der schöne Lehrsatz:

Daß in jedem sphärischen Dreyecke, wenn von einem Winkel desselben auf die gegenüber liegende Seite ein Perpendikel herabgelassen wird, der Sinus dieser Seite sich zum Sinus der Differenz ihrer Segmente eben so verhalte, wie der Sinus des Winkels zum Sinus der Differenz seiner Segmente.

§ 46.

Aufg. Aus irgend einer Spitze eines sphärischen Dreyeckes, dessen drey Seiten gegeben sind, wird ein Bogen eines größten Kreises nach der gegenüber liegenden Seite gezogen; die Segmente derselben sind gegeben: man soll den Bogen finden.

Aufl. 1) Es seyen, wie immer, a, b, c, die drey gegebenen Seiten des Dreyeckes ABC (Fig. 15); AD = m, das gegebene Segment; BD = x der gesuchte Bogen.

2) Nach § 32 IV erhält man aus dem Dreyecke ABC,

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b Cos. c}}{\text{Sin. b Sin. c}},$$

und aus dem Dreyecke ABD,

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. x} - \text{Cos. c Cos. m}}{\text{Sin. c Sin. m}},$$

3) Setzt man diese beyden Werthe des Cos. A einander gleich, so entstehet die Gleichung

$$\frac{\text{Cos. } x - \text{Cos. } c \text{ Cos. } m}{\text{Sin. } c \text{ Sin. } m} = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c};$$

und hieraus ergiebt sich,

$$\text{Cos. } x = (\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c)\frac{\text{Sin. } m}{\text{Sin. } b} + \text{Cos. } c \text{ Cos. } m,$$

woraus sich x bestimmen läßt.

§ 47.

Aufg. Die drey Seiten eines sphärischen Dreyeckes sind gegeben; auf einer dieser Seiten wird irgend ein Punkt angenommen, und aus demselben nach einem gegebenen Punkte auf einer anderen Seite des Dreyeckes ein Bogen gezogen: man soll diesen Bogen finden.

Aufl. 1) Es seyen a, b, c, die drey Seiten des Dreyeckes ABC (Fig. 16); b′, c′, die gegebenen Segmente AH, AG; der gesuchte Bogen GH = x.

2) Man hat alsdann im Dreyecke ABC,

$$\text{Cos. } A = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c},$$

und im Dreyecke AGH,

$$\text{Cos. } A = \frac{\text{Cos. } x - \text{Cos. } b' \text{ Cos. } c'}{\text{Sin. } b' \text{ Sin. } c'}.$$

3) Hieraus ergiebt sich die Gleichung,

$$\frac{\text{Cos. } x - \text{Cos. } b' \text{ Cos. } c'}{\text{Sin. } b' \text{ Sin. } c'} = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c};$$

demnach ist,

$$\text{Cos. } x = (\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c)\frac{\text{Sin. } b' \text{ Sin. } c'}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c} + \text{Cos. } b' \text{ Cos. } c';$$

woraus sich x bestimmen läßt.

§ 48.

Werden in einem sphärischen Dreyecke ABC (Fig. 17) die Sehnen AB, AC, BC, der eben so benannten Bogen gezogen, so schließen diese graden Linien ein Dreyeck ein, welches ich, der Kürze wegen, das Sehnendreyeck des sphärischen nennen will; die Seiten und Winkel des ersteren, so wie sie den Seiten und Winkeln a, b, c, A, B, C, des letzteren korrespondiren, sollen durch die Buchstaben a′, b′, c′, α, β, γ, bezeichnet werden. In welcher Beziehung das sphärische Dreyeck mit seinem Sehnendreyeck stehet, werden die folgenden Aufgaben zeigen.

§ 49.

Aufg. Aus den gegebenen Seiten eines sphärischen Dreyecks die Seiten des Sehnendreyecks zu finden, und umgekehrt, jene zu finden, wenn diese gegeben sind.

Aufl. 1) Die Sehne eines Bogens ist bekanntlich, den Halbmesser desselben für die Einheit angenommen, immer doppelt so groß als der Sinus seiner Hälfte. Man hat demnach,

$$a' = 2 \,\text{Sin.}\tfrac{1}{2} a, \quad b' = 2 \,\text{Sin.}\tfrac{1}{2} b, \quad c' = 2 \,\text{Sin.}\tfrac{1}{2} c.$$

Vermittelst dieser Gleichungen lassen sich die Seiten des Sehnendreyeckes aus den Seiten des sphärischen bestimmen.

2) Umgekehrt hat man

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} a', \quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2} b = \tfrac{1}{2} b', \quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2} c = \tfrac{1}{2} c';$$

oder, da $\text{Cos.}\, \varphi = 1 - 2 \,\text{Sin.}\tfrac{1}{2} \varphi^2$,

$$\text{Cos.}\, a = 1 - \tfrac{1}{2} a'^2, \quad \text{Cos.}\, b = 1 - \tfrac{1}{2} b'^2, \quad \text{Cos.}\, c = 1 - \tfrac{1}{2} c'^2.$$

Vermittelst dieser Gleichungen lassen sich die Seiten des sphärischen Dreyecks aus den Seiten des Sehnendreyecks finden.

§ 50.

Aufg. Aus den gegebenen Seiten des sphärischen Dreyecks die Winkel des Sehnendreyecks, und umgekehrt,

aus

aus den gegebenen Seiten des Sehnendreyecks die Winkel des sphärischen zu bestimmen.

Aufl. 1) Aus der ebenen Trigonometrie ist bekannt, daß

$$\text{Cos.}\,\alpha = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2\,b'c'}.$$

Werden hierin für a', b', c', ihre Werthe aus 1 § 49 substituirt, so erhält man

$$\text{Cos.}\,\alpha = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b^2 + \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c^2 - \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,a^2}{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b\;\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c} \;\ldots\; [\varphi].$$

Eben so wird gefunden,

$$\text{Cos.}\,\beta = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,a^2 + \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c^2 - \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b^2}{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,a\;\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c},$$

$$\text{Cos.}\,\gamma = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,a^2 + \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b^2 - \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c^2}{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,a\;\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b}.$$

2) Aus § 32 IV. hat man

$$\text{Cos.}\,A = \frac{\text{Cos.}\,a - \text{Cos.}\,b\;\text{Cos.}\,c}{\text{Sin.}\,b\;\text{Sin.}\,c}.$$

Nun ist (§ 49. 2) $\text{Cos.}\,a = 1 - \tfrac{1}{2}a'^2$, $\text{Cos.}\,b = 1 - \tfrac{1}{2}b'^2$, $\text{Cos.}\,c = 1 - \tfrac{1}{2}c'^2$; folglich $\text{Sin.}\,b = \sqrt{[1 - (1 - \tfrac{1}{2}b'^2)^2]} = b'\sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}b'^2)}$, $\text{Sin.}\,c = \sqrt{[1 - (1 - \tfrac{1}{2}c'^2)^2]} = c'\sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}c'^2)}$; werden diese Werthe substituirt, und hierauf Zähler und Nenner mit 4 multiplicirt, so erhält man,

$$\text{Cos.}\,A = \frac{2b'^2 + 2c'^2 - 2a'^2 - b'^2c'^2}{b'c'\sqrt{(4 - b'^2)(4 - c'^2)}} \;\ldots\; [\psi],$$

$$\text{Cos.}\,B = \frac{2a'^2 + 2c'^2 - 2b'^2 - a'^2c'^2}{a'c'\sqrt{(4 - a'^2)(4 - c'^2)}},$$

$$\text{Cos.}\,C = \frac{2a'^2 + 2b'^2 - 2c'^2 - a'^2b'^2}{a'b'\sqrt{(4 - a'^2)(4 - b'^2)}}.$$

Erst. Zusatz. Ist das sphärische Dreyeck gleichschenkelig, und z. B. $c = b$, so erhält man aus 1,

$$\text{Cos.}\, \alpha = \frac{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b^2 - \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}a^2}{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b^2} = 1 - \frac{\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}a^2}{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b^2},$$

folglich

$$1 - \text{Cos.}\,\alpha = 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}a^2}{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b^2},$$

und hieraus,

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}a}{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b}.$$

Ist das sphärische Dreyeck gleichseitig, so ist auch $a = b$, folglich $\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}$, und daher $\tfrac{1}{2}\alpha = 30°$, $\alpha = 60°$; wie auch seyn muß, weil in diesem Falle das Sehnendreyeck ebenfalls gleichseitig wird.

Zweyt. Zus. Wird in 2, $c' = b'$ gesetzt, so giebt dies

$$\text{Cos.}\,A = \frac{4b'^2 - 2a'^2 - b'^4}{b'^2\,(4 - b'^2)} = 1 - \frac{2a'^2}{b'^2\,(4 - b'^2)},$$

folglich

$$1 - \text{Cos.}\,A = 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{2a'^2}{b'^2\,(4 - b'^2)},$$

und daher,

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{a'}{b'\sqrt{(4 - b'^2)}}.$$

Für das gleichseitige Dreyeck ist $b' = a'$, folglich,

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{1}{\sqrt{(4 - a'^2)}}.$$

§ 51.

Aufg. In einem sphärischen Dreyecke kennet man einen Winkel und die Seiten, welche denselben einschließen: man soll den korrespondirenden Winkel des Sehnendreyecks finden.

Aufl. Nach § 52 IV. ist

$$\text{Cos. a} = \text{Cos. b Cos. c} + \text{Cos. A Sin. b Sin. c},$$

folglich

$$1 - \text{Cos. a} = 1 - \text{Cos. b Cos. c} - \text{Cos. A Sin. b Sin. c}.$$

Nun ist aber $1 - \text{Cos. a} = 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a^2$; $\text{Cos. b} = 1 - 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2$, $\text{Cos. c} = 1 - 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c^2$; $\text{Sin. b} = 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b$, $\text{Sin. c} = 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c$; man hat daher durch die Substitution dieser Werthe und durch die gehörige Reduktion,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a^2 = \begin{bmatrix} \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2 + \text{Sin.}\tfrac{1}{2}c^2 - 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c^2 \\ -2\,\text{Cos. A}\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c \end{bmatrix},$$

und wenn dieser Werth von $\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a^2$ in der Gleichung [φ] des vorigen §'s substituirt wird,

$$\text{Cos.}\,\alpha = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c + \text{Cos. A Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c.$$

Eben so hat man

$$\text{Cos.}\,\beta = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c + \text{Cos. B Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c,$$

$$\text{Cos.}\,\gamma = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b + \text{Cos. C Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b.$$

Zus. In dem gleichschenkligen Dreyecke, oder wenn a = b gesetzt wird, ist

$$\text{Cos.}\,\alpha = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2 + \text{Cos. A Cos.}\tfrac{1}{2}b^2 =$$
$$\text{Cos. A} + (1 - \text{Cos. A})\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2,$$

oder $2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2$ für $1 - \text{Cos. A}$ gesetzt,

$$\text{Cos.}\,\alpha = \text{Cos. A} + 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2.$$

§ 52.

Aufg. Zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel eines Sehnendreyecks sind gegeben: man soll den korrespondirenden sphärischen Winkel finden.

Aufl. Aus der ebenen Trigonometrie ist bekannt, daß in dem geradlinigen Dreyecke ABC, (Fig. 17),

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c'\,\text{Cos.}\,\alpha.$$

Substituirt man diesen Werth des a'^2 in die Gleichung (ψ) § 50, so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$\text{Cos. } A = \frac{4 \text{ Cos. } \alpha - b'c'}{\sqrt{(4 - b'^2)(4 - c'^2)}}.$$

Eben so findet man ferner,

$$\text{Cos. } B = \frac{4 \text{ Cos. } \beta - a'c'}{\sqrt{(4 - a'^2)(4 - c'^2)}}.$$

$$\text{Cos. } C = \frac{4 \text{ Cos. } \gamma - a'b'}{\sqrt{(4 - a'^2)(4 - b'^2)}}.$$

Zus. Wenn $b' = c'$, d. h. wenn das Sehnendreyeck, folglich auch das sphärische gleichschenklig ist, hat man,

$$\text{Cos. } A = \frac{4 \text{ Cos. } \alpha - b'^2}{4 - b'^2},$$

und daher

$$1 - \text{Cos. } A = \frac{4(1 - \text{Cos. } \alpha)}{4 - b'^2},$$

oder

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{4 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} \alpha^2}{4 - b'^2},$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} \alpha}{\sqrt{(2 + b')(2 - b')}};$$

welcher Ausdruck sich mit Hülfe der Logarithmen sehr leicht berechnen läßt.

Anmerk. Da Sin. $\tfrac{1}{2} b = \tfrac{1}{2} b'$ (§ 49), so ist Cos. $\tfrac{1}{2} b = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4} b'^2)}$, oder $2 \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} b = \sqrt{(4 - b'^2)}$. Demnach ist im gleichschenkligen Dreyecke,

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} \alpha}{\sqrt{(4 - b'^2)}} = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} \alpha}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2} b},$$

und $\quad \text{Sin. } \tfrac{1}{2} \alpha = \text{Cos. } \tfrac{1}{2} b \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} A;$

eine Gleichung, welche die Beziehung zwischen dem Scheitelwin-

kel des sphärischen gleichschenkligen Dreyecks, dem ihm korrespondirenden Winkel des Sehnendreyecks, und dem Schenkel des ersteren angiebt. Man siehet auch zugleich hieraus, daß der Scheitelwinkel eines sphärischen gleichschenkligen Dreyecks immer größer ist, als der Scheitelwinkel des Sehnendreyecks.

§ 53.

Aufg. In einem sphärischen Vierecke sind drey Seiten und die beyden von ihnen eingeschlossenen Winkel gegeben: man soll das Viereck bestimmen.

Aufl. In dem Vierecke ABCD (Fig. 18) sind gegeben, die drey Seiten AB = m, AC = n, BD = p, und die Winkel BAC = A, ABD = B.

1) In dem Dreyecke ABD kennet man alsdann die zwey Seiten m, p, und den von ihnen eingeschlossenen Winkel B, folglich auch die dritte Seite AD, und die Winkel BAD, ADB.

2) Hieraus ergiebt sich ferner der Winkel CAD = A — BAD.

3) Man hat also nunmehr in dem Dreyecke CDA zwey Seiten AC = n, und AD; folglich auch CD, und die Winkel ACD, ADC. Auch hat man den Winkel BDC = ADB + ADC. Es sind also alle Seiten und Winkel des Vierecks bekannt.

§ 54.

Aufg. Zwischen den vier Seiten eines sphärischen Vierecks und zwey gegenüber liegenden Winkeln desselben eine Gleichung zu finden, vermittelst welcher man im Stande ist, aus irgend fünf von den angegebenen Stücken das sechste zu finden.

Aufl. 1) Es sey ABDC (Fig. 18) das Viereck; m, n,

$$\text{Cos.}(2x-s) = \frac{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(s+b)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(s-b)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}B^2} + \text{Cos.}\,s,$$

woraus sich $2x - s$, und folglich auch x bestimmen läßt.

§. 44.

Aufg. Die Grundlinie eines sphärischen Dreyeckes, der Unterschied der beyden Winkel an derselben, und der Unterschied seiner Seiten ist gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. 1) In dem Dreyecke (Fig. 15) ist gegeben: $AC = b$, $BAC - ACB = f$, $BC - AB = g$. Die Unterschiede $A - C$, $a - c$, der Winkel und Seiten sind demnach gegeben; es kommt also bloß darauf an die Summen $A + C$, $a + c$, zu finden.

2) Hierzu dient nun die Formel

$$\text{Tang.}\frac{a-c}{2} = \text{Tang.}\frac{1}{2}b\,\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A-C)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A+C)}\ (\S.\ 32\ \text{XLIV}).$$

Denn setzt man hierin $A - C = f$, $a - c = g$, so erhält man:

$$\text{Sin.}\frac{1}{2}(A+C) = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}b\,\text{Sin.}\frac{1}{2}f}{\text{Sin.}\frac{1}{2}g},$$

woraus sich $A + C$ bestimmen läßt. Ich setze es $= h$

3) Werden die Gleichungen L, LI in § 32 durch einander dividirt, so erhält man,

$$\frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}(A-C)}{\text{Tang.}\frac{1}{2}(A+C)} = \frac{\text{Sin}\frac{1}{2}(a-c)\,\text{Cos.}\frac{1}{2}(a+c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a-c)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c)} = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}(a-c)}{\text{Tang.}\frac{1}{2}(a+c)};$$

oder, wenn für $A - C$, $a - c$, $A + C$, ihre Werthe f, g, h, gesetzt werden,

$$\text{Tang.}\frac{1}{2}(a+c) = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}g\,\text{Tang.}\frac{1}{2}h}{\text{Tang.}\frac{1}{2}f};$$

woraus sich $a + c$ bestimmen läßt.

4) Setzt man nun $a + c = l$; so erhält man $A = \frac{h + f}{2}$, $C = \frac{h - f}{2}$, $a = \frac{l + g}{2}$, $c = \frac{l - g}{2}$.

§ 45.

Aufg. Der Scheitelwinkel eines sphärischen Dreyecks und die Segmente, in welche das von der Spitze dieses Winkels auf die Grundlinie gezogene Perpendikel dieselbe theile, sind gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. 1) In dem Dreyecke ABC (Fig. 15) sey B der gegebene Scheitelwinkel; die gegebenen Segmente AD, CD, sollen m, n heißen; das unbekannte Perpendikel heiße, der Kürze wegen, p.

2) Da $ABD + DBC = B$ bekannt ist, so hängt alles davon ab, den Unterschied dieser Winkel Segmente, nämlich $ABD - DBC$ zu finden. Es sey daher $ABD - DBC = x$. Alsdann ist $ABD = \frac{B + x}{2}$, $DBC = \frac{B - x}{2}$.

3) In den rechtwinkeligen Dreyecken ABD, BDC, hat man demnach aus VIII. §. 33,

$$\text{Sin. } p = \text{Tang. } m \text{ Cot. } \tfrac{1}{2}(B + x)$$
$$\text{Sin. } p = \text{Tang. } n \text{ Cot. } \tfrac{1}{2}(B - x);$$

folglich $\text{Tang. } m \text{ Cot. } \tfrac{1}{2}(B + x) = \text{Tang. } n \text{ Cot. } \tfrac{1}{2}(B - x)$, oder

$$\frac{\text{Tang. } m}{\text{Tang. } n} = \frac{\text{Cot. } \tfrac{1}{2}(B - x)}{\text{Cot. } \tfrac{1}{2}(B + x)} = \frac{\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(B + x)}{\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(B - x)}.$$

4) Nach (§. 36) ist aber

$$\frac{\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(B + x)}{\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(B - x)} = \frac{\text{Sin. } B + \text{Sin. } x}{\text{Sin. } B - \text{Sin. } x},$$

man hat also

$$\frac{\text{Tang.}\, m}{\text{Tang.}\, n} = \frac{\text{Sin. B} + \text{Sin. x}}{\text{Sin. B} - \text{Sin. x}},$$

woraus man erhält,

$$\text{Sin. x} = \frac{\text{Tang.}\, m - \text{Tang.}\, n}{\text{Tang.}\, m + \text{Tang.}\, n}\ \text{Sin. B},$$

oder,

$$\text{Sin. x} = \frac{\text{Sin.}\,(m - n)}{\text{Sin.}\,(m + n)}\ \text{Sin. B}.\ (\text{§. 42.})$$

Zusatz. Aus dieser Gleichung ergiebt sich der schöne Lehrsatz:

Daß in jedem sphärischen Dreyecke, wenn von einem Winkel desselben auf die gegenüber liegende Seite ein Perpendikel herabgelassen wird, der Sinus dieser Seite sich zum Sinus der Differenz ihrer Segmente eben so verhalte, wie der Sinus des Winkels zum Sinus der Differenz seiner Segmente.

§. 46.

Aufg. Aus irgend einer Spitze eines sphärischen Dreyeckes, dessen drey Seiten gegeben sind, wird ein Bogen eines größten Kreises nach der gegenüber liegenden Seite gezogen; die Segmente derselben sind gegeben: man soll den Bogen finden.

Aufl. 1) Es seyen, wie immer, a, b, c, die drey gegebenen Seiten des Dreyeckes ABC (Fig. 15); AD = m, das gegebene Segment; BD = x der gesuchte Bogen.

2) Nach §. 32 IV erhält man aus dem Dreyecke ABC,

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b Cos. c}}{\text{Sin. b Sin. c}},$$

und aus dem Dreyecke ABD,

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. x} - \text{Cos. c Cos. m}}{\text{Sin. c Sin. m}},$$

3) Setzt man diese beyden Werthe des Cos. A einander gleich, so entstehet die Gleichung

$$\frac{\text{Cos. } x - \text{Cos. } c \text{ Cos. } m}{\text{Sin. } c \text{ Sin. } m} = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c};$$

und hieraus ergiebt sich,

$$\text{Cos. } x = (\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c) \frac{\text{Sin. } m}{\text{Sin. } b} + \text{Cos. } c \text{ Cos. } m,$$

woraus sich x bestimmen läßt.

§ 47.

Aufg. Die drey Seiten eines sphärischen Dreyeckes sind gegeben; auf einer dieser Seiten wird irgend ein Punkt angenommen, und aus demselben nach einem gegebenen Punkte auf einer anderen Seite des Dreyeckes ein Bogen gezogen: man soll diesen Bogen finden.

Aufl. 1) Es seyen a, b, c, die drey Seiten des Dreyeckes ABC (Fig. 16); b′, c′, die gegebenen Segmente AH, AG; der gesuchte Bogen GH = x.

2) Man hat alsdann im Dreyecke ABC,

$$\text{Cos. } A = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c},$$

und im Dreyecke AGH,

$$\text{Cos. } A = \frac{\text{Cos. } x - \text{Cos. } b' \text{ Cos. } c'}{\text{Sin. } b' \text{ Sin. } c'}.$$

3) Hieraus ergiebt sich die Gleichung,

$$\frac{\text{Cos. } x - \text{Cos. } b' \text{ Cos. } c'}{\text{Sin. } b' \text{ Sin. } c'} = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c};$$

demnach ist,

$$\text{Cos. } x = (\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c) \frac{\text{Sin. } b' \text{ Sin. } c'}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c} + \text{Cos. } b' \text{ Cos. } c';$$

woraus sich x bestimmen läßt.

§ 48.

Werden in einem sphärischen Dreyecke ABC (Fig. 17) die Sehnen AB, AC, BC, der eben so benannten Bogen gezogen, so schließen diese graden Linien ein Dreyeck ein, welches ich, der Kürze wegen, das Sehnendreyeck des sphärischen nennen will; die Seiten und Winkel des ersteren, so wie sie den Seiten und Winkeln a, b, c, A, B, C, des letzteren korrespondiren, sollen durch die Buchstaben a', b', c', α, β, γ, bezeichnet werden. In welcher Beziehung das sphärische Dreyeck mit seinem Sehnendreyeck stehet, werden die folgenden Aufgaben zeigen.

§ 49.

Aufg. Aus den gegebenen Seiten eines sphärischen Dreyecks die Seiten des Sehnendreyecks zu finden, und umgekehrt, jene zu finden, wenn diese gegeben sind.

Aufl. 1) Die Sehne eines Bogens ist bekanntlich, den Halbmesser desselben für die Einheit angenommen, immer doppelt so groß als der Sinus seiner Hälfte. Man hat demnach,

$$a' = 2 \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2} a, \quad b' = 2 \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2} b, \quad c' = 2 \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2} c.$$

Vermittelst dieser Gleichungen lassen sich die Seiten des Sehnendreyeckes aus den Seiten des sphärischen bestimmen.

2) Umgekehrt hat man

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} a', \quad \text{Sin.} \tfrac{1}{2} b = \tfrac{1}{2} b', \quad \text{Sin.} \tfrac{1}{2} c = \tfrac{1}{2} c';$$

oder, da $\text{Cos.}\, \varphi = 1 - 2 \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \varphi^2$,

$$\text{Cos.}\, a = 1 - \tfrac{1}{2} a'^2, \quad \text{Cos.}\, b = 1 - \tfrac{1}{2} b'^2, \quad \text{Cos.}\, c = 1 - \tfrac{1}{2} c'^2.$$

Vermittelst dieser Gleichungen lassen sich die Seiten des sphärischen Dreyecks aus den Seiten des Sehnendreyecks finden.

§ 50.

Aufg. Aus den gegebenen Seiten des sphärischen Dreyecks die Winkel des Sehnendreyecks, und umgekehrt,

aus den gegebenen Seiten des Sehnendreyecks die Winkel des sphärischen zu bestimmen.

Aufl. 1) Aus der ebenen Trigonometrie ist bekannt, daß

$$\text{Cos. } \alpha = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2\, b'c'}.$$

Werden hierin für a', b', c', ihre Werthe aus 1 § 49 substituirt, so erhält man

$$\text{Cos. } \alpha = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\, b^2 + \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\, c^2 - \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\, a^2}{2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\, b \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\, c} \ldots [\varphi].$$

Eben so wird gefunden,

$$\text{Cos. } \beta = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\, a^2 + \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\, c^2 - \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\, b^2}{2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\, a \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\, c},$$

$$\text{Cos. } \gamma = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\, a^2 + \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\, b^2 - \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\, c^2}{2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\, a \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\, b}.$$

2) Aus § 32 IV. hat man

$$\text{Cos. } A = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \text{ Cos. } c}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c}.$$

Nun ist (§ 49. 2) $\text{Cos. } a = 1 - \tfrac{1}{2} a'^2$, $\text{Cos. } b = 1 - \tfrac{1}{2} b'^2$, $\text{Cos. } c = 1 - \tfrac{1}{2} c'^2$; folglich $\text{Sin. } b = \sqrt{[1 - (1 - \tfrac{1}{2} b'^2)^2]} = b' \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4} b'^2)}$, $\text{Sin. } c = \sqrt{[1 - (1 - \tfrac{1}{2} c'^2)^2]} = c' \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4} c'^2)}$; werden diese Werthe substituirt, und hierauf Zähler und Nenner mit 4 multiplicirt, so erhält man,

$$\text{Cos. } A = \frac{2 b'^2 + 2 c'^2 - 2 a'^2 - b'^2 c'^2}{b'c' \sqrt{(4 - b'^2)(4 - c'^2)}} \ldots [\psi],$$

$$\text{Cos. } B = \frac{2 a'^2 + 2 c'^2 - 2 b'^2 - a'^2 c'^2}{a'c' \sqrt{(4 - a'^2)(4 - c'^2)}},$$

$$\text{Cos. } C = \frac{2 a'^2 + 2 b'^2 - 2 c'^2 - a'^2 b'^2}{a'b' \sqrt{(4 - a'^2)(4 - b'^2)}}.$$

Erst. Zusatz. Ist das sphärische Dreyeck gleichschenkelig, und z. B. $c = b$, so erhält man aus 1,

$$\mathrm{Cos.}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}b^2 - \mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}a^2}{2\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}b^2} = 1 - \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}a^2}{2\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}b^2},$$

folglich

$$1 - \mathrm{Cos.}\,\alpha = 2\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}a^2}{2\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}b^2},$$

und hieraus,

$$\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}a}{2\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}b}.$$

Ist das sphärische Dreyeck gleichseitig, so ist auch $a = b$, folglich $\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$, und daher $\frac{1}{2}\alpha = 30°$, $\alpha = 60°$; wie auch seyn muß, weil in diesem Falle das Sehnendreyeck ebenfalls gleichseitig wird.

Zweyt. Zus. Wird in 2, $c' = b'$ gesetzt, so giebt dies

$$\mathrm{Cos.}\,A = \frac{4b'^2 - 2a'^2 - b'^4}{b'^2(4 - b'^2)} = 1 - \frac{2a'^2}{b'^2(4 - b'^2)},$$

folglich

$$1 - \mathrm{Cos.}\,A = 2\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{2a'^2}{b'^2(4 - b'^2)},$$

und daher,

$$\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{a'}{b'\sqrt{(4 - b'^2)}}.$$

Für das gleichseitige Dreyeck ist $b' = a'$, folglich,

$$\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{1}{\sqrt{(4 - a'^2)}}.$$

§ 51.

Aufg. In einem sphärischen Dreyecke kennet man einen Winkel und die Seiten, welche denselben einschließen: man soll den korrespondirenden Winkel des Sehnendreyecks finden.

Aufl. Nach § 52 IV. ist

$$\text{Cos.}\, a = \text{Cos.}\, b\, \text{Cos.}\, c + \text{Cos.}\, A\, \text{Sin.}\, b\, \text{Sin.}\, c,$$

folglich

$$1 - \text{Cos.}\, a = 1 - \text{Cos.}\, b\, \text{Cos.}\, c - \text{Cos.}\, A\, \text{Sin.}\, b\, \text{Sin.}\, c.$$

Nun ist aber $1 - \text{Cos.}\, a = 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} a^2$; $\text{Cos.}\, b = 1 - 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} b^2$, $\text{Cos.}\, c = 1 - 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} c^2$; $\text{Sin.}\, b = 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} b\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} b$, $\text{Sin.}\, c = 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} c\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} c$; man hat daher durch die Substitution dieser Werthe und durch die gehörige Reduktion,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} a^2 = \left[\begin{array}{l} \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} b^2 + \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} c^2 - 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} b^2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} c^2 \\ - 2\, \text{Cos.}\, A\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} b\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} b\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} c\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} c \end{array}\right],$$

und wenn dieser Werth von $\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} a^2$ in der Gleichung [φ] des vorigen §'s substituirt wird,

$$\text{Cos.}\, \alpha = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} b\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} c + \text{Cos.}\, A\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} b\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} c.$$

Eben so hat man

$$\text{Cos.}\, \beta = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} a\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} c + \text{Cos.}\, B\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} a\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} c,$$

$$\text{Cos.}\, \gamma = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} a\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} b + \text{Cos.}\, C\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} a\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} b.$$

Zus. In dem gleichschenkligen Dreyecke, oder wenn $a = b$ gesetzt wird, ist

$$\text{Cos.}\, \alpha = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} b^2 + \text{Cos.}\, A\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} b^2 =$$
$$\text{Cos.}\, A + (1 - \text{Cos.}\, A)\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} b^2,$$

oder $2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} A^2$ für $1 - \text{Cos.}\, A$ gesetzt,

$$\text{Cos.}\, \alpha = \text{Cos.}\, A + 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} b^2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} A^2.$$

§ 52.

Aufg. Zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel eines Sehnendreyecks sind gegeben: man soll den korrespondirenden sphärischen Winkel finden.

Aufl. Aus der ebenen Trigonometrie ist bekannt, daß in dem geradlinigen Dreyecke ABC, (Fig. 17),

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2 b' c'\, \text{Cos.}\, \alpha.$$

Substituirt man diesen Werth des a'^2 in die Gleichung (ψ) § 50, so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$\text{Cos. } A = \frac{4 \text{ Cos. } \alpha - b'c'}{\sqrt{(4 - b'^2)(4 - c'^2)}}.$$

Eben so findet man ferner,

$$\text{Cos. } B = \frac{4 \text{ Cos. } \beta - a'c'}{\sqrt{(4 - a'^2)(4 - c'^2)}}.$$

$$\text{Cos. } C = \frac{4 \text{ Cos. } \gamma - a'b'}{\sqrt{(4 - a'^2)(4 - b'^2)}}.$$

Zus. Wenn $b' = c'$, d. h. wenn das Sehnendreyeck, folglich auch das sphärische gleichschenkelig ist, hat man,

$$\text{Cos. } A = \frac{4 \text{ Cos. } \alpha - b'^2}{4 - b'^2},$$

und daher

$$1 - \text{Cos. } A = \frac{4(1 - \text{Cos. } \alpha)}{4 - b'^2},$$

oder

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{4 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} \alpha^2}{4 - b'^2},$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} \alpha}{\sqrt{(2 + b')(2 - b')}};$$

welcher Ausdruck sich mit Hülfe der Logarithmen sehr leicht berechnen läßt.

Anmerk. Da $\text{Sin. } \tfrac{1}{2} b = \tfrac{1}{2} b'$ (§ 49), so ist $\text{Cos. } \tfrac{1}{2} b = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4} b'^2)}$, oder $2 \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} b = \sqrt{(4 - b'^2)}$. Demnach ist im gleichschenkligen Dreyecke,

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} \alpha}{\sqrt{(4 - b'^2)}} = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} \alpha}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2} b},$$

und $\qquad \text{Sin. } \tfrac{1}{2} \alpha = \text{Cos. } \tfrac{1}{2} b \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} A;$

eine Gleichung, welche die Beziehung zwischen dem Scheitelwin-

kel des sphärischen gleichschenkligen Dreyecks, dem ihm korrespondirenden Winkel des Sehnendreyecks, und dem Schenkel des ersteren angiebt. Man siehet auch zugleich hieraus, daß der Scheitelwinkel eines sphärischen gleichschenkligen Dreyecks immer grösser ist, als der Scheitelwinkel des Sehnendreyecks.

§ 53.

Aufg. In einem sphärischen Vierecke sind drey Seiten und die beyden von ihnen eingeschlossenen Winkel gegeben: man soll das Viereck bestimmen.

Aufl. In dem Vierecke ABCD (Fig. 18) sind gegeben, die drey Seiten $AB = m$, $AC = n$, $BD = p$, und die Winkel $BAC = A$, $ABD = B$.

1) In dem Dreyecke ABD kennet man alsdann die zwey Seiten m, p, und den von ihnen eingeschlossenen Winkel B, folglich auch die dritte Seite AD, und die Winkel BAD, ADB.

2) Hieraus ergiebt sich ferner der Winkel $CAD = A - BAD$.

3) Man hat also nunmehr in dem Dreyecke CDA zwey Seiten $AC = n$, und AD; folglich auch CD, und die Winkel ACD, ADC. Auch hat man den Winkel $BDC = ADB + ADC$. Es sind also alle Seiten und Winkel des Vierecks bekannt.

§ 54.

Aufg. Zwischen den vier Seiten eines sphärischen Vierecks und zwey gegenüber liegenden Winkeln desselben eine Gleichung zu finden, vermittelst welcher man im Stande ist, aus irgend fünf von den angegebenen Stücken das sechste zu finden.

Aufl. 1) Es sey ABDC (Fig. 18) das Viereck; m, n,

p, q, seine vier Seiten; BAC = A, BDC = D, zwey Gegenwinkel desselben.

2) Die Seiten m, n, und der eingeschlossene Winkel A des Dreyecks ABC geben:

$$\text{Cos. BC} = \text{Cos. m Cos. n} + \text{Sin. m Sin. n Cos. A},$$

und die Seiten p, q, und der eingeschlossene Winkel D des Dreyecks DBC,

$$\text{Cos. BC} = \text{Cos. p Cos. q} + \text{Sin. p Sin. q Cos. D}.$$

3) Man hat also die Gleichung:

$$\text{Cos. m Cos. n} + \text{Sin. m Sin. n Cos. A} =$$
$$\text{Cos. p Cos. q} + \text{Sin. p Sin. q Cos. D},$$

woraus sich, wenn fünf Stücke gegeben sind, das sechste bestimmen läßt.

Zus. Die Anwendung dieser Gleichung hat keine Schwierigkeit, wenn einer der Winkel A, D, aus den übrigen Stücken gesucht wird; um aber eine der Seiten, etwa m zu finden, wenn alles Uebrige gegeben ist, kann man sich eines, schon oft angewandten Mittels bedienen. Man dividire nämlich die Gleichung durch Cos. n, und setze,

$$\frac{\text{Sin. n Cos. A}}{\text{Cos. n}} = \text{Tang. n Cos. A} = \text{Tang. } \mu;$$

alsdann ist μ ein Winkel, welcher sich leicht finden läßt, und die Gleichung in 3 verwandelt sich in folgende:

$$\text{Cos. m} + \text{Tang. } \mu \text{ Sin. m} = \frac{\text{Cos. p Cos. q} + \text{Sin. p Sin. q Cos. D}}{\text{Cos. n}},$$

oder $$\text{Cos. m Cos. } \mu + \text{Sin. m Sin. } \mu =$$

$$(\text{Cos. p Cos. q} + \text{Sin. p Sin. q Cos. D}) \frac{\text{Cos. } \mu}{\text{Cos. n}},$$

oder $$\text{Cos. } (m - \mu) = (\text{Cos. p Cos. q} + \text{Sin. p Sin. q Cos. D}) \frac{\text{Cos } \mu}{\text{Cos. n}}.$$

Hieraus läßt sich nun $m - \mu$, und folglich, da μ bekannt ist, auch m bestimmen.

§ 55.

Aufg. Zwischen den vier Seiten eines sphärischen Vierecks und seinen beyden Diagonalen eine Gleichung zu finden.

Aufl. 1) Es sey ABDC (Fig. 18) das sphärische Viereck; AD, BC, seine beyden Diagonalen. Man setze, der Kürze wegen, $AB = m$, $AC = n$, $BD = p$, $CD = q$, $AD = r$, $BC = s$, $\angle BAC = A$, $\angle BAD = A'$, $\angle CAD = A''$.

2) Da $A = A' + A''$, so ist

$$\text{Cos.}\, A = \text{Cos.}\, A' \,\text{Cos.}\, A'' - \text{Sin.}\, A' \,\text{Sin.}\, A'';$$

daher

$$\text{Sin.}\, A' \,\text{Sin.}\, A'' = \text{Cos.}\, A' \,\text{Cos.}\, A'' - \text{Cos.}\, A.$$

Wird das, was sich auf jeder Seite des Gleichheitszeichens befindet, quadrirt; hierauf $1 - \text{Cos.}\, A'^2$, $1 - \text{Cos.}\, A''^2$ für $\text{Sin.}\, A'^2$, $\text{Sin.}\, A''^2$ gesetzt, so erhält man nach gehöriger Reduktion,

$$1 + 2\,\text{Cos.}\, A \,\text{Cos.}\, A' \,\text{Cos.}\, A'' = \text{Cos.}\, A^2 + \text{Cos.}\, A'^2 + \text{Cos.}\, A''^2.$$

3) Die Dreyecke BAC, BAD, CAD, geben aber,

$$\text{Cos.}\, A = \frac{\text{Cos.}\, s - \text{Cos.}\, m \,\text{Cos.}\, n}{\text{Sin.}\, m \,\text{Sin.}\, n},$$

$$\text{Cos.}\, A' = \frac{\text{Cos.}\, p - \text{Cos.}\, m \,\text{Cos.}\, r}{\text{Sin.}\, m \,\text{Sin.}\, r},$$

$$\text{Cos.}\, A'' = \frac{\text{Cos.}\, q - \text{Cos.}\, n \,\text{Cos.}\, r}{\text{Sin.}\, n \,\text{Sin.}\, r}.$$

4) Werden daher diese Werthe in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält man:

$$\text{Sin. } m^2 \text{ Sin. } n^2 \text{ Sin. } r^2 + 2 (\text{Cos. } p - \text{Cos. } m \text{ Cos. } r)(\text{Cos. } q - \text{Cos. } n \text{ Cos. } r)(\text{Cos. } s - \text{Cos. } m \text{ Cos. } n) = \text{Sin. } m^2 (\text{Cos. } q - \text{Cos. } n \text{ Cos. } r)^2 + \text{Sin. } n^2 (\text{Cos. } p - \text{Cos. } m \text{ Cos. } r)^2 + \text{Sin. } r^2 (\text{Cos. } s - \text{Cos. } m \text{ Cos. } n)^2.$$

6) Man setze noch $1 - \text{Cos. } m^2$, $1 - \text{Cos. } n^2$, $1 - \text{Cos. } r^2$ für $\text{Sin. } m^2$, $\text{Sin. } n^2$, $\text{Sin. } r^2$; dadurch entstehet nach der Reduktion,

$$1 - (\text{Cos. } m^2 + \text{Cos. } n^2 + \text{Cos. } p^2 + \text{Cos. } q^2 + \text{Cos. } r^2 + \text{Cos. } s^2) + (\text{Cos. } m^2 \text{ Cos. } q^2 + \text{Cos. } n^2 \text{ Cos. } p^2 + \text{Cos. } r^2 \text{ Cos. } s^2) + \begin{pmatrix} 2 \text{ Cos. } m \text{ Cos. } n \text{ Cos. } s + 2 \text{ Cos. } m \text{ Cos. } p \text{ Cos. } r \\ + 2 \text{ Cos. } n \text{ Cos. } q \text{ Cos. } r + 2 \text{ Cos. } p \text{ Cos. } q \text{ Cos. } s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \text{ Cos. } m \text{ Cos. } n \text{ Cos. } p \text{ Cos. } q + 2 \text{ Cos. } m \text{ Cos. } q \text{ Cos. } r \text{ Cos. } s \\ + 2 \text{ Cos. } n \text{ Cos. } p \text{ Cos. } r \text{ Cos. } s \end{pmatrix} = 0.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nun jedesmal, wenn fünf von den im Satze erwähnten Stücken gegeben sind, das sechste durch die Auflösung einer quadratischen Gleichung bestimmen.

§ 56.

Es sey P (Fig. 19) irgend ein Punkt auf der Kugelfläche, aus welchem die gleichen Bogen größter Kreise PA, PB, PC, PD, PE, unter gleichen Winkeln APB, BPC, CPD, u. s. w. gezogen worden. Werden nun die Endpunkte A, B, C, u. s. w. durch die Bogen größter Kreise AB, BC, CD, u. s. w. verbunden, so entstehet ein sphärisches Vieleck von gleichen Seiten AB, BC, CD, u. s. w. und gleichen Winkeln ABC, BCD, CDE, u. s. w. Denn die Dreyecke APB, BPC, u. s. w. sind gleich und gleichschenklicht; folglich sind die Winkel ABP, CBP, BCP, DCP, u. s. w. alle einander gleich; jede zwey dieser Winkel geben aber einen Winkel des Vielecks.

Ein solches Vieleck von gleichen Seiten und Winkeln, heißt ein reguläres sphärisches Vieleck. Die Eckpunkte des

selben, A, B, C, u. s. w. liegen in einem Kreise, dessen Pol P ist. Verbindet man diese Punkte durch gerade Linien, so entstehet ein reguläres geradliniges Vieleck von eben so vielen Seiten als das sphärische hat.

§. 57.

Aufg. Die Anzahl der Seiten eines regulären sphärischen Vielecks ist gegeben: man soll eine Gleichung zwischen seiner Seite und seinem Polygonwinkel finden, durch welche man im Stande ist, das eine aus dem anderen zu bestimmen.

Aufl. 1) Es sey die Anzahl der Seiten des Vielecks ABCDE (Fig. 19) $= n$; so ist, weil alle Winkel um den Pol P herum zusammen 4 rechte Winkel oder 360° ausmachen, jeder derselben $= \frac{360^\circ}{n}$; wofür ich, der Kürze wegen, α setzen will.

2) Jede von den gleichen Seiten des Vielecks heiße η, jeder Polygonwinkel, wie BAE, heiße θ, und jeder von den, aus dem Punkte P nach den Ecken gezogenen Bogen, wie PA, heiße φ; dieser Bogen halbiret den Polygonwinkel, folglich ist $BAP = \frac{1}{2}\theta$.

3) Man halbire nun den Winkel APB ($= \alpha$) durch den Bogen PQ; so wird dadurch, weil das Dreyeck APB gleichschenkelig ist, auch die Seite AB halbirt, und PQ stehet senkrecht auf AB. Es ist daher $APQ = \frac{1}{2}\alpha$, $AQ = \frac{1}{2}\eta$.

4) In jedem Dreyecke verhalten sich die Sinusse der Winkel, wie die Sinusse der ihnen gegenüber liegenden Seiten; man hat also aus dem Dreyecke APB,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \frac{\text{Sin.}\,\eta\ \text{Sin.}\,\frac{1}{2}\theta}{\text{Sin.}\,\alpha},$$

und aus dem bey Q rechtwinkeligen Dreyecke APQ,

$$\text{Sin.}\ \varphi = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\alpha}.$$

5) Werden diese beyden Ausdrücke von Sin. φ einander gleich gesetzt, so entstehet die Gleichung,

$$\frac{\text{Sin.}\ \eta\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}\epsilon}{\text{Sin.}\ \alpha} = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\alpha};$$

oder, da $\text{Sin.}\ \eta = 2\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}\eta\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\eta$, $\text{Sin.}\ \alpha = 2\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}\alpha\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\alpha$, folgende:

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\epsilon = \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \text{Cos.}\ \frac{180^\circ}{n}.$$

6) Vermittelst dieser Gleichung läßt sich ϵ bestimmen, wenn η gegeben ist, und umgekehrt. Man hat nämlich

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\epsilon = \frac{\text{Cos.}\ \frac{180^\circ}{n}}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\eta},\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\ \frac{180^\circ}{n}}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\epsilon}.$$

Zus. Will man wissen, wie groß der Bogen PA = PB = PC = u. s. w. genommen werden muß, wenn die Seite des Vielecks eine gegebene Größe haben soll; so darf man nur in der Gleichung $\text{Sin.}\ \varphi = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\alpha}$ aus 4, für η seinen Werth setzen, so erhält man φ. Ist der Polygonwinkel ϵ gegeben, so berechne man zuerst die Seite η; das Uebrige wie vorher.

IV. Flächeninhalt der sphärischen Dreyecke und Vielecke.

§ 58.

Hülfssätze.

I. Wenn sich zwey größte Kreise einer Kugel, AMBP, ANBQ, (Fig. 30) einander schneiden, so verhalten sich die gleichen, auf der Oberfläche der Kugel entstehenden Streifen AMBNA, APBQA zur ganzen Kugelfläche, wie der Neigungswinkel der beyden Kreisebenen zu vier rechten Winkeln.

Auf den Durchmesser AB, worin sich die beyden Kreise schneiden, setze man den größten Kreis MNPQ senkrecht, und ziehe die Durchmesser MP, NQ; alsdann ist MCN der Neigungswinkel der Kreise AMBP, ANBQ, und der Bogen MN das Maaß desselben. Es kommt demnach bloß darauf an, zu beweisen, daß der Streifen AMBNA sich zur ganzen Kugelfläche wie der Bogen MN zur Peripherie MNPQ verhalte.

Ist nun dies Verhältniß rational; so kann man MN : MNPQ = m : n setzen, und m, n, ganze Zahlen seyn lassen. Man denke sich alsdann die Peripherie MNPQ in n gleiche Theile getheilt, deren also m auf MN gehen werden; ferner durch diese Theilungspunkte und den Durchmesser AB größte Kreise gelegt; so wird hierdurch die ganze Kugelfläche in n gleiche Streifen abgetheilt, deren m den Streifen AMBNA ausmachen, und es verhält sich daher dieser Streifen zur Kugelfläche wie m zu n, d. h. wie der Bogen MN zur Peripherie MNPQ.

Ist aber das Verhältniß MN : MNPQ nicht rational, so läßt sich der Beweis auf die bekannte Art vermittelst der Exhaustions-Methode führen.

II. Wenn durch eine Kugel nach Willkühr drey größte Kreise (Fig. 21) AMBP, ANBQ, MNPQ, gelegt werden; so ist die Summe der, in derselben Halbkugel liegenden, sphärischen Dreyecke AMN, APQ, jedesmal dem Streifen AMBNA gleich.

Denn es ist Halbkreis APB = Halbkreis MBP; folglich APB − BP = MBP − BP, d. h. AP = BM. Auf eine ähnliche Art wird bewiesen, daß BN = AQ, MN = PQ. Die sphärischen Dreyecke BMN, APQ, haben demnach gleiche Seiten, wie auch gleiche Winkel; folglich sind sie einander gleich. Demnach ist AMN + APQ = AMN + BMN = Streifen AMBNA.

Zus. Aus diesem und dem vorhergehenden Satze folgt, daß die Summe der beyden sphärischen Dreyecke MAN, PAQ, sich zur ganzen Kugelfläche, wie der sphärische Winkel MAN, (der dem Neigungswinkel der Kreisflächen AMBP, ANBQ, gleich ist,) zu vier rechten Winkeln verhält.

Bezeichnet man daher die Kugelfläche durch S, die Summe der Dreyecke MAN, PAQ, durch s, und den Winkel MAN durch A, so ist, wenn dieser Winkel in Graden gegeben ist, $s = \frac{A}{360^\circ} . S$.

§ 59.

Aufg. Die drey Winkel eines sphärischen Dreyeckes sind gegeben: man soll den Flächeninhalt desselben finden.

Aufl. 1) Es sey ABC (Fig. 22) das sphärische Dreyeck, DFGI irgend ein größter Kreis außerhalb desselben, und die

Seiten des Dreyecks so weit verlängert, bis sie die Periphe- rie dieses Kreises treffen.

2) Alsdann ist nach dem vorigen §,

$$\triangle HAG + \triangle DAE = \frac{A}{360^\circ} . S;$$

und eben so,

$$\triangle DBI + \triangle FBG = \frac{B}{360^\circ} . S,$$

$$\triangle FCE + \triangle HCI = \frac{C}{360^\circ} . S;$$

folglich,

$$\left[\begin{array}{l}\triangle HAG + \triangle DBI + \triangle FCE \\ + \triangle DAE + \triangle FBG + \triangle HCI\end{array}\right] = \frac{A+B+C}{360^\circ} . S.$$

3) Die Summe der Dreyecke zur Linken dieser Gleichung übertrifft die Halbkugel um das doppelte Dreyeck ABC; folg- lich. ist

$$\tfrac{1}{2} S + 2 \triangle ABC = \frac{A+B+C}{360^\circ} . S,$$

und daher,

$$\triangle ABC = \frac{A+B+C-180^\circ}{720^\circ} . S.$$

Zusatz. Aus diesem Resultate ergiebt sich der folgen- de Satz:

Jedes Kugeldreyeck verhält sich zur ganzen Kugelflä- che, wie der Ueberschuß der Summe seiner drey Win- kel über zwey Rechte, zu acht Rechten.

Beyspiel. Es sey $A = 43^\circ\, 20'$, $B = 79^\circ\, 9'\, 59''$, $C = 82^\circ\, 34'\, 6''$; hier ist, $A + B + C - 180^\circ = 25^\circ\, 4'\, 5''$, und daher,

$$\triangle ABC = \frac{25^\circ\, 4'\, 5''}{720^\circ} . S;$$

oder, wenn man die Grade und Minuten in Sekunden verwandelt,

$$\triangle ABC = \frac{90246}{2592000} ; S = 0,0348167 \cdot S.$$

§ 60.

Aufg. Den Flächeninhalt eines sphärischen Vielecks aus seinen Winkeln zu finden.

Aufl. Es sey ABCDE (Fig. 23) irgend ein Vieleck, und aus einem Winkel desselben, A, nach allen anderen Winkeln die Diagonalen AC, AD, gezogen; so wird hierdurch das Vieleck in so viele Dreyecke zerlegt, als es Seiten weniger zwey hat.

Es sey nun s die Summe der Winkel des Vielecks, s', s'', s''', ꝛc., die Summen der Winkel in den Dreyecken, worin es zerlegt worden, n die Anzahl seiner Seiten; so ist (§ 59)

$$\triangle ABC = \frac{s' - 180^0}{720^0} S,$$

$$\triangle ACD = \frac{s'' - 180^0}{720^0} S,$$

$$\triangle ADE = \frac{s''' - 180^0}{720^0} S,$$

u. s. w.

folglich

$$\text{Polyg. } ABCDE \ldots = [s' + s'' + s''' + \ldots + (n-2) 180^0] \frac{S}{720^0};$$

oder da $s' + s'' + s''' + \ldots = s$,

$$\text{Polyg. } ABCDE \ldots = \frac{s - (n-2) 180^0}{720^0} S.$$

Zus. Es bezeichne Σ die Summe aller äußeren Winkel

der sphärischen Figur. Alsdann ist $s + \Sigma = n.\,180^\circ$, und $s = n.\,180^\circ - \Sigma$; folglich,

$$\text{Polyg. ABCDE} \ldots = \frac{360^\circ - \Sigma}{720^\circ}\,S.$$

D. h. Das Vieleck verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie die Differenz zwischen vier rechten Winkeln und der Summe aller äußeren Winkel des Vielecks, zu acht rechten Winkeln.

§. 61.

Aufg. Aus der gegebenen Seite eines regulären sphärischen Vielecks den Flächeninhalt desselben zu finden.

Aufl. Es sey η die gegebene Seite des Vielecks, θ der unbekannte Polygonwinkel desselben. Diesen Winkel erhält man aus der Gleichung (§ 57)

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\text{Cos.}\frac{180^\circ}{n}}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\eta}.$$

Hat man aus dieser Gleichung den Winkel θ gefunden, so darf man nur in § 60 $n\theta$ statt s setzen; man erhält alsdann, wenn q den Flächeninhalt des Vielecks bezeichnet,

$$q = \frac{n\theta - (n - 2)\,180^\circ}{720^\circ}\,S;$$

oder auch, wenn θ' den äußeren Winkel des Vielecks bezeichnet,

$$q = \frac{360^\circ - n\theta'}{720^\circ}\,S.$$

Beysp. Für das Kugelquadrat, d. h. für das sphärische Viereck, welches lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, ist $n = 4$. Es sey nun die Seite dieses Quadrates $= 1^\circ$, und der Flächeninhalt eines solchen Quadratgrades zu finden. Hier ist $\eta = 1^\circ$, und daher nach obiger Formel

$\text{Sin.} \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\text{Cos. } 45^\circ}{\text{Cos. } 30'}$. Hieraus findet man $\frac{1}{2} \varepsilon = 45^\circ \ 0' \ 8''$ beynahe; folglich $q = \frac{64}{720 \cdot 3600} S = \frac{1}{40500} S$. Das Kugelquadrat, dessen Seite $= 1^\circ$, ist demnach in der ganzen Kugelfläche ungefähr 40500 mal enthalten.

§ 62.

Aufg. Ein reguläres sphärisches Vieleck von einer bestimmten Anzahl der Seiten zu finden, von welchem die Kugelfläche ein gegebenes Vielfaches ist.

Aufl. Angenommen, das Vieleck solle der mte Theil der Kugelfläche seyn; so hat man, (§ 61),

$$\frac{n\varepsilon - (n-2)\,180^\circ}{720^\circ} S = \frac{1}{m} S,$$

und daher

$$\varepsilon = \frac{720^\circ}{mn} + \frac{n-2}{n} 180^\circ.$$

Hat man hieraus den Winkel ε bestimmt, so hat man auch η, oder die Seite des Vielecks, aus der Gleichung,

$$\text{Cos} \frac{1}{2} \eta = \frac{\text{Cos.} \frac{180^\circ}{n}}{\text{Sin.} \frac{1}{2} \varepsilon}.$$

Anmerk. Es verdient hierbey bemerkt zu werden, daß, wenn auch die Kugelfläche ein Vielfaches irgend eines sphärischen Vieleckes ist, doch noch keinesweges daraus folge, daß sich die Kugelfläche ganz mit solchen Vielecken belegen lasse, oder daß sich aus diesen Vielecken ein Netz verfertigen lasse, womit die ganze Kugelfläche bedeckt werden könne; denn das eine folgt eben so wenig aus dem anderen, als sich daraus, daß ein Dreyeck der hunderte Theil eines Quadrates ist, schliessen läßt, es können hundert solche Dreyecke in das Quadrat

gesetzt

gesetzt werden. Die folgenden Aufgaben werden zeigen, in welchen Fällen so etwas für die sphärischen Vielecke in Hinsicht auf die Kugelfläche statt findet.

§ 63.

Aufg. Unter allen sphärischen gleichseitigen Dreyecken diejenigen zu bestimmen, aus welchen sich ein Netz für die Kugelfläche verfertigen läßt.

Aufl. 1) Man denke sich die gleichseitigen Dreyecke auf der Kugelfläche so aneinander gefügt, daß sowohl ihre Seiten als Winkel völlig schließen und keinen leeren Platz auf derselben übrig lassen. Um jeden Winkelpunkt dieses Netzes liegen alsdann nothwendig gleich viele Dreyecke, weil keiner von dem anderen in irgend etwas verschieden seyn kann.

2) Die Winkel der Dreyecke, von welchen jeder solcher Punkt umgeben ist, müssen den Raum rings um ihn ausfüllen, und keine Leere zwischen sich lassen; also muß ihre Summe 360° betragen. Wenn also θ den Winkel des gleichseitigen Dreyecks bezeichnet, und p die Anzahl dieser Winkel um jeden Winkelpunkt; so muß $p\theta = 360°$ seyn.

3) Aus § 62 erhält man aber, wenn $n = 3$ gesetzt wird, $\theta = \frac{240°}{m} + 60°$; man hat also die Gleichung,

$$p\left(\frac{240°}{m} + 60°\right) = 360°$$

woraus man erhält,

$$m = \frac{4p}{6-p}.$$

4) Hier muß $p > 1$ und < 6 seyn. Man setze also anstatt dieses Buchstabens alle Werthe, die er haben kann, so hat man,

$$\text{Sin.}\,m^2\,\text{Sin.}\,n^2\,\text{Sin.}\,r^2 + 2\,(\text{Cos.}\,p - \text{Cos.}\,m\,\text{Cos.}\,r)\,(\text{Cos.}\,q - \text{Cos.}\,n\,\text{Cos.}\,r)\,(\text{Cos.}\,s - \text{Cos.}\,m\,\text{Cos.}\,n) =$$
$$\text{Sin.}\,m^2(\text{Cos.}\,q - \text{Cos.}\,n\,\text{Cos.}\,r)^2 + \text{Sin.}\,n^2(\text{Cos.}\,p - \text{Cos.}\,m\,\text{Cos.}\,r)^2 + \text{Sin.}\,r^2\,(\text{Cos.}\,s - \text{Cos.}\,m\,\text{Cos.}\,n)^2.$$

5) Man setze noch $1 - \text{Cos.}\,m^2$, $1 - \text{Cos.}\,n^2$, $1 - \text{Cos.}\,r^2$ für $\text{Sin.}\,m^2$, $\text{Sin.}\,n^2$, $\text{Sin.}\,r^2$; dadurch entstehet nach der Reduktion,

$$1 - (\text{Cos.}\,m^2 + \text{Cos.}\,n^2 + \text{Cos.}\,p^2 + \text{Cos.}\,q^2 + \text{Cos.}\,r^2 + \text{Cos.}\,s^2)$$
$$+ (\text{Cos.}\,m^2\,\text{Cos.}\,q^2 + \text{Cos.}\,n^2\,\text{Cos.}\,p^2 + \text{Cos.}\,r^2\,\text{Cos.}\,s^2)$$
$$+ \left(\begin{matrix} 2\,\text{Cos.}\,m\,\text{Cos.}\,n\,\text{Cos.}\,s + 2\,\text{Cos.}\,m\,\text{Cos.}\,p\,\text{Cos.}\,r \\ + 2\,\text{Cos.}\,n\,\text{Cos.}\,q\,\text{Cos.}\,r + 2\,\text{Cos.}\,p\,\text{Cos.}\,q\,\text{Cos.}\,s \end{matrix}\right)$$
$$- \left(\begin{matrix} 2\,\text{Cos.}\,m\,\text{Cos.}\,n\,\text{Cos.}\,p\,\text{Cos.}\,q + 2\,\text{Cos.}\,m\,\text{Cos.}\,q\,\text{Cos.}\,r\,\text{Cos.}\,s \\ + 2\,\text{Cos.}\,n\,\text{Cos.}\,p\,\text{Cos.}\,r\,\text{Cos.}\,s \end{matrix}\right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nun jedesmal, wenn fünf von den im Satze erwähnten Stücken gegeben sind, das sechste durch die Auflösung einer quadratischen Gleichung bestimmen.

§ 56.

Es sey P (Fig. 19) irgend ein Punkt auf der Kugelfläche, aus welchem die gleichen Bogen größter Kreise PA, PB, PC, PD, PE, unter gleichen Winkeln APB, BPC, CPD, u. s. w. gezogen worden. Werden nun die Endpunkte A, B, C, u. s. w. durch die Bogen größter Kreise AB, BC, CD, u. s. w. verbunden, so entstehet ein sphärisches Vieleck von gleichen Seiten AB, BC, CD, u. s. w. und gleichen Winkeln ABC, BCD, CDE, u. s. w. Denn die Dreyecke APB, BPC, u. s. w. sind gleich und gleichschenklicht; folglich sind die Winkel ABP, CBP, BCP, DCP, u. s. w. alle einander gleich; jede zwey dieser Winkel geben aber einen Winkel des Vielecks.

Ein solches Vieleck von gleichen Seiten und Winkeln, heißt ein reguläres sphärisches Vieleck. Die Eckpunkte deß

selben, A, B, C, u. s. w. liegen in einem Kreise, dessen Pol P ist. Verbindet man diese Punkte durch gerade Linien, so entstehet ein reguläres geradliniges Vieleck von eben so vielen Seiten als das sphärische hat.

§. 57.

Aufg. Die Anzahl der Seiten eines regulären sphärischen Vielecks ist gegeben: man soll eine Gleichung zwischen seiner Seite und seinem Polygonwinkel finden, durch welche man im Stande ist, das eine aus dem anderen zu bestimmen.

Aufl. 1) Es sey die Anzahl der Seiten des Vielecks ABCDE (Fig. 19) = n; so ist, weil alle Winkel um den Pol P herum zusammen 4 rechte Winkel oder 360° ausmachen, jeder derselben $= \frac{360^\circ}{n}$; wofür ich, der Kürze wegen, α setzen will.

2) Jede von den gleichen Seiten des Vielecks heiße η, jeder Polygonwinkel, wie BAE, heiße θ, und jeder von den, aus dem Punkte P nach den Ecken gezogenen Bogen, wie PA, heiße φ; dieser Bogen halbiret den Polygonwinkel, folglich ist BAP $= \frac{1}{2}\theta$.

3) Man halbire nun den Winkel APB ($= \alpha$) durch den Bogen PQ; so wird dadurch, weil das Dreyeck APB gleichschenkelig ist, auch die Seite AB halbirt, und PQ stehet senkrecht auf AB. Es ist daher APQ $= \frac{1}{2}\alpha$, AQ $= \frac{1}{2}\eta$.

4) In jedem Dreyecke verhalten sich die Sinusse der Winkel, wie die Sinusse der ihnen gegenüber liegenden Seiten; man hat also aus dem Dreyecke APB,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \frac{\text{Sin.}\,\eta\ \text{Sin.}\,\frac{1}{2}\theta}{\text{Sin.}\,\alpha},$$

und aus dem bey Q rechtwinkeligen Dreyecke APQ,

$$\text{Sin.}\ \varphi = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\alpha}.$$

5) Werden diese beyden Ausdrücke von Sin. φ einander gleich gesetzt, so entstehet die Gleichung,

$$\frac{\text{Sin.}\ \eta\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}\theta}{\text{Sin.}\ \alpha} = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\alpha};$$

oder, da Sin. η = 2 Sin. $\frac{1}{2}\eta$ Cos. $\frac{1}{2}\eta$, Sin. α = 2 Sin. $\frac{1}{2}\alpha$ Cos. $\frac{1}{2}\alpha$, folgende:

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta = \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \text{Cos.}\ \frac{180^\circ}{n}.$$

6) Vermittelst dieser Gleichung läßt sich θ bestimmen, wenn η gegeben ist, und umgekehrt. Man hat nämlich

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta = \frac{\text{Cos.}\ \frac{180^\circ}{n}}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\eta},\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\ \frac{180^\circ}{n}}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\theta}.$$

Zus. Will man wissen, wie groß der Bogen PA = PB = PC = u. s. w. genommen werden muß, wenn die Seite des Vielecks eine gegebene Größe haben soll; so darf man nur in der Gleichung Sin. $\varphi = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\alpha}$ aus 4, für η seinen Werth setzen, so erhält man φ. Ist der Polygonwinkel θ gegeben, so berechne man zuerst die Seite η; das Uebrige wie vorher.

IV. Flächeninhalt der sphärischen Dreyecke und Vielecke.

§ 58.

Hülfssätze.

I. Wenn sich zwey größte Kreise einer Kugel, AMBP, ANBQ, (Fig. 30) einander schneiden, so verhalten sich die gleichen, auf der Oberfläche der Kugel entstehenden Streifen AMBNA, APBQA zur ganzen Kugelfläche, wie der Neigungswinkel der beyden Kreisebenen zu vier rechten Winkeln.

Auf den Durchmesser AB, worin sich die beyden Kreise schneiden, setze man den größten Kreis MNPQ senkrecht, und ziehe die Durchmesser MP, NQ; alsdann ist MCN der Neigungswinkel der Kreise AMBP, ANBQ, und der Bogen MN das Maaß desselben. Es kommt demnach bloß darauf an, zu beweisen, daß der Streifen AMBNA sich zur ganzen Kugelfläche wie der Bogen MN zur Peripherie MNPQ verhalte.

Ist nun dies Verhältniß rational; so kann man MN : MNPQ = m : n setzen, und m, n, ganze Zahlen seyn lassen. Man denke sich alsdann die Peripherie MNPQ in n gleiche Theile getheilt, deren also m auf MN gehen werden; ferner durch diese Theilungspunkte und den Durchmesser AB größte Kreise gelegt; so wird hierdurch die ganze Kugelfläche in n gleiche Streifen abgetheilt, deren m den Streifen AMBNA ausmachen, und es verhält sich daher dieser Streifen zur Kugelfläche wie m zu n, d. h. wie der Bogen MN zur Peripherie MNPQ.

Ist aber das Verhältniß MN : MNPQ nicht rational, so läßt sich der Beweis auf die bekannte Art vermittelst der Exhaustions-Methode führen.

II. Wenn durch eine Kugel nach Willkühr drey größte Kreise (Fig. 21) AMBP, ANBQ, MNPQ, gelegt werden; so ist die Summe der, in derselben Halbkugel liegenden, sphärischen Dreyecke AMN, APQ, jedesmal dem Streifen AMBNA gleich.

Denn es ist Halbkreis APB = Halbkreis MBP; folglich APB — BP = MBP — BP, d. h. AP = BM. Auf eine ähnliche Art wird bewiesen, daß BN = AQ, MN = PQ. Die sphärischen Dreyecke BMN, APQ, haben demnach gleiche Seiten, wie auch gleiche Winkel; folglich sind sie einander gleich. Demnach ist AMN + APQ = AMN + BMN = Streifen AMBNA.

Zus. Aus diesem und dem vorhergehenden Satze folgt, daß die Summe der beyden sphärischen Dreyecke MAN, PAQ, sich zur ganzen Kugelfläche, wie der sphärische Winkel MAN, (der dem Neigungswinkel der Kreisflächen AMBP, ANBQ, gleich ist,) zu vier rechten Winkeln verhält.

Bezeichnet man daher die Kugelfläche durch S, die Summe der Dreyecke MAN, PAQ, durch s, und den Winkel MAN durch A, so ist, wenn dieser Winkel in Graden gegeben ist, $s = \frac{A}{360^\circ} . S$.

§ 59.

Aufg. Die drey Winkel eines sphärischen Dreyeckes sind gegeben: man soll den Flächeninhalt desselben finden.

Aufl. 1) Es sey ABC (Fig. 22) das sphärische Dreyeck, DFGI irgend ein größter Kreis außerhalb desselben, und die

Seiten des Dreyecks so weit verlängert, bis sie die Periphe- rie dieses Kreises treffen.

2) Alsdann ist nach dem vorigen §,

$$\triangle HAG + \triangle DAE = \frac{A}{360^\circ} . S;$$

und eben so,

$$\triangle DBI + \triangle FBG = \frac{B}{360^\circ} . S,$$

$$\triangle FCE + \triangle HCI = \frac{C}{360^\circ} . S;$$

folglich,

$$\begin{bmatrix} \triangle HAG + \triangle DBI + \triangle FCE \\ + \triangle DAE + \triangle FBG + \triangle HCI \end{bmatrix} = \frac{A + B + C}{360^\circ} . S.$$

3) Die Summe der Dreyecke zur Linken dieser Gleichung übertrifft die Halbkugel um das doppelte Dreyeck ABC; folglich ist

$$\tfrac{1}{2} S + 2 \triangle ABC = \frac{A + B + C}{360^\circ} . S,$$

und daher,

$$\triangle ABC = \frac{A + B + C - 180^\circ}{720^\circ} . S.$$

Zusatz. Aus diesem Resultate ergiebt sich der folgende Satz:

Jedes Kugeldreyeck verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie der Ueberschuß der Summe seiner drey Winkel über zwey Rechte, zu acht Rechten.

Beyspiel. Es sey $A = 43^\circ\ 20'$, $B = 79^\circ\ 9'\ 59''$, $C = 82^\circ\ 34'\ 6''$; hier ist, $A + B + C - 180^\circ = 25^\circ\ 4'\ 5''$, und daher,

$$\triangle ABC = \frac{25^\circ\ 4'\ 5''}{720^\circ} . S;$$

oder, wenn man die Grade und Minuten in Secunden verwandelt,

$$\triangle ABC = \frac{90246}{2592000} \cdot S = 0{,}0348167 \cdot S.$$

§ 60.

Aufg. Den Flächeninhalt eines sphärischen Vielecks aus seinen Winkeln zu finden.

Aufl. Es sey ABCDE (Fig. 23) irgend ein Vieleck, und aus einem Winkel desselben, A, nach allen anderen Winkeln die Diagonalen AC, AD, gezogen; so wird hierdurch das Vieleck in so viele Dreyecke zerlegt, als es Seiten weniger zwey hat.

Es sey nun s die Summe der Winkel des Vielecks, s', s'', s''', rc., die Summen der Winkel in den Dreyecken, worin es zerlegt worden, n die Anzahl seiner Seiten; so ist (§ 59)

$$\triangle ABC = \frac{s' - 180^0}{720^0} S,$$

$$\triangle ACD = \frac{s'' - 180^0}{720^0} S,$$

$$\triangle ADE = \frac{s''' - 180^0}{720^0} S,$$

u. s. w.

folglich

$$\text{Polyg. } ABCDE \ldots = [s' + s'' + s''' + \ldots + (n-2)\, 180^0] \frac{S}{720^0};$$

oder da $s' + s'' + s''' + \ldots = s$,

$$\text{Polyg. } ABCDE \ldots = \frac{s - (n-2)\, 180^0}{720^0} S.$$

Zus. Es bezeichne Σ die Summe aller äußeren Winkel

der sphärischen Figur. Alsdann ist $s + \Sigma = n. 180^\circ$, und $s = n. 180^\circ - \Sigma$; folglich,

$$\text{Polyg. ABCDE} \ldots = \frac{360^\circ - \Sigma}{720^\circ} S.$$

D. h. Das Vieleck verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie die Differenz zwischen vier rechten Winkeln und der Summe aller äußeren Winkel des Vielecks, zu acht rechten Winkeln.

§. 61.

Aufg. Aus der gegebenen Seite eines regulären sphärischen Vielecks den Flächeninhalt desselben zu finden.

Aufl. Es sey η die gegebene Seite des Vielecks, ι der unbekannte Polygonwinkel desselben. Diesen Winkel erhält man aus der Gleichung (§ 57)

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \iota = \frac{\text{Cos.} \frac{180^\circ}{n}}{\text{Cos.} \frac{1}{2} \eta}.$$

Hat man aus dieser Gleichung den Winkel ι gefunden, so darf man nur in § 60 $n\iota$ statt s setzen; man erhält alsdann, wenn q den Flächeninhalt des Vielecks bezeichnet,

$$q = \frac{n\iota - (n - 2) 180^\circ}{720^\circ} S;$$

oder auch, wenn ι' den äußeren Winkel des Vielecks bezeichnet,

$$q = \frac{360^\circ - n\iota'}{720^\circ} S.$$

Beysp. Für das Kugelquadrat, d. h. für das sphärische Viereck, welches lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, ist $n = 4$. Es sey nun die Seite dieses Quadrates $= 1^\circ$, und der Flächeninhalt eines solchen Quadratgrades zu finden. Hier ist $\eta = 1^\circ$, und daher nach obiger Formel

$\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\theta = \frac{\text{Cos. } 45°}{\text{Cos. } 30°}$. Hieraus findet man $\frac{1}{2}\theta = 45°\ 0'\ 8''$ beynahe; folglich $q = \frac{64}{720 \cdot 3600} S = \frac{1}{40500} S$. Das Kugelquadrat, dessen Seite = 1°, ist demnach in der ganzen Kugelfläche ungefähr 40500 mal enthalten.

§ 62.

Aufg. Ein reguläres sphärisches Vieleck von einer bestimmten Anzahl der Seiten zu finden, von welchem die Kugelfläche ein gegebenes Vielfaches ist.

Aufl. Angenommen, das Vieleck solle der mte Theil der Kugelfläche seyn; so hat man, (§ 61),

$$\frac{n\theta - (n-2)\,180°}{720°} S = \frac{1}{m} S,$$

und daher

$$\theta = \frac{720°}{mn} + \frac{n-2}{n}\,180°.$$

Hat man hieraus den Winkel θ bestimmt, so hat man auch η, oder die Seite des Vielecks, aus der Gleichung,

$$\text{Cos}\,\frac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\,\frac{180°}{n}}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\theta}.$$

Anmerk. Es verdient hierbey bemerkt zu werden, daß, wenn auch die Kugelfläche ein Vielfaches irgend eines sphärischen Vieleckes ist, doch noch keinesweges daraus folge, daß sich die Kugelfläche ganz mit solchen Vielecken belegen lasse, oder daß sich aus diesen Vielecken ein Netz verfertigen lasse, womit die ganze Kugelfläche bedeckt werden könne; denn das eine folgt eben so wenig aus dem anderen, als sich daraus, daß ein Dreyeck der hunderte Theil eines Quadrates ist, schliessen läßt, es können hundert solche Dreyecke in das Quadrat

gesetzt

gesetzt werden. Die folgenden Aufgaben werden zeigen, in welchen Fällen so etwas für die sphärischen Vielecke in Hinsicht auf die Kugelfläche statt findet.

§. 65.

Aufg. Unter allen sphärischen gleichseitigen Dreyecken diejenigen zu bestimmen, aus welchen sich ein Netz für die Kugelfläche verfertigen läßt.

Aufl. 1) Man denke sich die gleichseitigen Dreyecke auf der Kugelfläche so aneinander gefügt, daß sowohl ihre Seiten als Winkel völlig schließen und keinen leeren Platz auf derselben übrig lassen. Um jeden Winkelpunkt dieses Netzes liegen alsdann nothwendig gleich viele Dreyecke, weil keiner von dem anderen in irgend etwas verschieden seyn kann.

2) Die Winkel der Dreyecke, von welchen jeder solcher Punkt umgeben ist, müssen den Raum rings um ihn ausfüllen, und keine Leere zwischen sich lassen; also muß ihre Summe 360° betragen. Wenn also θ den Winkel des gleichseitigen Dreyecks bezeichnet, und p die Anzahl dieser Winkel um jeden Winkelpunkt; so muß $p\theta = 360°$ seyn.

3) Aus § 62 erhält man aber, wenn $n = 3$ gesetzt wird, $\theta = \frac{240°}{m} + 60°$; man hat also die Gleichung,

$$p\left(\frac{240°}{m} + 60°\right) = 360°$$

woraus man erhält,

$$m = \frac{4p}{6-p}.$$

4) Hier muß $p > 1$ und < 6 seyn. Man setze also anstatt dieses Buchstabens alle Werthe, die er haben kann, so hat man,

für p =	3	3	4	5
m =	2	4	8	20
ε =	180°	120°	90°	72°

5) Ist nun η die Seite des Dreyecks, so ist (§ 57. 6)

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\ 60^\circ}{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon} = \frac{1}{2\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon},$$

und wenn hierin nach und nach für ε seine in 4 angegebenen möglichen Werthe gesetzt werden,

$$\eta = 120^\circ,\ 109^\circ\ 28'\ 16'',\ 90^\circ,\ 63^\circ\ 26'\ 6''.$$

6) Diese Größe müssen die Seiten des Dreyecks haben, wenn sie die Bedingungen der Aufgabe erfüllen sollen, und solcher Dreyecke gehen also entweder 2, oder 4, oder 8, oder 20 auf die Kugelfläche. Das erste Dreyeck ist nichts anders, als die halbe Kugelfläche selbst; die drey Seiten desselben, jede von 120°, liegen alle in der Ebene eines größten Kreises; es kann daher nicht wohl zu den sphärischen Dreyecken gezählt werden. Es giebt also eigentlich nur drey sphärische Dreyecke, welche die erforderliche Eigenschaft haben.

Anmerk. Die Sehnendreyecke, welche den gefundenen sphärischen Dreyecken entsprechen, bilden die Seitenflächen der regulären Körper, welche unter dem Namen Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, bekannt sind; wovon weiterhin mehr vorkommen wird.

§ 64.

Aufg. Unter allen Kugelquadraten diejenigen zu bestimmen, welche ein Netz für die Kugelfläche geben.

Aufl. 1) Aus § 54 hat man, wenn $n = 4$ gesetzt wird,

$$\varepsilon = \frac{180^\circ}{m} + 90^\circ;$$ und dieses ist der Winkel des Kugelquadrates. Liegen also m derselben um jeden Winkelpunkt, so muß seyn,

$$p\left(\frac{180^\circ}{m}+90^\circ\right)=360^\circ.$$

Hieraus wird gefunden,

$$m=\frac{2p}{4-p}.$$

2) Es muß demnach p größer als 2 und kleiner als 4 angenommen werden. Für p = 2 ist m = 2, und für p = 3 ist m = 6. Für p = 2 ist der Polygonwinkel $\theta = 180^\circ$; also das Viereck ein größter Kreis in seine Quadranten getheilt; die Fläche desselben die halbe Kugelfläche: dieses Quadrat kann daher nicht gebraucht werden. Für p = 3 erhält man $\theta = 120^\circ$; und dies ist der Winkel des gesuchten Quadrates. Es giebt also nur ein Quadrat, welches die verlangte Eigenschaft hat.

3) Für die Seite desselben hat man die Gleichung,

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos. } 45^\circ}{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta},$$

woraus $\eta = 70^\circ\ 31'\ 44''$ gefunden wird.

Zus. Die Entfernung der Winkelpunkte dieses Quadrates von dem Pole des umschriebenen Kreises wird aus § 57 Zus. gefunden. Hier ist nämlich $\alpha = 90^\circ$, und daher,

$$\text{Sin. } \varphi = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\eta}{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\eta}{\text{Sin. } 45^\circ},$$

woraus $\varphi = 54^\circ\ 44'\ 8''$ erhalten wird.

Das geradlinige Quadrat, welches durch die Verbindung der Winkelpunkte des sphärischen durch gerade Linien erhalten wird, ist übrigens die Seitenfläche eines in der Kugel beschriebenen Cubus.

§ 65.

Aufg. Das sphärische Fünfeck zu finden, welches ein Netz der Kugelfläche giebt.

Aufl. 1) Hier muß in der Formel für φ (§ 62), $n = 5$ gesetzt werden; man findet hierdurch $\varphi = \frac{144^\circ}{m} + 108^\circ$. Liegen nun um jeden Winkelpunkt p Fünfecke; so muß seyn,

$$p\left(\frac{144^\circ}{m} + 108^\circ\right) = 360^\circ,$$

woraus man

$$m = \frac{4p}{10 - 3p}$$

erhält.

2) Aus $p = 2$, folgt $m = 2$; das Netz bestehet aus zwey Halbkugeln. Für $p = 3$, wird $m = 12$; folglich $\varphi = 120^\circ$, und aus § 57

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\ 36^\circ}{\text{Sin.}\ 60^\circ};$$

woraus man $\eta = 41^\circ 48' 36''$ erhält.

Anmerk. In § 63, 64, 65, würde gezeigt, wie die regulären sphärischen Dreyecke, Vierecke, Fünfecke gefunden werden, aus welchen sich ein Netz für die Kugelfläche zusammensetzen läßt. Mehr als fünf Seiten darf aber ein solches Vieleck nicht haben, wenn, wie hier immer geschehen ist, nur eine Art von Vielecken zugelassen wird. Denn in jedem Winkelpunkte des Netzes müssen wenigstens drey Polygonwinkel zusammen stoßen, deren jeder nothwendig kleiner als 120° seyn muß. Dem Ausdrucke für den Polygonwinkel φ in § 62 kann man aber folgende Form geben:

$$\frac{720^\circ}{mn} + \left(180^\circ - \frac{2}{n}\,180^\circ\right);$$

und von diesem Ausdrucke ist der, in Klammern eingeschlossene Theil allein schon so groß oder größer als 120°; das erstere nämlich für $n = 6$, das zweyte für $n > 6$. Der Fall $p = 2$

wird hier ausgeschlossen, weil er nichts anders als Halbkugeln für die Vielecke giebt.

§ 66.

Aufg. Zwey Seiten eines sphärischen Dreyecks nebst dem davon eingeschlossenen Winkel sind gegeben; man soll den Flächeninhalt des Dreyecks finden.

Aufl. 1) Man dürfte nur die beyden übrigen Winkel des sphärischen Dreyecks suchen, und hierauf nach § 59 den Inhalt desselben aus seinen drey Winkeln berechnen.

2) Es läßt sich aber auch eine einfache Formel finden, wodurch man den Ueberschuß der drey Winkel des Dreyecks über 180° unmittelbar erhalten kann.

3) Es sey A der gegebene Winkel, also b, c, die gegebenen Seiten; ferner sey, der Kürze wegen, $A + B + C - 180^\circ = \mu$, und daher $\text{Tang.}\,\frac{1}{2}(A + B + C) = \text{Tang.}(90^\circ + \frac{1}{2}\mu) = -\text{Cot.}\,\frac{1}{2}\mu$.

4) Es ist aber

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\text{Tang.}\,\frac{1}{2}A + \text{Tang.}\,\frac{1}{2}(B+C)}{1 - \text{Tang.}\,\frac{1}{2}A\ \text{Tang.}\,\frac{1}{2}(B+C)},$$

oder, wenn man hierin für $\text{Tang.}\,\frac{1}{2}(B+C)$ seinen Werth aus § 32 XLIX. setzt, und Zähler und Nenner mit $\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c+b)$ multiplicirt,

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(A+B+C) =$$
$$\frac{\text{Tang.}\,\frac{1}{2}A\ \text{Cos}\,\frac{1}{2}(c+b) + \text{Cot.}\,\frac{1}{2}A\ \text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c+b) - \text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c-b)}.$$

5) Dem Zähler dieses Bruches läßt sich, da

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}A}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}A},\ \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}A}{\text{Sin}\,\frac{1}{2}A},$$

$\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(c \pm b) = \text{Cos.}\,\frac{1}{2}c\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}b \mp \text{Sin.}\,\frac{1}{2}c\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}b$, folgende Form geben:

$$\frac{\left[\begin{array}{l}\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,c\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,b\,(\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,A^2 + \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,A^2) + \\ \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b\,(\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,A^2 - \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,A^2)\end{array}\right]}{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,A\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,A},$$

oder, da $\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}A^2 + \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}A^2 = 1$, $\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}A^2 - \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}A^2 = \text{Cos.}\,A$, $\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}\,A$, diese:

$$\frac{2\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}b + 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\,A}{\text{Sin.}\,A}$$

Der Nenner ist $= -\,2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b$.

6) Demnach erhält man,

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\overline{A+B+C} = \frac{2\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}b + 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\,A}{-\,2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\,A};$$

oder, da $\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(A + B + C) = -\,\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\,\mu$,

$$\frac{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,b}{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b} = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\,b,\quad \frac{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,c}{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c} = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\,c:$$

$$\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\,\mu = \frac{\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\,c\,\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\,b}{\text{Sin.}\,A} + \text{Cot.}\,A.$$

7) Hat man durch diese Formel den Winkel $\mu = A + B + C - 180^\circ$ gefunden, so hat man auch den Flächeninhalt des Dreyecks $= \frac{\mu S}{720^\circ}$.

Zus. Hieraus folgt, daß alle sphärische Dreyecke, in welchen der Winkel A und das Produkt $\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}c$ gleich ist, denselben Flächeninhalt haben. Haben also zwey Dreyecke ABC, ADE, (Fig. 24) einen gemeinschaftlichen Winkel A, so ist ihr Flächeninhalt gleich, wenn $\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\,AB\,\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\,AC = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\,AD\,\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\,AE$, oder, welches das Nämliche ist, wenn $\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,AB : \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,AD = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,AE : \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,AC$, d. h. wenn die Tangenten der halben Seiten, welche den Winkel einschließen, in umgekehrtem Verhältnisse stehen. Es lassen

sich aus diesem Satze einige merkwürdige Construktionen auf der Kugelfläche ableiten, wie die folgenden Aufgaben zeigen werden.

§ 67.

Aufg. Es ist ein sphärisches Dreyeck gegeben: man soll ein anderes Dreyeck von gleichem Flächeninhalte finden, worin ein Winkel so groß als in jenem sey, und eine der daran liegenden Seiten eine gegebene Größe habe.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 24) das gegebene Dreyeck; A der Winkel, welcher in dem gegebenen und in dem gesuchten Dreyecke von gleicher Größe seyn soll.

Man verlängere, wenn es nöthig ist, den Bogen AB, und mache AD der gegebenen Seite gleich; bestimme hierauf den Bogen AE durch die Proportion,

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} AB : \text{Tang. } \tfrac{1}{2} AD = \text{Tang. } \tfrac{1}{2} AE : \text{Tang. } \tfrac{1}{2} AC:$$

verbinde die Punkte D, F, durch den Bogen DE, so ist ADE das gesuchte Dreyeck (§ 66 Zus.)

§ 68.

Aufg. Es ist ein sphärisches Dreyeck gegeben: man soll ein anderes Dreyeck von gleichem Flächeninhalte finden, welches eine gegebene Seite und einen gegebenen Winkel habe.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 25) das gegebene Dreyeck.

Man verlängere eine seiner Seiten, etwa AB, bis AD der gegebenen Seite des gesuchten Dreyecks gleich wird; mache den Winkel ADG dem gegebenen Winkel, und (§ 67) das Dreyeck ADE dem gegebenen Dreyecke ABC gleich; verlängere die Bogen AC, DG, bis sie in F zusammen stoßen, und mache das Dreyeck AGF = DEF, so wird ADG das gesuchte Dreyeck seyn. Denn es hat die gegebene Seite und den ge-

gebenen Winkel: auch ist △ ADG = △ ADF — △ AGF = △ ADF — △ DEF = △ ADE = △ ABC, wie verlangt wurde.

§ 69.

Aufg. Ein gegebenes sphärisches Dreyeck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, dessen Scheitelwinkel einem Winkel jenes Dreyecks gleich sey.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 26) das gegebene Dreyeck, ADE das gesuchte, und AD = AE.

Die Proportion (§ 66 Zus.) Tang. $\frac{1}{2}$AB : Tang. $\frac{1}{2}$AD = Tang. $\frac{1}{2}$ AE : Tang. $\frac{1}{2}$ AC, verwandelt sich hier in Tang. $\frac{1}{2}$ AB : Tang. $\frac{1}{2}$AD = Tang. $\frac{1}{2}$AD : Tang. $\frac{1}{2}$AC. Man darf also nur zwischen Tang. $\frac{1}{2}$AB und Tang. $\frac{1}{2}$AC die mittlere Proportionallinie suchen, so ist diese die Tangente des halben Schenkels des gesuchten Dreyecks.

§ 70.

Aufg. Ein sphärisches Dreyeck durch einen Bogen aus einem seiner Winkel zu halbiren.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 26) das gegebene Dreyeck, A der Winkel, von wo aus dasselbe halbirt werden soll.

Man verwandele das Dreyeck ABC in ein gleichschenkliges ADE (§ 69); halbire die Basis DE in F, und ziehe den Bogen AF; so ist △ ADF = $\frac{1}{2}$ △ ADE = $\frac{1}{2}$ △ ABC. Mit der gegebenen Seite AB und dem gegebenen Winkel ABC, mache man nun das Dreyeck ABG = ADF (§ 68), so wird der Bogen AG das Dreyeck ABC halbiren.

§ 71.

Aufg. Zwey Seiten eines sphärischen Dreyecks sind gegeben, wie auch das Verhältniß seiner Fläche zur ganzen Kugelfläche: man soll das Dreyeck bestimmen.

Aufl. 1) Es seyen b, c, die gegebenen Seiten des

Dreyecks, $1 : m$ das Verhältniß seiner Fläche zur Kugelfläche, und $A + B + C - 180^\circ = \mu$: so ist (§ 59 Zus.)

$$1 : m = \mu : 720^\circ,$$

und daher $$\tfrac{1}{2}\mu = \frac{360^\circ}{m}.$$

2) Aus der Gleichung (§ 66)

$$\text{Cot.}\ \tfrac{1}{2}\mu = \frac{\text{Cot. c Cot. b}}{\text{Sin A}} + \text{Cot. A},$$

erhält man, wenn $\frac{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\mu}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\mu}$ für Cot. $\frac{1}{2}\mu$, $\frac{\text{Cos. A}}{\text{Sin. A}}$ für Cot. A gesetzt, und hierauf mit Sin. A Sin. $\frac{1}{2}\mu$ multiplicirt wird,

$$\text{Sin. A Cos.}\ \tfrac{1}{2}\mu - \text{Cos. A Sin.}\ \tfrac{1}{2}\mu = \text{Cot. a Cot. b Sin.}\ \tfrac{1}{2}\mu,$$

oder $$\text{Sin.}\ (A - \tfrac{1}{2}\mu) = \text{Cot. a Cot. b Sin.}\ \tfrac{1}{2}\mu;$$

woraus sich $A - \frac{1}{2}\mu$, und folglich auch A bestimmen läßt.

3) Nachdem hierdurch A gefunden worden, ist es leicht, auch die übrigen Winkel B, C, zu bestimmen. Denn es ist $B + C = \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}A + 90^\circ$; dieser Werth, verbunden mit dem Werthe von $B - C$, welchen man aus § 32 XLVIII. erhält, giebt die Winkel B, C.

§ 72.

Aufg. Die drey Seiten eines sphärischen Dreyecks sind gegeben: man soll den Flächeninhalt desselben finden.

Aufl. 1) Es läßt sich auch hier, wie in § 66, für den Ueberschuß $A + B + C - 180^\circ$ eine Formel finden, wobey es nicht nöthig ist, die Winkel A, B, C, einzeln zu suchen. Zu dem Ende setze man $A + B + C - 180^\circ = \mu$; so ist $\text{Cos.}\ \frac{1}{2}(A + B + C) = \text{Cos.}\ (90^\circ + \frac{1}{2}\mu) = -\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\mu$.

2) Es ist aber $\text{Cos.}\ \frac{1}{2}(A + B + C) = \text{Cos.}\ \frac{1}{2}A\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}(B + C) - \text{Sin.}\ \frac{1}{2}A\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}(B + C) = \text{Cos.}\ \frac{1}{2}A\ [\text{Cos.}\ \frac{1}{2}B\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}C - \text{Sin.}\ \frac{1}{2}B\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}C] - \text{Sin.}\ \frac{1}{2}A\ [\text{Sin.}\ \frac{1}{2}B\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}C + \text{Cos.}\ \frac{1}{2}B\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}C] =$

$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\ \text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\ \text{Cos.}\tfrac{1}{2}C - \text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}C - \text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\ \text{Cos.}\tfrac{1}{2}C - \text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\ \text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}C.$

2) Hierin darf man nur für Sin. ½ A, Sin. ½ B, Sin. ½ C, Cos. ½ A, Cos. ½ B, Cos. ½ C, ihre Werthe aus § 32, XXII. XXIII. XXV. XXVI. XXVIII. XXIX. setzen. Um die Rechnung leichter übersehen zu können, setze man,

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c) = m, \quad \tfrac{1}{2}(b+c-a) = n,$$
$$\tfrac{1}{2}(a+c-b) = p, \quad \tfrac{1}{2}(a+b-c) = q.$$

Alsdann wird,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin. }p\ \text{Sin. }q}{\text{Sin. }b\ \text{Sin. }c}}, \quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin. }m\ \text{Sin. }n}{\text{Sin. }b\ \text{Sin. }c}},$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{Sin. }n\ \text{Sin. }q}{\text{Sin. }a\ \text{Sin. }c}}, \quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{Sin. }m\ \text{Sin. }p}{\text{Sin. }a\ \text{Sin. }c}},$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{Sin. }n\ \text{Sin. }p}{\text{Sin. }a\ \text{Sin. }b}}, \quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{Sin. }m\ \text{Sin. }q}{\text{Sin. }a\ \text{Sin. }b}}.$$

3) Man hat demnach,

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\ \text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\ \text{Cos.}\tfrac{1}{2}C = \text{Sin. }m\ \frac{\sqrt{\text{Sin. }m\ \text{Sin. }n\ \text{Sin. }p\ \text{Sin. }q}}{\text{Sin. }a\ \text{Sin. }b\ \text{Sin. }c},$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}C = \text{Sin. }n\ \frac{\sqrt{\text{Sin. }m\ \text{Sin. }n\ \text{Sin. }p\ \text{Sin. }q}}{\text{Sin. }a\ \text{Sin. }b\ \text{Sin. }c},$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\ \text{Cos.}\tfrac{1}{2}C = \text{Sin. }q\ \frac{\sqrt{\text{Sin. }m\ \text{Sin. }n\ \text{Sin. }p\ \text{Sin. }q}}{\text{Sin. }a\ \text{Sin. }b\ \text{Sin. }c},$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\ \text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}C = \text{Sin. }p\ \frac{\sqrt{\text{Sin. }m\ \text{Sin. }n\ \text{Sin. }p\ \text{Sin. }q}}{\text{Sin. }a\ \text{Sin. }b\ \text{Sin. }c};$$

und folglich $\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B+C) =$

$$\frac{\text{Sin. }m - \text{Sin. }n - \text{Sin. }q - \text{Sin. }p}{\text{Sin. }a\ \text{Sin. }b\ \text{Sin. }c}\sqrt{\text{Sin. }m\ \text{Sin. }n\ \text{Sin. }p\ \text{Sin. }q}.$$

4) Dieser Ausdruck läßt sich aber noch um ein Beträchtliches abkürzen, denn es ist, (§. 16), Sin. m − Sin. n =

$2\,\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}(m+n)\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}(m-n) = 2\,\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}(b+c)\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}a$, und (§. 15) $\mathrm{Sin.}\,q + \mathrm{Sin.}\,p = 2\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}(q+p)\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(q-p) = 2\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}(b-c)$; folglich,

$$\mathrm{Sin.}\,m - \mathrm{Sin.}\,n - \mathrm{Sin.}\,q - \mathrm{Sin.}\,p = 2\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}a\,[\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(b+c) - \mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(b-c)],$$

oder,

$$\mathrm{Sin.}\,m - \mathrm{Sin.}\,n - \mathrm{Sin.}\,q - \mathrm{Sin.}\,p = -4\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}c \quad (\text{§. } 18)$$

Ferner ist

$$\mathrm{Sin.}\,a\,\mathrm{Sin.}\,b\,\mathrm{Sin.}\,c = 8\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}c.$$

Werden diese Werthe in dem Ausdrucke des $\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}(A+B+C)$ substituirt, so erhält man,

$$\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\sqrt{\mathrm{Sin.}\,m\,\mathrm{Sin.}\,n\,\mathrm{Sin.}\,p\,\mathrm{Sin.}\,q}}{-2\,\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}b\,\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}c}.$$

5) Hieraus ergiebt sich nun ferner,

$$\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\mu = \frac{\sqrt{\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}(b+c-a)\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}(a+b-c)}}{2\,\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}b\,\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}c}.$$

Hat man hieraus $\frac{1}{2}\mu$ bestimmt, so ist der Flächeninhalt des Dreyecks $= \frac{\frac{1}{2} \cdot S}{360^\circ}$.

Zus. Wenn $b = c$, so ist das Dreyeck gleichschenkelig, und man hat,

$$\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\mu = \frac{\mathrm{Tang.}\,\frac{1}{2}a}{2\,\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}b^2}\sqrt{\mathrm{Sin.}\,(b+\tfrac{1}{2}a)\,\mathrm{Sin.}\,(b-\tfrac{1}{2}a)}.$$

Ist noch überdies $b = a$, oder ist das Dreyeck gleichseitig, so hat man,

$$\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\mu = \frac{\mathrm{Tang.}\,\frac{1}{2}a}{2\,\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}a^2}\sqrt{\mathrm{Sin.}\,\tfrac{3}{2}a\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}a}.$$

§ 75.

Drey auf einander perpendikuläre Halbmesser einer Kugel bilden einen körperlichen Winkel, welcher von drey ebenen rechten Winkeln eingeschlossen wird; man kann ihn einen körperlichen rechten Winkel nennen. Werden die Halbmesser verlängert, so entstehen acht solche Winkel, wodurch die Kugelfläche in eben so viele rechtwinkelige sphärische Dreyecke getheilt wird, deren Seiten Quadranten sind. Ein solches Dreyeck kann als das Maaß des rechten körperlichen Winkels angesehen werden, und zur Vergleichung desselben mit anderen körperlichen Winkeln dienen, in eben dem Sinne, in welchem der Quadrant als das Maaß eines ebenen rechten Winkels angesehen wird, und zum Mittel der Vergleichung zwischen diesem und jedem anderen Winkel gebraucht wird. Jedem körperlichen Winkel, dessen Spitze sich in dem Mittelpunkte der Kugel befindet, er mag nun von drey oder mehr Flächenwinkeln eingeschlossen werden, entspricht auf der Kugelfläche irgend ein sphärisches Dreyeck oder Vieleck, durch dessen Verhältniß zum achten Theile der Kugelfläche, das Verhältniß des körperlichen Winkels zu dem zur Einheit angenommenen rechten Winkel, gegeben ist. Das zwischen den Kanten eines körperlichen Winkels enthaltene Stück der Kugelfläche bleibt aber von einerley Größe, so lange die Summe der Neigungswinkel seiner Seitenflächen dieselbe bleibt (§ 60); es hängt demnach die Größe eines körperlichen Winkels bloß von dieser Summe der Neigungswinkel ab, die Anzahl der Kanten mag seyn, welche sie wolle.

V. Einige Anwendungen der sphärischen Trigonometrie auf Feldmesser-Aufgaben.

§ 74.

Aufg. Drey in einer Horizontalebene liegende Punkte werden aus einem über derselben erhöheten Orte gesehen: man soll vermittelst einiger gemessenen, oder schon anderweitig bekannten Linien und Winkel, die Entfernung des Ortes, wie auch die seiner Projektion von jedem der drey erwähnten Punkte, die gegenseitige Entfernung dieser Punkte selbst, wie auch die Höhe des Ortes über der Horizontalebene finden.

Erste Auflösung.

A, B, C, (Fig. 27) sollen die drey in der Horizontalebene liegende, und D der erhöhete Punkt seyn; ferner E die horizontale Projektion dieses Punktes.

Man messe die Winkel CDA, BDA, CDB, unter welchen die drey Seiten des Dreyeckes ABC aus D gesehen werden; in der Ebene messe man die Winkel CAB, DAC, und die Seite AB. Hieraus lassen sich nun die Entfernungen AC, BC, AD, BD, CD, die Höhe DE, wie auch EA, EC, EB, und alle Winkel der Pyramide, deren Spitze D und Grundfläche ABC ist, auf folgende Art finden.

1) Man denke sich in den Ebenen der drey Winkel CDA, BDA, CDB, aus D mit einem beliebigen Halbmesser Da, die drey Bogen ab, ac, bc, beschrieben; so entstehet ein sphärisches Dreyeck abc. Eben so denke man sich aus dem Punkte A mit einem willkührlichen Halbmesser Ad in den Ebenen der

drey Winkel DAC, CAB, DAB, die drey Bogen de, ef, df, beschrieben: so geben auch diese ein sphärisches Dreyeck def.

2) Die drey Winkel BDA, CDA, CDB, sind gegeben, folglich auch die Seiten ab, ac, bc, des sphärischen Dreyeckes abc. Man kann demnach den Winkel bac finden (§ 34). Nun ist bac = edf, weil beyde den Neigungswinkel der Ebenen BDA, CDA messen; folglich ist auch edf bekannt.

3) Man hat demnach in dem Dreyecke efd die beyden Seiten de, ef, (wegen der gegebenen Winkel DAC, CAB) und den Winkel edf; folglich auch die Seite df, d. h. den Winkel DAB.

4) In dem geradlinigen Dreyecke ADB sind demnach die Winkel DAB, BDA, wie auch die Seite AB bekannt; es lassen sich demnach die Seiten DA, DB, und der Winkel DBA finden.

5) Jetzt kennet man in dem Dreyecke DAC die Winkel ADC, DAC, nebst der Seite DA; es läßt sich also auch DC, AC, und der Winkel DCA finden.

6) Aus den gefundenen Seiten DC, DB, und dem gegebenen Winkel CDB, können nun in dem Dreyecke CDB, auch die beyden übrigen Winkel DCB, DBC, und die dritte Seite BC gefunden werden; welche Seite man auch aus AB, AC, und dem Winkel CAB berechnen könnte.

7) Aus dem sphärischen Dreyecke dfe findet man den Winkel dfe, d. h. die Neigung der Ebene ADB gegen die Horizontalebene CAB; dieser Winkel ist dem Winkel DFE gleich, welcher entstehet, wenn man DF auf AB perpendikulär, und hierauf die Linie EF ziehet.

8) Es ist aber DF = DB Sin. DBA; folglich DE = DF Sin. DFE = DF Sin. dfe = DB Sin. DBA Sin. dfe; woraus sich die Höhe DE bestimmen läßt.

9) Ist diese Höhe gefunden, so hat man in den bey E rechtwinkeligen Dreyecken DAE, DEB, DEC, die Hypothenusen DA, DB, DC, und die ihnen allen gemeinschaftliche Cathete DE; folglich auch die anderen Catheten, EA, EB, EC. Man hat demnach alles, was gesucht wurde.

Zweyte Auflösung.

Man messe (Fig. 28) die Winkel DAE, DAB, ADB, BDC, ADC. Ist nun noch die Höhe ED bekannt, so lassen sich AB, AC, BC, AD, CD, BD, AE, CE, BE, auf folgende Art bestimmen.

1) In dem rechtwinkeligen Dreyecke DEA ist gegeben DE, DAE; also läßt sich AD, AE, finden.

2) In dem Dreyecke ABD ist bekannt ADB, DAB, AD; folglich BD, AB. Auch läßt sich DF finden, wenn diese Linie auf AB senkrecht gezogen wird.

3) In dem rechtwinkeligen Dreyecke DEF ist also bekannt DE, DF; es läßt sich also ∠ DFE finden. Dieser Winkel ist das Supplement des Winkels e im sphär. Dreyecke dfe zu 180°; man kennet also auch diesen.

4) Im sphär. Dreyecke abc, sind die Seiten ab, ac, bc, gegeben; man findet also den Winkel a.

5) Im sphär. Dreyecke def ist also e, d (= a), und de bekannt, folglich auch df, ef, oder die Winkel DAC, BAC.

6) Im Dreyecke DAC kennet man demnach AD, ADC, DAC; also auch DC, AC.

7) Die Seite BC kann sowohl aus dem Dreyecke ABC, als aus dem Dreyecke CDB gefunden werden.

8) Aus DB, AD, BD, CD, findet man, wie in 9 der vor. Aufl., AE, BE, CE.

Dritte Auflösung.

Es sey gegeben (Fig. 28) DE, AC, DAC, ADB, ADC, BDC; es werde gesucht AB, BC, DB, DC, DA, EB, EC, EA. Man ziehe DG auf AC perpendikulär.

1) Im Dreyecke DCA ist gegeben AC, ADC, DAC; man kann also DA, DC, DG, finden.

2) Im rechtwinkeligen Dreyecke DEG, ist DE, DG, bekannt, also auch DGE = dfe.

3) Im sphär. Dreyecke abc, kennet man die drey Seiten ab, ac, bc; also auch den Winkel bac = edf.

4) Im sphär. Dreyecke dfe kennet man demnach die Winkel d, f, und die Seite df; also auch de, ef, oder die Winkel DAB, BAC.

5) Im Dreyecke DBA ist bekannt, DA, DAB, ADB; also läßt sich DB, AB, finden.

6) Die Seite BC findet man entweder aus dem Dreyecke BAC, oder aus dem Dreyecke BDC; und die Linien EA, EB BC, wie in 9 der ersten Aufl.

Vierte Auflösung.

Es sey gegeben DE, BCA, DCB, DCE, ADB, ADC, BDC; es werde gesucht, AB, BC, AC, DB, DC, DA, EB, EC, EA.

1) Man denke sich in den Ebenen der Winkel DCA, DCB, BCA, DCE, mit einem beliebigen Halbmesser die Bogen gh, hk, gk, hl beschrieben, wovon die drey ersteren das sphär. Dreyeck ghk bilden, auf dessen Seite gk der Bogen hl senkrecht stehet.

2) Das rechtwinkelige Dreyeck DEC, worin DE, DCE, bekannt sind, giebt DC, EC.

3) Im

3) Im rechtwinkeligen sphär. Dreyecke hlk, kennet man hk (= DCB), hl (= DCE); also auch kl.

4) Im rechtw. sphär. Dreyecke hlg kennet man demnach gl (= gk — kl); folglich auch hg = DCA.

5) Im Dreyecke DAC ist nun DC, DCA, ADC, bekannt; man hat also auch DA, AC.

6) Das Dreyeck DBC, worin DCB, BDC, DC, bekannt ist, giebt DB, BC.

7) Aus dem Dreyecke ADB, oder ACB, findet man AB, und aus den rechtwinkeligen Dreyecken DEA und DEB, EA und EB.

Fünfte Auflösung.

Es seyen gegeben die drey Seiten des Dreyeckes ABC, folglich auch seine Winkel, desgleichen die Winkel ADB, ADC, BDC, DAC; es werde gesucht: DB, DC, DA, DE, EB, EC, EA.

1) Im Dreyecke DCA ist gegeben: AC, ADC, DAC; hieraus findet man DA, DC, DCA.

2) Aus dem sphär. Dreyecke abc, dessen drey Seiten gegeben sind, läßt sich der Winkel acb berechnen, und dieser ist dem Winkel ghk gleich.

3) Im sphär. Dreyecke ghk kennt man nun den Winkel h, und die Seiten hg (= DCA); und gk (= ACB); hieraus läßt sich hk und das Perpendikel hl bestimmen, welches den Winkel DCE mißt.

4) Im rechtw. Dreyecke DEC ist nun DC, DCE bekannt: also läßt sich auch DE, EC finden.

5) Das Dreyeck DCB giebt DB.

6) Aus DB, DE, findet man EB, desgleichen EA aus DA, DE.

Sechste Auflösung.

Es sey gegeben AD, AB, AC, ADB, ADC, BDC; es werde gesucht BC, DC, DB, DE, EA, EC, EB.

1) Im Dreyecke ACD ist gegeben AD, AC, ADC; man findet also DC, DAC, und DCA = gh.

2) Im Dreyecke ABD kennet man AD, AB, ADB; also auch DB.

3) Im Dreyecke DBC ist nun DC, DB, BDC, bekannt; also auch BC und DBC = hk.

4) Aus den Seiten des Dreyeckes ABC, findet man ACB = gk.

5) Aus den drey Seiten des sphärischen Dreyeckes ghk, findet man das Perpendikel hl = DCE.

6) Im rechtw. Dreyecke DEC, ist nun DC, DCE, bekannt; man findet also DE, EC.

7) Aus DE, DA, DB, findet man EA, EB.

Siebente Auflösung.

Es werde gegeben AC, die aus D gemessenen Winkel ADB, ADC, BDC, wie auch die Depreßionswinkel der Punkte A, B, C, für den Horizont jenes Punktes, d. h. DAE, DCE, DBE; es werde gesucht DA, DC, DB, AB, BC, DE, EA, EB, EC.

1) Aus § 52 des ersten Theiles dieser Samml. erhält man durch eine bloße Vertauschung des Gesuchten mit dem Gegebenen, folgenden Ausdruck für DE, DE =

$$\frac{AC}{\sqrt{[(Sec.ADE)^2 + (Sec.CDE)^2 - 2 Sec.ADE\, Sec.CDE\, Cos.ADC]}}$$

woraus sich die Höhe DE bestimmen läßt, da die Winkel ADE = 90° − DAE, CDE = 90° − DCE bekannt sind.

2) Aus DE und den gegebenen Winkeln DAE, DCE, DBE, ergeben sich in den rechtw. Dreyecken DEA, DEC, DEB, die Linien EA, EB, EC, DA, DB, DC.

3) Im Dreyecke ADB kennet man nun die Seiten AD, DB, und den Winkel ADB; desgleichen im Dreyecke CDB, die Seiten DC, DB, und den Winkel CDB: man kann daher auch AB, BC, finden.

Bey dieser Auflösung kann man also der sphärischen Trigonometrie entbehren.

§ 75.

Aufg. Aus einem Orte werden drey Punkte gesehen, welche sich in verschiedenen Höhen über der, durch diesen Ort gelegten, Horizontalebene befinden: man soll vermittelst einiger gemessenen Linien und Winkel, die Entfernungen dieser Punkte und ihrer Projektionen von jenem Orte, ihre gegenseitigen Entfernungen und ihre Höhen über der Horizontalebene finden.

A, B, C, (Fig. 29) mögen die drey Punkte seyn; D der Ort, von wo aus sie gesehen werden; E, F, G, ihre respektiven Projektionen: man soll AD, BD, CD, ED, FD, GD, AB, BC, AC, AE, BF, CG, finden. Eines oder das andere dieser Stücke kann auch gegeben seyn, oder unmittelbar gemessen werden.

Erste Auflösung.

Ich will annehmen, die Höhen AE, CG, der Punkte A C, über der Horizontalebene, wie auch der Winkel ACB wären schon bekannt; alsdann darf man nur bey D die Winkel ADB, ADC, BDC, ADE, CDG, BDF, messen, um BF, AB, AC, BC, AD, BD, CD, ED, FD, GD, zu finden.

1) Die rechtwinkeligen Dreyecke AED, CGD, geben, wo

gen der bekannten Seiten AE, CG, und Winkel ADE, CDG, die Seiten AD, ED, CD, GD.

2) Im Dreyecke CDA hat man also zwey Seiten AD, CD, und den eingeschlossenen Winkel ADC; folglich auch AC, DAC, DCA (= fd).

3) Im sphärischen Dreyecke abc kennet man, wegen der gegebenen Winkel ADB, ADC, BDC, die Seiten ab, ac, bc; also auch den Winkel abc.

4) Der Winkel abc ist aber nichts anders als der Winkel fde des sphärischen Dreyeckes dfe. Man kennet also in diesem Dreyecke, da auch ACB gegeben ist, die Seiten fd, fe, und den Winkel fde; folglich auch die Seite ed, oder den Winkel BCD.

5) Im Dreyecke BDC ist demnach BCD, BDC, CD, bekannt; man hat also auch CBD, BC, BD.

6) Im rechtw. Dreyecke BFD ist BD gefunden, und BDF gegeben, folglich hat man auch BF, FD.

7) Im Dreyecke ACB kennet man zwey Seiten AC, BC, und den eingeschlossenen Winkel ACB; also auch AB.

Zweyte Auflösung.

Ich will nun annehmen, es wären die Winkel ADC, ADB, BDC, unter welchen die Seiten des Dreyeckes ABC aus D gesehen werden, die Elevations- und Depressionswinkel der Punkte A, B, D, für den Horizont des Punktes C, ACK, BCH, CDG, wie auch die Höhe CG und die Winkel ACD, BCD gegeben: man sucht AE, BF, AB, AC, BC, AD, BD, CD, ED, FD, GD.

1) Im rechtwinkeligen Dreyecke CDG kennet man CG, CDG; also auch CD, GD.

2) Im Dreyecke BDC ist CD gefunden, und BCD, BDC gegeben; man hat also auch DB, BC.

3) Eben so findet man im Dreyecke ADC: DA, AC.

4) Im Dreyecke ADB sind nun DA, DB, ADB, bekannt; folglich auch AB.

5) Im rechtw. Dreyecke BHC ist BC, BCH gegeben; also auch BH, und daher BF = BH + HF = BH + CG bekannt.

6) Eben so kann im rechtw. Dreyecke AKC, aus AC, ACK, die Seite AK gefunden werden, und alsdann hat man auch AE = AK + KE = AK + CG.

7) In den rechtw. Dreyecken AED, BFD, sind die Seiten AD, AE und BD, BF bekannt; man hat also auch ED, FD.

§ 76.

Aufg. Vier in einer Horizontalebene liegende Punkte werden aus einem über dieser Ebene erhöheten Standpunkte gesehen: man soll, vermittelst einer bekannten Standlinie und einiger gemessenen Winkel, die Entfernung des Standes und seiner Projektion von jedem der vier Punkte, dieser letzteren gegenseitige Entfernung, wie auch die Höhe des Standes über der Horizontalebene finden.

Aufl. A, B, C, E, (Fig. 30) mögen die vier Punkte seyn, die aus dem erhöheten Orte D gesehen werden. Man messe die Winkel ADC, ADE, EDC, CDB, DAB, BAC, CAE, CBA, DBA, wie auch AB. Hieraus läßt sich alsdann die Höhe DG des Standes über der Horizontalebene, wie auch DA, DB, DC, DE, GA, GB, GC, GE, AE, EC, BC, AC, auf folgende Art bestimmen.

1) Aus dem Dreyecke ADB, in welchem zwey Winkel nebst der Seite AB gegeben sind, findet man DA, D .

2) Im sphärischen Dreyecke abc kennet man die drey Seiten ab, bc, ac, wegen der gegebenen Winkel ADB, ADC, CDB; man kann demnach den Winkel abc finden.

3) Im sphär. Dreyecke dgf sind demnach, wegen der gegebenen Winkel CBA, DBA, die Seiten fg, dg, bekannt; auch ist gdf = abc bekannt; man hat also auch df, oder den Winkel DBC.

4) Man hat demnach in dem Dreyecke CDB die Winkel CDB, DBC, und die Seite DB; folglich auch BC, DC.

5) Im Dreyecke ABC sind die Seiten AB, BC, nebst den Winkeln ABC, BAC, bekannt; man kann also die Seite AC finden.

6) Das Dreyeck ADC giebt, wegen der bekannten Seiten AD, AC, DC, wozu noch der Winkel ADC kommt, den Winkel DAC, oder die Seite hm des sphär. Dreyecks mhl.

7) Aus den bekannten Seiten des sphär. Dreyeckes aec, findet man den Winkel cae = mhl.

8) Aus den nun bekannten Stücken hm, ml, mhl, findet man im sphär. Dreyecke mhl die Seite hl = DAE.

9) Im Dreyecke ADE sind nun die Winkel ADE, DAE, und die Seite DA bekannt, es läßt sich also auch AE, DE, berechnen.

10) Im Dreyecke ACE suche man den Winkel AEC = pq, indem alle Seiten dieses Dreyeckes und der Winkel CAE schon bekannt sind.

11) Aus den drey Seiten des Dreyeckes DAE, nebst dem ebenfalls bekannten Winkel ADE, findet man AED = np, und aus den drey Seiten des Dreyeckes EDC, nebst dem Winkel EDC, erhält man auch nq.

12) Im sphär. Dreyecke npq sind demnach alle Seiten bekannt; man hat also das Perpendikel no = DEG.

13) Aus dem rechtw. Dreyecke DGE, worin DE und DEG bekannt ist, ergiebt sich GE und die Höhe DG.

14) Aus dieser Höhe und den schon berechneten Linien DA, DB, DC, findet man endlich in den rechtw. Dreyecken DGA, DGB, DGC, die Linien GA, GB, GC.

Anmerk. Die Auflösungen der Aufgaben in § 74, 75, 76, sind bey weitem nicht die einzig möglichen; vielmehr giebt es ihrer in so großer Menge, daß man allenfalls ein ganzes Buch damit anfüllen könnte. Indessen mögen diese wenigen hinreichen, um den Nutzen der sphärischen Trigonometrie in dergleichen Fällen zu zeigen. Jeder, dem es darum zu thun ist, wird leicht von selbst noch mehrere erfinden, und dadurch zugleich eine gute Gelegenheit zur Uebung in der Behandlung sphärischer Dreyecke erhalten.

§ 77.

Aufg. Einen gegebenen, nicht horizontal liegenden Winkel, auf den Horizont zu reduciren, d. h. seine Projektion auf die, durch seine Spitze gelegte, Horizontalebene zu finden, wenn die Elevations- oder Depressionswinkel seiner Schenkel gegeben sind.

Aufl. 1) Es sey BAC (Fig. 31) der gegebene Winkel; DAE die horizontale Projektion desselben; ferner Am eine Vertikale; mp, mq, zwey Quadranten, welche die Linien AB, AC, in o und n schneiden. Beyde Schenkel werden hier über den Horizont angenommen.

2) Da außer BAC auch noch die Elevationswinkel BAD CAE gegeben sind: so setze man BAC = α, BAD = β, CAE = γ. Die Bogen on, oq, np, sind die Maaße dieser

Winkel; man hat also on $= \alpha$, oq $= \beta$, np $= \gamma$, und daher mo $= 90^\circ - \beta$, mn $= 90^\circ - \gamma$.

3) In dem sphärischen Dreyecke mno sind demnach alle Seiten bekannt; es läßt sich also der Winkel pmq finden, und dieser ist der gesuchte Projektionswinkel DAE.

4) Setzt man nämlich in 1. § 34, a $= \alpha$, b $= 90^\circ - \beta$, c $= 90^\circ - \gamma$; so erhält man,

$$\text{Cos. EAD} = \frac{\text{Cos. } \alpha - \text{Sin. } \beta \text{ Sin. } \gamma}{\text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma},$$

oder,

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} \text{ EAD} = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta)}{\text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma}}.$$

Zus. Liegt einer von den beyden Schenkeln, etwa AC, unterhalb der Horizontalebene, so verwandelt sich der Elevationswinkel desselben in einen Depressionswinkel, und man muß daher in den vorigen Formeln $-\gamma$ anstatt γ setzen; hiernach erhält man,

$$\text{Cos. EAD} = \frac{\text{Cos. } \alpha + \text{Sin. } \beta \text{ Sin. } \gamma}{\text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma},$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} \text{EAD} = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma - \beta)}{\text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma}}.$$

Liegen hingegen beyde Schenkel unter der Horizontalebene, so muß man $-\beta$ anstatt β, und $-\gamma$ anstatt γ setzen; hierdurch leiden aber die Formeln der in 4 Aufl. keine Aenderung, wie auch leicht voraus zu sehen war.

VI. Fundamentalsätze aus der Lehre von den eckigen Körpern, zum Behufe des Folgenden.

§ 78.

Die Körper können, geometrisch betrachtet, unter zwey Hauptklassen gebracht werden; denn sie werden entweder 1) von lauter ebenen Flächen eingeschlossen, oder 2) von ebenen und krummen Flächen zugleich, oder auch krummen allein. Die zweyte Klasse gehöret nur zum Theil in die Elementar-Geometrie; die erste ganz.

Zur Kenntniß eines von lauter ebenen Flächen eingeschlossenen Körpers gelanget man: 1) durch die Gränzflächen desselben, d. h. diejenigen Flächen, welche den Körper von allen Seiten einschließen, sowohl in Hinsicht auf ihre Figur, als auf ihre Größe; 2) durch die Kanten, d. h. diejenigen geraden Linien, in welchen sich jede zwey an einander stoßende Gränzflächen schneiden; 3) durch die körperlichen Winkel, d. h. diejenigen Winkel, welche von drey, oder mehreren Flächen in den Punkten, wo sie zusammen stoßen, gebildet werden.

Die Bestimmung einer ebenen geradlinigen Figur erfordert nur Stücke zweyerley Art, nämlich: 1) die geraden Linien, welche ihren Umfang bilden; 2) die Winkel, welche diese Linien einschließen.

Zum Beispiel nehme ich den keilförmigen Körper ABCDEF (Fig. 32). Hier kommen überhaupt zwanzig Stücke in Betrachtung, welche alle, oder bloß zum Theil zur Bestimmung des Körpers dienen können; nämlich: 1) Sechs körperliche Winkel, A, B, C, D, E, F; 2) Neun Kanten, AB, BC, CD, DA, AE, DE, BF, CF, EF; 3) Fünf Gränzflächen, ABCD, ABFE, ADE, CDEF, BCF.

§ 79.

Der Unterschied in den Formen der Körper hängt nicht bloß von der Anzahl ihrer Gränzflächen, sondern auch von der Anzahl ihrer Ecken und Kanten ab. Ist die Anzahl einer jeden Art dieser Bestimmungsstücke bey zwey Körpern dieselbe, so sind diese Körper, geometrisch betrachtet, gleichartig. Es wird aber bald gezeigt werden, daß die Anzahl der Kanten von der Anzahl der Gränzflächen und der Anzahl der Ecken abhängt; man kann also die Anzahl der Kanten bey dieser Eintheilung gänzlich außer Acht lassen, und sich bloß auf die Anzahl der Gränzflächen und der Ecken einschränken. Man kann alsdann die gebräuchliche einseitige Benennung der verschiedenen Arten von Körpern, welche bloß von der Anzahl der Flächen hergenommen ist, als Tetraeder, Pentaeder, Hexaeder, u. s. w. dadurch berichtigen, daß man noch die Anzahl der Ecken hinzufüget. Es würde also z. B. der vorige keilförmige Körper ein sechseckiges Pentaeder, und die dreyseitige Pyramide ein viereckiges Tetraeder genannt werden müssen. Bey den regulären Körpern ist zwar diese Hinzufügung der Eckenzahl nicht nöthig, weil bey diesen, wie in der Folge gezeigt werden wird, die Anzahl der Ecken aus der Anzahl der Gränzflächen bestimmt wird, bey den irregulären Körpern hingegen ist es allerdings nöthig hierauf Rücksicht zu nehmen.

§ 80.

Die nähere Bestimmung der Körper kann füglich von der Anzahl der Seiten, von denen jede einzelne Gränzfläche eingeschlossen wird, und deren nicht weniger als drey seyn können, hergenommen werden. Kennet man aber die Anzahl der Gränzflächen eines Körpers, und die Anzahl der Seiten, also auch die Anzahl der ebenen Winkel einer jeden derselben; so kennet man auch die Anzahl der, auf der Oberfläche des Körpers

vorhandenen ebenen Winkel, wie auch die Summe aller dieser Winkel; denn aus der Anzahl der Seiten einer jeden Gränzfläche läßt sich die Summe aller Winkel in derselben, folglich auch die Summe der Winkel in allen Seitenflächen zusammen genommen, berechnen.

Hier folgen nun einige leichte Lehrsätze in Hinsicht auf solche Eigenschaften, welche allen, von ebenen Flächen eingeschlossenen Körpern, gemein sind; sie sind die Grundlage der ganzen Körperlehre, und ohne sie würde dieser Theil der Geometrie höchst unvollständig seyn.

§ 81.

Lehrsatz. In jedem Körper ist die Anzahl der Kanten immer halb so groß, als die Anzahl der ebenen Winkel auf der Oberfläche desselben.

Bew. Da jede Kante durch zwey Seiten der an einander gränzenden Flächen gebildet wird; so ist die Anzahl der Kanten in jedem Körper halb so groß, als die Anzahl der Seiten in allen Gränzflächen zusammen genommen. Die Anzahl der Seiten ist aber der Anzahl der ebenen Winkel gleich; folglich ist auch die Anzahl der Kanten halb so groß, als die Anzahl der ebenen Winkel.

Erster Zus. Da die Anzahl der Kanten nothwendig durch eine ganze Zahl ausgedruckt seyn muß, so müssen die ebenen Winkel, welche sich auf der Oberfläche eines Körpers befinden, immer in gerader Anzahl vorhanden seyn, weil ihre Anzahl durch 2 dividirt, die Anzahl der Kanten giebt.

Zweyt. Zus. Wenn demnach ein Körper von lauter Dreyecken begränzt wird, so muß die Anzahl der Gränzflächen immer gerade seyn; denn wäre sie ungerade, so wäre auch die Anzahl der ebenen Winkel ungerade. Das Nämliche gilt überhaupt, wenn die Gränzflächen lauter Vielecke von

einer ungeraden Anzahl der Seiten sind; also Fünfecke, Siebenecke, Neunecke, u. s. w.

Dritt. Zus. Wenn ein Körper von solchen Vielecken begränzt wird, welche zum Theil eine gerade, zum Theil eine ungerade Anzahl der Seiten haben; so sey m die Anzahl der Vielecke von der ersten, n die Anzahl der Vielecke von der zweyten Art; folglich m + n die Anzahl der Gränzflächen. Alsdann muß n nothwendig eine gerade Zahl seyn, m mag gerade oder ungerade seyn.

Viert. Zus. Bestehet demnach die Oberfläche eines Körpers aus a Dreyecken, b Vierecken, c Fünfecken, d Sechsecken, e Siebenecken, u. s. w.; so muß a + c + e + ꝛc., als die Anzahl aller ungeraden Vielecke, eine gerade Zahl seyn. Für einen solchen Körper ist die Anzahl der Gränzflächen = a + b + c + d + e + ꝛc., die Anzahl aller ebenen Winkel, oder aller Seiten = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + ꝛc. und daher die Anzahl aller Kanten = ½(3a + 4b + 5c + 6d + ꝛc.).

§ 82.

Lehrs. Die Anzahl der ebenen Winkel auf der Oberfläche eines Körpers ist entweder dreymal so groß, oder größer, als die Anzahl der Gränzflächen, oder, welches das Nämliche ist, die Anzahl der ebenen Winkel kann nie geringer seyn, als das Dreyfache der Anzahl der Gränzflächen.

Bew. Die Gränzflächen eines Körpers sind entweder Dreyecke, oder Figuren von mehr als drey Seiten. Im ersten Falle ist die Anzahl aller Seiten, oder aller ebenen Winkel dreymal so groß, im zweyten Falle größer als die Anzahl der Gränzflächen.

Zus. Es sey die Anzahl der Gränzflächen auf der Oberfläche eines Körpers = F, die Anzahl der Kanten = K, und

daher die Anzahl der ebenen Winkel = 2 K; alsdann ist, nach dem gegenwärtigen Satze, entweder 2 K = 3 F, oder 2 K > 3 F, aber nie 2 K < 3 F. Es giebt daher keinen Körper, worin K < $\frac{3}{2}$ F, oder F > $\frac{2}{3}$ K.

§ 83

Lehrs. Die Anzahl aller, auf der Oberfläche eines Körpers vorhandenen ebenen Winkel, ist entweder so groß, oder größer, als die Anzahl der Ecken desselben dreymal genommen; oder, welches das Nämliche ist, die Anzahl der ebenen Winkel kann nie geringer seyn, als die Anzahl der Ecken dreymal genommen.

Bew. Jede Ecke wird entweder von drey, oder von mehr als drey ebenen Winkeln gebildet; denn kein körperlicher Winkel kann von weniger als drey ebenen Winkeln eingeschlossen seyn. Im ersten Falle ist die Anzahl der ebenen Winkel dreymal so groß, im letzteren mehr als dreymal so groß, als die Anzahl der Ecken.

Zus. Es sey die Anzahl der Ecken = E, die Anzahl der Kanten = K, und folglich die Anzahl der ebenen Winkel = 2 K: so ist immer, entweder 2 K = 3 E, oder 2K > 3E, aber nie 2K < 3 E, oder K < $\frac{3}{2}$ E; also auch nie E > $\frac{2}{3}$ K. Wenn daher F die Anzahl der Gränzflächen bezeichnet, so kann weder F noch E größer als $\frac{2}{3}$ K seyn (§ 82 Zus.).

§ 84.

Lehrs. Für jeden Körper ist die Summe der Anzahl der Ecken und der Gränzflächen um 2 größer, als die Anzahl der Kanten.

Bew. 1) Man nehme innerhalb des Körpers irgend einen Punkt an, denke sich um diesem Punkte eine Kugelfläche beschrieben, und aus demselben nach allen Ecken des Körpers Linien gezogen, welche die Kugelfläche in eben so viele Punkte

treffen. Werden diese Punkte durch Bogen größter Kreise so verbunden, daß jeder Kante des Körpers ein Bogen auf der Kugelfläche zugehört, so wird dadurch die Kugelfläche in lauter sphärische Vielecke getheilt, deren jedes einem von den Vielecken, welche die Gränzflächen des Körpers bilden, korrespondirt.

2) Es bezeichne nun s, s', s'', u. s. w. die respektive Summe der Winkel in jedem dieser sphärischen Vielecke; n, n', n'', u. s. w. die Anzahl der Seiten. Aus § 60 erhält man alsdann für die Flächen dieser Vielecke folgende Ausdrücke:

$$\frac{s - (n - 2)\,180^\circ}{720^\circ}\,S$$

$$\frac{s' - (n' - 2)\,180^\circ}{720^\circ}\,S$$

$$\frac{s'' - (n'' - 2)\,180^\circ}{720^\circ}\,S$$

u. s. w.

Alle diese Vielecke zusammen machen die ganze Kugelfläche aus; man hat also

$$\frac{s + s' + s'' + \text{ꝛc.} - (n + n' + n'' + \text{ꝛc.} - 2F)\,180^\circ}{720^\circ}\,S = S$$

worin F die Anzahl der Gränzflächen des Körpers, und also auch die Anzahl der sphärischen Vielecke bezeichnet. Hieraus erhält man,

$$s + s' + s'' + \text{ꝛc.} - (n + n' + n'' \text{ꝛc.} - 2F)\,180^\circ = 720^\circ.$$

3) Das Netz, welches diese Vielecke auf der Kugelfläche bilden, hat gerade so viele Winkelpunkte, als der Körper Ecken hat; um jedem dieser Winkelpunkte liegt eine gewisse Anzahl sphärischer Winkel, deren Summe $= 360^\circ$; folglich ist die Summe aller sphärischen Winkel, oder $s + s' + s'' +$ ꝛc.

$= 360° . E$. Die Anzahl aller Seiten auf der Oberfläche des Körpers ist $n + n' + n'' +$ ꝛc., und diese ist doppelt so groß als die Anzahl der Kanten; man hat also $n + n' + n'' +$ ꝛc. $= 2K$.

4) Substituirt man diese Werthe in der in 2 gefundenen Gleichung, so erhält man

$$360° . E - (2K - 2F)\, 180° = 720°,$$

oder

$$E + F = K + 2$$

W. Z. E. W.

§ 85.

Lehrs. In jedem Körper ist die Anzahl der Kanten um sechs vermehrt, kleiner oder eben so groß als die Anzahl der Ecken oder der Gränzflächen dreymal genommen.

Bew. Nach § 83 Zus. ist für jeden Körper $2K \geqq 3E$, $2K \geqq 3E$. Aus § 84 erhält man aber $F = K - E + 2$, $E = K - F + 2$. Die Substitution dieser Werthe giebt

$$2K \geqq 3K - 3E + 6, \quad 2K \geqq 3K - 3F + 6;$$

woraus man erhält,

$$K + 6 \leqq 3E, \quad K + 6 \leqq 3F.$$

Erst. Zus. Hieraus erhellet, daß es keinen Körper giebt, in welchem die Anzahl der Kanten um 6 vermehrt größer wäre, als die Anzahl der Ecken oder der Flächen dreymal genommen.

Zweyt. Zus. In jedem Körper ist daher entweder $K + 6 = 3F$, oder $K + 6 < 3F$; und eben so entweder $K + 6 = 3E$, oder $K + 6 < 3E$. Wenn also $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, alle mögliche positive Zahlen, die Null mit eingeschlossen, bedeuten können; so hat man $K + 6 + \alpha = 3F$, $K + 6 + \beta = 3E$; ferner aus § 82 und 83, $K = \frac{3}{2}F + \gamma$, und $K = \frac{3}{2}E + \delta$. Substituirt man diese letzteren Werthe in den beyden ersten

Gleichungen, so erhält man, $\frac{3}{2}F + 6 + \alpha + \gamma = 3F$, $\frac{3}{2}E + 6 + \beta + \delta = 3E$, oder $4 + \frac{2}{3}(\alpha + \gamma) = F$, $4 + \frac{2}{3}(\beta + \delta) = E$. Hieraus erhellet, daß sowohl die Anzahl der Ecken, als die Anzahl der Flächen, nicht kleiner als 4 seyn kann.

Dritt. Zus. Sezt man die, so eben gefundenen Werthe von E und F, in die Gleichung $E + F = K + 2$ (§ 84), so erhält man, $6 + \frac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = K$; woraus erhellet, daß die Anzahl der Kanten nie kleiner als 6 seyn kann. Die dreyseitige Pyramide ist daher der einfachste Körper, weil darin E und $F = 4$, und $K = 6$.

§ 86.

Lehrs. In jedem Körper ist die Anzahl der Gränzflächen um vier vermehrt, entweder kleiner, oder eben so groß, als die doppelte Anzahl der Ecken, und die Anzahl der Ecken um vier vermehrt, entweder kleiner, oder eben so groß, als die doppelte Anzahl der Gränzflächen.

Bew. Nach § 85 ist $K = \frac{3}{2}F + \gamma$, $K = \frac{3}{2}E + \delta$. Da nun $K = E + F - 2$ (§ 84), so hat man $\frac{3}{2}F + \gamma = E + F - 2$, $\frac{3}{2}E + \delta = E + F - 2$, und hieraus $F + 4 + 2\gamma = 2E$, $E + 4 + 2\delta = 2F$; daher $F + 4 < 2E$, $E + 4 < 2F$, oder auch, wenn γ und $\delta = 0$ gesezt werden, $F + 4 = 2E$, $E + 4 = 2F$.

Erst. Zus. Es kann daher keinen Körper geben, in welchem die Anzahl der Gränzflächen um vier vermehrt, größer als die doppelte Anzahl der Ecken, oder die Anzahl der Ecken um vier vermehrt, größer als die doppelte Anzahl der Gränzflächen wäre.

Zweyt. Zus. Da $E = \frac{1}{2}F + 2 + \gamma$, $E = 2F - 4 - 2\delta$; so kann die Anzahl der Ecken weder kleiner als $\frac{1}{2}F + 2$, noch

größer

grösser als $2F - 4$ seyn. Die Anzahl der Ecken fällt demnach immer zwischen den beyden Gränzen $2F - 4$ und $\frac{1}{2}F + 2$.

Dritt. Zus. Eben so, da $F = 2E - 4 - 2\gamma$, $F = \frac{1}{2}E + 2 + \delta$, so kann die Anzahl der Gränzflächen weder grösser als $2E - 4$, noch kleiner als $\frac{1}{2}E + 2$ seyn. Die Anzahl der Gränzflächen fällt also immer zwischen den beyden Gränzen $2E - 4$ und $\frac{1}{2}E + 2$.

§ 87.

Lehrs. Kein Körper kann von lauter solchen Figuren eingeschlossen werden, welche sechs oder mehr Seiten haben; auch giebt es keinen Körper, dessen Ecken von sechs oder mehr ebenen Winkeln gebildet würden.

Bew. 1) Wenn der Körper von sechs- oder mehrseitigen Figuren eingeschlossen wird, so ist die Anzahl der ebenen Winkel auf der Oberfläche desselben, entweder $= 6F$, oder $> 6F$, und folglich $K = 3F$, oder $> 3F$. Nun ist aber $K = 3F - 6 - \alpha$ (§ 85 zweyt. Zus.), mithin $K < 3F$; und dieses widerspricht dem Vorigen.

2) Wären die Ecken aus 6, oder mehr ebenen Winkeln zusammen gesetzt; so wäre die Anzahl aller ebenen Winkel auf der Oberfläche des Körpers, entweder $= 6E$, oder $> 6E$; folglich $K = 3E$, oder $> 3E$. Es ist aber $K = 3E - 6 - \beta$, (§ 85 zweyt. Zus.), mithin $K < 3E$, welches dem Vorigen widerspricht.

§ 88.

Lehrs. Die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines Körpers beträgt gerade viermal so viel rechte Winkel, als der Unterschied zwischen der Zahl der Kanten und der Zahl der Gränzflächen Einheiten enthält.

Bew. Die Oberfläche des Körpers bestehe aus a Dreyecken, b Vierecken, c Fünfecken, d Sechsecken, e Siebenecken

u. s. w.; alsdann ist $F = a + b + c + d + e +$ rc., $K = \frac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ rc.), weil die Anzahl aller ebenen Winkel $= 3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ rc. Da nun die Summe aller Winkel eines Dreyecks $= 2R$, eines Vierecks $= 4R$, eines Fünfecks $= 6R$, eines Sechsecks $= 8R$, eines Siebenecks $= 10R$, u. s. w., so ist die Summe aller ebenen Winkel $= 2a + 4b + 6c + 8d + 10e +$ rc. rechten Winkeln. Es ist aber $4K = 6a + 8b + 10c + 12d + 14e +$ rc. $4F = 4a + 4b + 4c + 4d + 4e +$ rc.; daher $4K - 4F = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e +$ rc. rechten Winkeln = der Summe aller ebenen Winkel.

Zus. Da $2K = 3F + 2\gamma$ (§ 85), so ist $4K - 4F = 2F + 4\gamma$. Die Summe aller ebenen Winkel kann daher nie kleiner als $2F$ rechte Winkel seyn. Da ferner $K = 3F - 6 - \alpha$ (§. 85), so ist auch $4K - 4F = 8F - 24 - 4\alpha$. Die Summe aller ebenen Winkel kann daher nie größer als $8F - 24$ rechte Winkel werden. Die Summe aller ebenen Winkel in Rechten ausgedrückt, kann daher nie außer den Gränzen $2F$ und $8F - 24$ fallen.

§. 89.

Lehrsatz. Die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines Körpers beträgt gerade so viele rechte Winkel, als die um acht verminderte vierfache Eckenzahl Einheiten enthält.

Bew. Die Summe aller ebenen Winkel ist $= 4K - 4F$ rechten Winkeln. Da nun $F + E = K + 2$, so ist $K - F = E - 2$, und daher $4K = 4E - 8$.

Anmerk. Dieser Satz, durch welchen man unmittelbar aus der Anzahl der Ecken eines Körpers die Summe der ebenen Winkel auf der Oberfläche desselben bestimmen kann, ist um so merkwürdiger, da es einen ähnlichen Satz für die ebe-

nen Figuren in Hinsicht auf das Verhältniß zwischen der Anzahl und der Summe ihrer Winkel giebt. Bedeutet nämlich n die Anzahl der Seiten oder Winkel einer Figur, so ist, wie bekannt, die Summe aller Winkel = 2n — 4 rechten Winkeln.

§. 90.

Lehrs. Körper, welche von lauter Dreyecken eingeschlossen, und deren Ecken nur von fünf, oder von sechs ebenen Winkeln gebildet werden, können nicht mehr und nicht weniger als zwölf Ecken von der ersten Art haben.

Bew. 1) Nach § 85 ist $K = \frac{1}{2} F + y$, und nach § 86 $F + 4 + 2y = 2E$. Da der Körper von lauter Dreyecken eingeschlossen wird, so ist (§ 82) $y = 0$; also $K = \frac{3}{2} F$, $E = \frac{1}{2} F + 2$.

2) Es sey nun p die Anzahl der Ecken, welche fünf, und q die Anzahl der Ecken, welche sechs Flächenwinkel haben; so ist $E = p + q$, und $K = \frac{1}{2}(5p + 6q)$. Aus diesen beyden Gleichungen findet man $p = 6E - 2K$.

3) Setzt man in diesen Ausdruck des p für K und E ihre Werthe aus 1, so erhält man $p = 12$.

Zus. Läßt man q unbestimmt, so ergeben sich für E, F, K, folgende Werthe: $E = 12 + q$, $F = 20 + 2q$ $K = 30 + 3q$.

Die Erfindung der hier vorgetragenen Sätze aus der Lehre von den eckigen Körpern haben wir größtentheils dem berühmten Euler zu verdanken; sie finden sich in den folgenden beyden Abhandlungen:

1) Elementa doctrinae solidorum. Novi Commentarii acad. scient. Petrop. Tom. IV. ad an. 1752—53. p. 109.
2) Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus Solida hedris planis inclusa sunt praedita. Ebend. p. 140.

VII. Aufgaben für Parallelepipeden, Prismen, Pyramiden, und einige andere einfache Körper.

§ 91.

Aufg. Die drey Kanten eines Parallelepipeds, welche an einer Ecke desselben zusammen stoßen, sind gegeben, wie auch die Winkel, welche diese Linien mit einander einschließen: man soll die Oberfläche und den kubischen Inhalt des Körpers finden.

Aufl. Es sey ABCDEFGH (Fig. 33) das Parallelepiped; AB = a, AD = b, AH = c die gegebenen Seiten; BAD = α, BAH = β, HAD = γ, die gegebenen Winkel.

1) Es ist die Seitenfläche ABCD = ab Sin. α, die Seitenfläche ABGH = ac Sin. β, die Seitenfläche ADEH = bc Sin. γ. Da nun jede dieser Flächen der ihr gegenüber liegenden gleich ist, so ist die ganze Oberfläche =

$$2\,(ab \text{ Sin. } \alpha + ac \text{ Sin. } \beta + bc \text{ Sin. } \gamma).$$

2) Es sey HR auf der Grundfläche perpendikulär, bhd ein sphärisches Dreyeck, dessen drey Seiten die, den gegebenen Winkeln zugehörigen Bogen sind, hr ein Perpendikel auf bd. Aus § 41 hat man alsdann Sin. hr =

$$\text{Sin. HAR} = \frac{2}{\text{Sin.}\,\alpha} \sqrt{\begin{bmatrix} \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) \times \\ \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\ \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \end{bmatrix}}$$

Nun ist die Höhe HR = c Sin. HAR, und die Grundfläche ABCD = ab Sin. α; folglich ist der Inhalt des Körpers = abc Sin. α Sin. HAR =

$$2\,abc \sqrt{\begin{bmatrix} \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) \\ \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \end{bmatrix}}$$

§ 92.

Aufg. Unter den nämlichen Voraussetzungen als im vorigen §, die Neigungswinkel der Gränzflächen des Parallelepipeds zu finden.

Aufl. Die Neigung der Ebenen ABGH, ABCD; ist durch den sphärischen Winkel hbd, die der Ebenen ADEH, ABCD, durch den Winkel bdh, und die der Ebenen ABGH, ADEH, durch den Winkel bhd gegeben. Es ist aber

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{hbd} = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \beta}},$$

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{bdh} = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \gamma}},$$

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{bhd} = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\text{Sin.}\ \beta\ \text{Sin.}\ \gamma}};$$

woraus sich die drey Winkel hbd, bdh, bhd, und somit die gesuchten Neigungswinkel bestimmen lassen.

§ 93.

Aufg. Unter den nämlichen Voraussetzungen, wie in § 91, die Figur und den Flächeninhalt eines Diagonalschnittes zu bestimmen.

Aufl. 1) Es sey ACFH (Fig. 34) der zu berechnende Diagonalschnitt; bhd ein sphär. Dreyeck, wie das in Fig. 33, und hc ein Bogen aus der Spitze h nach dem Durchschnittspunkte der Diagonale AC und des Bogens bd.

2) Alsdann ist im sphärischen Dreyecke bdh,

$$\text{Cos.}\ d = \frac{\text{Cos.}\ \beta - \text{Cos.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \gamma}{\text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \gamma},$$

und im sphär. Dreyecke cdh,

$$\text{Cos.}\ \text{hc} = \text{Cos.}\ \gamma\ \text{Cos.}\ \text{dc} + \text{Sin.}\ \gamma\ \text{Sin.}\ \text{dc}\ \text{Cos.}\ d.$$

Substituirt man in der zweyten Gleichung für Cos. d seinen Werth aus der ersten, so erhält man,

$$\text{Cos. hc} = \text{Cos.}\,\gamma\ \text{Cos. dc} + \frac{(\text{Cos.}\,\beta - \text{Cos.}\,\alpha\ \text{Cos.}\,\gamma)\ \text{Sin. dc}}{\text{Sin.}\,\alpha}.$$

3) Aus dem geradlinigen Dreyecke ACD, worin DC $= a$, DA $= b$, ADC $= 180^\circ - \alpha$, findet man,

$$AC = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,ab\ \text{Cos.}\,\alpha)};$$

hieraus ferner, vermittelst der Proportion AC : DC = Sin. ADC : Sin. DAC (= Sin. dc),

$$\text{Sin. dc} = \frac{a\ \text{Sin.}\,\alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,ab\ \text{Cos.}\,\alpha)}}$$

und demnach,

$$\text{Cos. dc} = \frac{b + a\ \text{Cos.}\,\alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,ab\ \text{Cos.}\,\alpha)}}.$$

4) Die Substitution dieser Werthe von Sin. dc, Cos. dc in der in 2 gefundenen Gleichung giebt,

$$\text{Cos. hc} = \text{Cos. HAC} = \frac{a\ \text{Cos.}\,\beta + b\ \text{Cos.}\,\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,ab\ \text{Cos.}\,\alpha)}}.$$

5) Hieraus erhält man ferner,

$$\text{Sin. HAC} = \frac{\sqrt{[a^2\ \text{Sin.}\,\beta^2 + b^2\ \text{Sin.}\,\gamma^2 + 2\,ab\,(\text{Cos.}\,\alpha - \text{Cos.}\,\beta\ \text{Cos.}\,\gamma)]}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,ab\ \text{Cos.}\,\alpha)}}.$$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms ACFH ist aber = HA . AC . Sin. HAC; man hat demnach folgenden Ausdruck dafür:

$$c\sqrt{[a^2\ \text{Sin.}\,\beta^2 + b^2\ \text{Sin.}\,\gamma^2 + 2\,ab\,(\text{Cos.}\,\alpha - \text{Cos.}\,\beta\ \text{Cos.}\,\gamma)]}.$$

6) Aus 3 hat man die Linie AC; aus 4 den Winkel HAC; und aus 5 den Flächeninhalt des Parallelogramms ACFH; mithin alles, was gesucht wurde.

Zus. Um diese Stücke in dem Diagonalschnitte, welcher durch die Kanten BG, DE gehet, zu bestimmen, darf man

nur die Ecke A mit der Ecke D vertauschen, und also in den gefundenen Ausdrücken $180° - \alpha$ für α, und $180° - \gamma$ für γ setzen, wodurch sich Cos. α in $-$ Cos. α, und Cos. γ in $-$ Cos. γ verwandelt.

§ 94.

Aufg. Unter den Voraussetzungen des § 91 die Diagonallinie des Parallelepipeds, und die Neigung des Diagonalschnittes gegen die Grundfläche zu finden.

Aufl. 1) Man denke sich die Diagonalen HC, AF, gezogen. Die Dreyecke HAC, ACF, geben alsdann, weil Cos. ACF $=$ $-$ Cos. HAC.

$$HC^2 = AH^2 + AC^2 - 2AH \cdot AC \cdot \text{Cos. } HAC,$$
$$AF^2 = CF^2 + AC^2 + 2CF \cdot AC \cdot \text{Cos. } HAC.$$

Setzt man hierin für AC und Cos. HAC ihre, im vorigen § gefundenen Werthe, und AH $=$ CF $=$ c, so erhält man für die beyden Diagonalen AF, HC folgende Ausdrücke:

$$AF = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \text{ Cos. } \alpha + 2ac \text{ Cos. } \beta + 2bc \text{ Cos. } \gamma)}$$
$$HC = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \text{ Cos. } \alpha - 2ac \text{ Cos. } \beta - 2bc \text{ Cos. } \gamma)}$$

2) Die Neigung der Ebenen ACFH, ABCD, ist durch den sphärischen Winkel hcd gegeben, es kommt also bloß darauf an, diesen zu bestimmen.

Das sphär. Dreyeck hdc giebt,

$$\text{Cos. } hcd = \frac{\text{Cos. } hd - \text{Cos. } hc \text{ Cos. } dc}{\text{Sin. } hc \text{ Sin. } dc}.$$

Nun ist Cos. hd $=$ Cos. γ; Cos. hc und Cos. dc, desgleichen Sin. hc und Sin. dc sind im vorigen § schon gefunden worden; man hat also, wenn diese Substitutionen gemacht werden, nach der gehörigen Reduktion

$$\text{Cos. } hcd = \frac{a \text{ Cos. } \gamma - b \text{ Cos. } \beta - \text{Cos. } \alpha (a \text{ Cos. } \beta - b \text{ Cos. } \gamma)}{\text{Sin. } \alpha \sqrt{[a^2 \text{ Sin. } \beta^2 + b^2 \text{ Sin. } \gamma^2 + 2ab(\text{Cos. } \alpha - \text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma)]}}$$

§ 95.

Ein Rhomboeder ist ein Parallelepiped, welches durch sechs gleiche und ähnliche Rhomben begränzt wird. Zwey von den einander gegenüber liegenden körperlichen Winkeln, wie A, F, (Fig. 34) werden von drey gleichen ebenen Winkeln, spitze oder stumpfe, eingeschlossen. Jeder von den sechs anderen wird durch einen ebenen Winkel, der dem vorigen gleich, und durch zwey andere, welche die Complemente jener zu 180° sind, begränzt. Diese Art von Parallelepipeden verdient deshalb besonders bemerkt zu werden, weil sie nach Haüy, einem der berühmtesten Mineralogen unserer Zeit, die primitive Form oder Kerngestalt des kohlengesäuerten Kalks ist, (m. s. Haüy's Lehrbuch der Mineralogie, übersetzt von Karsten. Paris und Leipzig 1804), aus welcher alle Varietäten dieses Fossils durch Aufschichtung kleiner, der Kerngestalt ähnlicher Partikelchen, welche Herr Haüy integrirende Molekuls nennt, erzeugt werden.

Aus der Definition des Rhomboeders folgt, daß alle Kanten desselben einander gleich sind, daß es ferner auf der Oberfläche desselben zweymal zwölf gleiche Winkel giebt, deren zwey von einander verschiedene zusammen 180° betragen, daß also nur einer gegeben zu werden braucht, um alle übrigen zu haben.

§ 96.

Aufg. Die Kante eines Rhomboeders und ein ebener Winkel auf der Oberfläche desselben ist gegeben: man soll die Oberfläche desselben, seinen körperlichen Inhalt, u. s. w. finden.

Aufl. Die Kante des Rhomboeders sey $= a$, ein Winkel desselben $= \alpha$. Als Parallelepiped betrachtet, ist demnach $c = b = a$, $\gamma = \beta = \alpha$,

1) Aus § 91 findet man die Oberfläche des Körpers $= 6 a^2 \, \text{Sin.}\, \alpha$, und den kubischen Inhalt $2 a^3 \sqrt{\text{Sin.}\, \frac{3}{2} \alpha \; \text{Sin.}\, \frac{1}{2} \alpha^3}$.

2) Die Neigungswinkel der Ebenen des Rhomboeders gegen einander erhält man aus § 92. Man hat nämlich in dem sphärischen Dreyecke bdh, durch dessen Winkel die gesuchten Neigungen der Seitenflächen bestimmt werden,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \text{hbd} = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \text{bdh} = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \text{bhd} = \frac{\text{Sin.}\, \frac{1}{2} \alpha}{\text{Sin.}\, \alpha} = \frac{1}{2\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2} \alpha}.$$

Setzt man demnach diesen gleichen Neigungswinkel $= \mu$, so ist,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \mu = \frac{1}{2\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2} \alpha} = \tfrac{1}{2}\, \text{Seg.}\, \tfrac{1}{2} \alpha.$$

3) Für den Diagonalschnitt ACFH erhält man aus § 95,

$$\text{AC} = \sqrt{2 a^2 (1 + \text{Cos.}\, \alpha)} = 2 a\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} \alpha$$

$$\text{Cos. HAC} = \frac{2 a\, \text{Cos.}\, \alpha}{2 a\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\text{Cos.}\, \alpha}{\text{Cos.}\, \frac{1}{2} \alpha}.$$

Der Flächeninhalt dieses Schnittes ist =

$$2 a^2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \alpha \,.\, \sqrt{(1 + 2\, \text{Cos.}\, \alpha)}.$$

4) Aus § 94 findet man ferner, Cos. hcd = 0, d. h. der Diagonalschnitt stehet auf der Grundfläche perpendikulär.

Für die Diagonalen des Rhomboeders erhält man aus den daselbst gegebenen Formeln folgende Ausdrücke:

$$\text{AF} = a \sqrt{(3 + 6\, \text{Cos.}\, \alpha)}, \quad \text{HC} = a \sqrt{(3 - 2\, \text{Cos.}\, \alpha)}.$$

§ 97.

Aufg. Die beyden Diagonalen der Gränzflächen eines Rhomboeders sind gegeben: man soll daraus die Kante, die ebenen Winkel, die Neigungswinkel der Seitenflächen, die Winkel, Seiten, und den Flächeninhalt eines Diagonalschnittes, wie auch die Diagonallinie des Rhomboeders finden.

Aufl. Die Diagonalen EG, HF eines Rhomben EFGH (Fig. 34) halbiren sich gegenseitig, und stehen auf einander perpendikulär, wie sich leicht erweisen läßt. Da nun diese Diagonalen gegeben sind, so sind auch ihre Hälften gegeben. Man setze daher EP = PG = g, HP = PF = p. Hieraus findet man die gesuchten Stücke, wie folgt.

1) Da HPG ein rechter Winkel ist, so ist HG = $\sqrt{(g^2 + p^2)} = a$, und dies ist die Kante des Rhomboeders.

2) Die Diagonalen eines Rhomben halbiren die Winkel desselben. Es ist also, EHF = ½ EHG = ½ α, und demnach

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{g}{p};$$

woraus sich der Winkel des Rhomben bestimmen läßt.

Auch ist $\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{g}{\sqrt{(g^2 + p^2)}}$, $\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{p}{\sqrt{(g^2 + p^2)}}$,

$$\text{Sin.}\ \alpha = 2\,\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\alpha\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2pg}{p^2 + g^2},$$

$\text{Cos.}\ \alpha = 1 - 2\,\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{p^2 - g^2}{p^2 + g^2}$, wie beym Haüy, in der Uebers. des angef. Werkes S. 412 des ersten Theiles.

3) Für den Neigungswinkel der Seitenflächen hat man nach 2 § 96,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\mu = \frac{1}{2\,\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{\sqrt{(g^2 + p^2)}}{2p}.$$

Daher $\text{Cos.}\ \mu = 1 - 2\,\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\mu^2 = \frac{p^2 - g^2}{2p^2}$,

wie beym Haüy, S. 413.

4) Für den Winkel HAC des Diagonalschnittes ACFH erhält man aus 3 § 96,

$$\text{Cos.}\ HAC = \frac{\text{Cos.}\ \alpha}{\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{p^2 - g^2}{p\sqrt{(p^2 + g^2)}}.$$

lich ist,

$$\text{Sin. } HAC = \frac{\sqrt{(3p^2 g^2 - g^4)}}{p\sqrt{(p^2+g^2)}},$$

und daher,

$$\text{Tang. } HAC = \frac{\text{Sin. } HAC}{\text{Cos. } HAC} = \frac{\sqrt{(3p^2 g^2 - g^4)}}{p^2 - g^2};$$

wie beym Haüy, S. 414.

5) $AC = HF = 2p$, $AH = HG = \sqrt{(g^2 + p^2)}$.

6) Aus 5 in § 96 ergiebt sich auch der Flächeninhalt des Diagonalschnittes

$$= 2g\sqrt{(3p^2 - g^2)}.$$

7) Die Diagonallinie des Rhomboeders erhält man aus 4 in § 96; es ist nämlich $AF = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$, wie beym Haüy, S. 411.

8) Der Flächeninhalt des Rhomboeders ist, nach 1 in § 96, $= 6a^2 \text{ Sin. } \alpha = 12\,pg$; und der kubischen Inhalt $= 2a^3 \sqrt{\text{Sin. } \tfrac{3}{2}\alpha \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha^3} = 2a^3 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sqrt{(4 \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\alpha^2 - 1)}$

$$= \frac{2a^3 g^2}{p^2 + g^2}\sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{p^2 + g^2}} = 2g^2\sqrt{(3p^2 - g^2)}.$$

§ 98.

Aufg. In einem dreyseitigen Prisma kennet man drey in einer Ecke zusammen stoßende Kanten, wie auch die ebenen Winkel dieser Ecke: man soll die Neigungswinkel aller das Prisma begränzenden Flächen, den körperlichen Inhalt, und die Oberfläche desselben finden.

Aufl. Es sey ABCDEF (Fig. 35) ein Prisma; $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, die gegebenen Kanten; $BAC = \alpha$, $BAD = \beta$, $CAD = \gamma$, die gegebenen Winkel.

1) Wegen der bekannten Winkel α, β, γ, sind auch die Seiten des sphärischen Dreyeckes bcd bekannt; also auch die

u. s. w.; alsdann ist $F = a + b + c + d + e +$ ꝛc., $K = \frac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ ꝛc.$)$, weil die Anzahl aller ebenen Winkel $= 3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ ꝛc. Da nun die Summe aller Winkel eines Dreyecks $= 2R$, eines Vierecks $= 4R$, eines Fünfecks $= 6R$, eines Sechsecks $= 8R$, eines Siebenecks $= 10R$, u. s. w., so ist die Summe aller ebenen Winkel $= 2a + 4b + 6c + 8d + 10e +$ ꝛc. rechten Winkeln. Es ist aber $4K = 6a + 8b + 10d + 12d + 14e +$ ꝛc. $4F = 4a + 4b + 4c + 4d + 4e +$ ꝛc.; daher $4K - 4F = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e +$ ꝛc. rechten Winkeln = der Summe aller ebenen Winkel.

Zus. Da $2K = 3F + 2\gamma$ (§ 85), so ist $4K - 4F = 2F + 4\gamma$. Die Summe aller ebenen Winkel kann daher nie kleiner als $2F$ rechte Winkel seyn. Da ferner $K = 3F - 6 - \alpha$ (§ 85), so ist auch $4K - 4F = 8F - 24 - 4\alpha$. Die Summe aller ebenen Winkel kann daher nie größer als $8F - 24$ rechte Winkel werden. Die Summe aller ebenen Winkel in Rechten ausgedruckt, kann daher nie außer den Gränzen $2F$ und $8F - 24$ fallen.

§. 89.

Lehrsatz. Die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines Körpers beträgt gerade so viele rechte Winkel, als die um acht verminderte vierfache Eckenzahl Einheiten enthält.

Bew. Die Summe aller ebenen Winkel ist $= 4K - 4F$ rechten Winkeln. Da nun $F + E = K + 2$, so ist $K - F = E - 2$, und daher $4K = 4E - 8$.

Anmerk. Dieser Satz, durch welchen man unmittelbar aus der Anzahl der Ecken eines Körpers die Summe der ebenen Winkel auf der Oberfläche desselben bestimmen kann, ist um so merkwürdiger, da es einen ähnlichen Satz für die ebe-

nen Figuren in Hinsicht auf das Verhältniß zwischen der Anzahl und der Summe ihrer Winkel giebt. Bedeutet nämlich n die Anzahl der Seiten oder Winkel einer Figur, so ist, wie bekannt, die Summe aller Winkel = 2n — 4 rechten Winkeln.

§. 90.

Lehrs. Körper, welche von lauter Dreyecken eingeschlossen, und deren Ecken nur von fünf, oder von sechs ebenen Winkeln gebildet werden, können nicht mehr und nicht weniger als zwölf Ecken von der ersten Art haben.

Bew. 1) Nach § 85 ist $K = \frac{3}{2} F + y$, und nach § 86 $F + 4 + 2y = 2E$. Da der Körper von lauter Dreyecken eingeschlossen wird, so ist (§ 82) $y = 0$; also $K = \frac{3}{2} F$, $E = \frac{1}{2} F + 2$.

2) Es sey nun p die Anzahl der Ecken, welche fünf, und q die Anzahl der Ecken, welche sechs Flächenwinkel haben; so ist $E = p + q$, und $K = \frac{1}{2}(5p + 6q)$. Aus diesen beyden Gleichungen findet man $p = 6E - 2K$.

3) Setzt man in diesen Ausdruck des p für K und E ihre Werthe aus 1, so erhält man $p = 12$.

Zus. Läßt man q unbestimmt, so ergeben sich für E, F, K, folgende Werthe: $E = 12 + q$, $F = 20 + 2q$, $K = 30 + 3q$.

Die Erfindung der hier vorgetragenen Sätze aus der Lehre von den eckigen Körpern haben wir größtentheils dem berühmten Euler zu verdanken; sie finden sich in den folgenden beyden Abhandlungen:

1) Elementa doctrinae solidorum. Novi Commentarii acad. scient. Petrop. Tom. IV. ad an. 1752—53. p. 109.

2) Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus Solida hedris planis inclusa sunt praedita. Ebend. p. 140.

VII. Aufgaben für Parallelepipeden, Prismen, Pyramiden, und einige andere einfache Körper.

§ 91.

Aufg. Die drey Kanten eines Parallelepipeds, welche an einer Ecke desselben zusammen stoßen, sind gegeben, wie auch die Winkel, welche diese Linien mit einander einschließen: man soll die Oberfläche und den kubischen Inhalt des Körpers finden.

Aufl. Es sey ABCDEFGH (Fig. 33) das Parallelepiped; AB = a, AD = b, AH = c die gegebenen Seiten; BAD = α, BAH = β, HAD = γ, die gegebenen Winkel.

1) Es ist die Seitenfläche ABCD = ab Sin. α, die Seitenfläche ABGH = ac Sin. β, die Seitenfläche ADEH = bc Sin. γ. Da nun jede dieser Flächen der ihr gegenüber liegenden gleich ist, so ist die ganze Oberfläche =

$$2\,(ab\ \text{Sin.}\ \alpha + ac\ \text{Sin.}\ \beta + bc\ \text{Sin.}\ \gamma).$$

2) Es sey HR auf der Grundfläche perpendikulär, und ein sphärisches Dreyeck, dessen drey Seiten die, den gegebenen Winkeln zugehörigen Bogen sind, hr ein Perpendikel auf BD. Aus § 41 hat man alsdann Sin. hr =

$$\text{Sin. HAR} = \frac{2}{\text{Sin.}\alpha} \sqrt{\begin{bmatrix}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\times\\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\end{bmatrix}}.$$

Nun ist die Höhe HR = c Sin. HAR, und die Grundfläche ABCD = ab Sin. α; folglich ist der Inhalt des Körpers = abc Sin. α Sin. HAR =

$$2abc \sqrt{\begin{bmatrix}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\end{bmatrix}}.$$

§ 92.

Aufg. Unter den nämlichen Voraussetzungen als im vorigen §, die Neigungswinkel der Gränzflächen des Parallelepipeds zu finden.

Aufl. Die Neigung der Ebenen ABGH, ABCD; ist durch den sphärischen Winkel hbd, die der Ebenen ADEH, ABCD, durch den Winkel bdh, und die der Ebenen ABGH, ADEH, durch den Winkel bhd gegeben. Es ist aber

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{hbd} = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\beta}},$$

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{bdh} = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\gamma}},$$

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{bhd} = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\text{Sin.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\gamma}};$$

woraus sich die drey Winkel hbd, bdh, bhd, und somit die gesuchten Neigungswinkel bestimmen lassen.

§ 93.

Aufg. Unter den nämlichen Voraussetzungen, wie in § 91, die Figur und den Flächeninhalt eines Diagonalschnittes zu bestimmen.

Aufl. 1) Es sey ACFH (Fig. 34) der zu berechnende Diagonalschnitt; bhd ein sphär. Dreyeck, wie das in Fig. 33, und hc ein Bogen aus der Spitze h nach dem Durchschnittspunkte der Diagonale AG und des Bogens bd.

2) Alsdann ist im sphärischen Dreyecke bdh,

$$\text{Cos.}\,\text{d} = \frac{\text{Cos.}\,\beta - \text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\gamma}{\text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\gamma},$$

und im sphär. Dreyecke cdh,

$$\text{Cos.}\,\text{hc} = \text{Cos.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\text{dc} + \text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\text{dc}\,\text{Cos.}\,\text{d}.$$

Substituirt man in der zweyten Gleichung für Cos. d seinen Werth aus der ersten, so erhält man,

$$\text{Cos. hc} = \text{Cos.}\,\gamma\,\text{Cos. dc} + \frac{(\text{Cos.}\,\beta - \text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\gamma)\,\text{Sin. dc}}{\text{Sin.}\,\alpha}.$$

3) Aus dem geradlinigen Dreyecke ACD, worin DC = a, DA = b, ADC = 180° — α, findet man,

$$AC = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,ab\,\text{Cos.}\,\alpha)};$$

hieraus ferner, vermittelst der Proportion AC : DC = Sin. ADC : Sin. DAC (= Sin. dc),

$$\text{Sin. dc} = \frac{a\,\text{Sin.}\,\alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,ab\,\text{Cos.}\,\alpha)}}$$

und demnach,

$$\text{Cos. dc} = \frac{b + a\,\text{Cos.}\,\alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,ab\,\text{Cos.}\,\alpha)}}.$$

4) Die Substitution dieser Werthe von Sin. dc, Cos. dc, in der in 2 gefundenen Gleichung giebt,

$$\text{Cos. hc} = \text{Cos. HAC} = \frac{a\,\text{Cos.}\,\beta + b\,\text{Cos.}\,\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,ab\,\text{Cos.}\,\alpha)}}.$$

5) Hieraus erhält man ferner,

$$\text{Sin. HAC} = \frac{\sqrt{[a^2\,\text{Sin.}\,\beta^2 + b^2\,\text{Sin.}\,\gamma^2 + 2\,ab\,(\text{Cos.}\,\alpha - \text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\gamma)]}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,ab\,\text{Cos.}\,\alpha)}}.$$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms ACFH ist aber = HA . AC . Sin. HAC; man hat demnach folgenden Ausdruck dafür:

$$c\sqrt{[a^2\,\text{Sin.}\,\beta^2 + b^2\,\text{Sin.}\,\gamma^2 + 2\,ab\,(\text{Cos.}\,\alpha - \text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\gamma)]}.$$

6) Aus 3 hat man die Linie AC; aus 4 den Winkel HAC; und aus 5 den Flächeninhalt des Parallelogramms ACFH; mithin alles, was gesucht wurde.

Zus. Um diese Stücke in dem Diagonalschnitte, welcher durch die Kanten BG, DE gehet, zu bestimmen, darf man

nur die Ecke A mit der Ecke D vertauschen, und also in den gefundenen Ausdrücken $180° - \alpha$ für α, und $180° - \gamma$ für γ setzen, wodurch sich Cos. α in $-$ Cos. α, und Cos. γ in $-$ Cos. γ verwandelt.

§ 94.

Aufg. Unter den Voraussetzungen des § 91 die Diagonallinie des Parallelepipeds, und die Neigung des Diagonalschnittes gegen die Grundfläche zu finden.

Aufl. 1) Man denke sich die Diagonalen HC, AF, gezogen. Die Dreyecke HAC, ACF, geben alsdann, weil Cos. ACF = $-$ Cos. HAC.

$$HC^2 = AH^2 + AC^2 - 2AH \cdot AC \cdot \text{Cos. } HAC,$$
$$AF^2 = CF^2 + AC^2 + 2CF \cdot AC \cdot \text{Cos. } HAC.$$

Setzt man hierin für AC und Cos. HAC ihre, im vorigen § gefundenen Werthe, und AH = CF = c, so erhält man für die beyden Diagonalen AF, HC folgende Ausdrücke:

$$AF = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \text{ Cos. } \alpha + 2ac \text{ Cos. } \beta + 2bc \text{ Cos. } \gamma)}$$
$$HC = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \text{ Cos. } \alpha - 2ac \text{ Cos. } \beta - 2bc \text{ Cos. } \gamma)}$$

2) Die Neigung der Ebenen ACFH, ABCD, ist durch den sphärischen Winkel hcd gegeben, es kommt also bloß darauf an, diesen zu bestimmen.

Das sphär. Dreyeck hdc giebt,

$$\text{Cos. } hcd = \frac{\text{Cos. } hd - \text{Cos. } hc \text{ Cos. } dc}{\text{Sin. } hc \text{ Sin. } dc}.$$

Nun ist Cos. hd = Cos. γ; Cos. hc und Cos. dc, desgleichen Sin. hc und Sin. dc sind im vorigen § schon gefunden worden; man hat also, wenn diese Substitutionen gemacht werden, nach der gehörigen Reduktion

$$\text{Cos. } hcd = \frac{a \text{ Cos. } \gamma - b \text{ Cos. } \beta - \text{Cos. } \alpha (a \text{ Cos. } \beta - b \text{ Cos. } \gamma)}{\text{Sin. } \alpha \sqrt{[a^2 \text{ Sin. } \beta^2 + b^2 \text{ Sin. } \gamma^2 + 2ab (\text{Cos. } \alpha - \text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma)]}}$$

§ 95.

Ein Rhomboeder ist ein Parallelepiped, welches durch sechs gleiche und ähnliche Rhomben begränzt wird. Zwey von den einander gegenüber liegenden körperlichen Winkeln, wie A, F, (Fig. 34) werden von drey gleichen ebenen Winkeln, spitze oder stumpfe, eingeschlossen. Jeder von den sechs anderen wird durch einen ebenen Winkel, der dem vorigen gleich, und durch zwey andere, welche die Complemente jener zu 180° sind, begränzt. Diese Art von Parallelepipeden verdient deshalb besonders bemerkt zu werden, weil sie nach Haüy, einem der berühmtesten Mineralogen unserer Zeit, die primitive Form oder Kerngestalt des kohlengesäuerten Kalks ist, (m. s. Haüy's Lehrbuch der Mineralogie, übersetzt von Karsten. Paris und Leipzig 1804), aus welcher alle Varietäten dieses Fossils durch Aufschichtung kleiner, der Kerngestalt ähnlicher Partikelchen, welche Herr Haüy integrirende Moleküls nennt, erzeugt werden.

Aus der Definition des Rhomboeders folgt, daß alle Kanten desselben einander gleich sind, daß es ferner auf der Oberfläche desselben zweymal zwölf gleiche Winkel giebt, deren zwey von einander verschiedene zusammen 180° betragen, daß also nur einer gegeben zu werden braucht, um alle übrigen zu haben.

§ 96.

Aufg. Die Kante eines Rhomboeders und ein ebener Winkel auf der Oberfläche desselben ist gegeben: man soll die Oberfläche desselben, seinen körperlichen Inhalt, u. s. w. finden.

Aufl. Die Kante des Rhomboeders sey $= a$, ein Winkel desselben $= \alpha$. Als Parallelepiped betrachtet, ist demnach $c = b = a$, $\gamma = \beta = \alpha$,

1) Aus § 91 findet man die Oberfläche des Körpers $= 6\, a^2\, \text{Sin.}\, \alpha$, und den kubischen Inhalt $2\, a^3 \sqrt{\text{Sin.}\, \frac{3}{2}\, \alpha\ \text{Sin.}\, \frac{1}{2}\, \alpha^2}$.

2) Die Neigungswinkel der Ebenen des Rhomboeders gegen einander erhält man aus § 92. Man hat nämlich in dem sphärischen Dreyecke bdh, durch dessen Winkel die gesuchten Neigungen der Seitenflächen bestimmt werden,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \text{hbd} = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \text{bdh} = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \text{bhd} = \frac{\text{Sin.}\, \frac{1}{2}\, \alpha}{\text{Sin.}\, \alpha} = \frac{1}{2\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\, \alpha}.$$

Setzt man demnach diesen gleichen Neigungswinkel $= \mu$, so ist,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \mu = \frac{1}{2\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\, \alpha} = \tfrac{1}{2}\, \text{Sec.}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha.$$

3) Für den Diagonalschnitt ACFH erhält man aus § 95,

$$\text{AC} = \sqrt{2\, a^2\, (1 + \text{Cos.}\, \alpha)} = 2\, a\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha$$

$$\text{Cos. HAC} = \frac{2\, a\, \text{Cos.}\, \alpha}{2a\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\, \alpha} = \frac{\text{Cos.}\, \alpha}{\text{Cos.}\, \frac{1}{2}\, \alpha}.$$

Der Flächeninhalt dieses Schnittes ist $=$

$$2\, a^2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha \,.\, \sqrt{(1 + 2\, \text{Cos.}\, \alpha)}.$$

4) Aus § 94 findet man ferner, Cos. hcd $= 0$, d. h. der Diagonalschnitt stehet auf der Grundfläche perpendikulär.

Für die Diagonalen des Rhomboeders erhält man aus den daselbst gegebenen Formeln folgende Ausdrücke:

$$\text{AF} = a \sqrt{(3 + 6\, \text{Cos.}\, \alpha)},\ \text{HC} = a \sqrt{(3 - 2\, \text{Cos.}\, \alpha)}.$$

§ 97.

Aufg. Die beyden Diagonalen der Gränzflächen eines Rhomboeders sind gegeben: man soll daraus die Kante, die ebenen Winkel, die Neigungswinkel der Seitenflächen, die Winkel, Seiten, und den Flächeninhalt eines Diagonalschnittes, wie auch die Diagonallinie des Rhomboeders finden.

Aufl. Die Diagonalen EG, HF eines Rhomben EFGH (Fig. 34) halbiren sich gegenseitig, und stehen auf einander perpendikulär, wie sich leicht erweisen läßt. Da nun diese Diagonalen gegeben sind, so sind auch ihre Hälften gegeben. Man setze daher EP = PG = g, HP = PF = p. Hieraus findet man die gesuchten Stücke, wie folgt.

1) Da HPG ein rechter Winkel ist, so ist HG = $\sqrt{(g^2 + p^2)} = a$, und dies ist die Kante des Rhomboeders.

2) Die Diagonalen eines Rhomben halbiren die Winkel desselben. Es ist also, EHF = ½ EHG = ½ α, und demnach,

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{g}{p};$$

woraus sich der Winkel des Rhomben bestimmen läßt.

Auch ist $\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{g}{\sqrt{(g^2 + p^2)}}$, $\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{p}{\sqrt{(g^2 + p^2)}}$,

$$\text{Sin. } \alpha = 2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2pg}{p^2 + g^2},$$

$\text{Cos. } \alpha = 1 - 2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{p^2 - g^2}{p^2 + g^2}$, wie beym Haüy, in der Uebers. des angef. Werkes S. 412 des ersten Theiles.

3) Für den Neigungswinkel der Seitenflächen hat man nach 2 § 96,

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\mu = \frac{1}{2 \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{\sqrt{(g^2 + p^2)}}{2p}.$$

Daher $\text{Cos. } \mu = 1 - 2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\mu^2 = \frac{p^2 - g^2}{2p^2}$,

wie beym Haüy, S. 413.

4) Für den Winkel HAC des Diagonalschnittes ACFH erhält man aus 3 § 96,

$$\text{Cos. HAC} = \frac{\text{Cos. } \alpha}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{p^2 - g^2}{p\sqrt{(p^2 + g^2)}}.$$

Auch ist,

$$\text{Sin. HAC} = \frac{\sqrt{(3p^2 g^2 - g^4)}}{p\sqrt{(p^2 + g^2)}},$$

und daher,

$$\text{Tang. HAC} = \frac{\text{Sin. HAC}}{\text{Cos. HAC}} = \frac{\sqrt{(3p^2 g^2 - g^4)}}{p^2 - g^2};$$

wie beym Haüy, S. 414.

5) $AC = HF = 2p$, $AH = HG = \sqrt{(g^2 + p^2)}$.

6) Aus 3 in § 96 ergiebt sich auch der Flächeninhalt des Diagonalschnittes

$$= 2g\sqrt{(3p^2 - g^2)}.$$

7) Die Diagonallinie des Rhomboeders erhält man aus 4 in § 96; es ist nämlich $AF = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$, wie beym Haüy, S. 411.

8) Der Flächeninhalt des Rhomboeders ist, nach 1 in § 96, $= 6a^2 \text{Sin.}\,\alpha = 12\,pg$; und der kubischen Inhalt $= 2a^3\sqrt{\text{Sin.}\tfrac{3}{2}\alpha\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a^3} = 2a^3\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\alpha^2\sqrt{(4\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha^2 - 1)}$

$$= \frac{2a^3 g^2}{p^2 + g^2}\sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{p^2 + g^2}} = 2g^2\sqrt{(3p^2 - g^2)}.$$

§ 98.

Aufg. In einem dreyseitigen Prisma kennet man drey in einer Ecke zusammen stoßende Kanten, wie auch die ebenen Winkel dieser Ecke; man soll die Neigungswinkel aller das Prisma begränzenden Flächen, den körperlichen Inhalt, und die Oberfläche desselben finden.

Aufl. Es sey ABCDEF (Fig. 35) ein Prisma; $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, die gegebenen Kanten; $BAC = \alpha$, $BAD = \beta$, $CAD = \gamma$, die gegebenen Winkel.

1) Wegen der bekannten Winkel α, β, γ, sind auch die Seiten des sphärischen Dreyeckes bcd bekannt; also auch die

Winkel b, e, d, d. h. die Neigungswinkel der Seitenflächen ADEB, ADFC, gegen die Grundfläche und gegen einander selbst.

2) Im geradlinigen Dreyecke ABC, kennet man die beyden Seiten AB, AC, und den Winkel BAC, folglich auch die Winkel ABC ACB, und die Seite BC.

3) Im sphärischen Dreyecke ace kennet man nun den Winkel a = b, nebst den Seiten ac, ae (= 180° − β), folglich auch die Winkel c, e, und die Seite ce. Der Winkel c giebt die Neigung der Ebene BEFC gegen die Grundfläche ABC, und der Winkel e die Neigung der nämlichen Ebene gegen ABED.

4) An der Ecke C kennet man die Winkel ACB (2), ACF = 180° − γ, und BCF = 180° − CBE = 180° − ce, folglich läßt sich auf eine ähnliche Art, wie bey A der Neigungswinkel der Ebenen BCFE, ACFD finden.

5) Die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die obere Grundfläche DEF, sind nichts anders, als die Ergänzungen der respektiven Winkel, welche sie mit der untern Grundfläche machen.

6) Der körperliche Inhalt eines Prisma ist die Hälfte von dem des Parallelepipeds von doppelt so großer Grundfläche, und ist demnach = (§ 91).

$$abc \sqrt{\begin{bmatrix} \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) \\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \end{bmatrix}}.$$

7) Die Oberfläche des Prisma bestehet aus drey Parallelogrammen und zwey Dreyecken. Es ist aber △ ACB = △ DFE = ½ ab Sin. α, Parallelogr. ABED = ac Sin. β, ACFD = bc Sin. γ. Da ferner BC und CBE schon gefunden worden, so setze man BC = f, CBE = ζ; alsdann

ist Parallelogr. CBEF = cf Sin. ζ. Nimmt man alles dies zusammen, so erhält man die gesuchte Oberfläche =

$$ab \text{ Sin. } \alpha + ac \text{ Sin. } \beta + bc \text{ Sin. } \gamma + cf \text{ Sin. } \zeta.$$

§ 99.

Aufg. In einer dreyseitigen Pyramide kennet man drey, in einer Ecke zusammenstoßende Kanten, wie auch die ebenen Winkel dieser Ecke: man soll die ebenen Winkel, die Neigungswinkel der Seitenflächen, die Oberfläche und den körperlichen Inhalt dieser Pyramide finden.

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 36.) eine Pyramide, worin die drey Kanten AB = a, AC = b, AD = c, wie auch die drey Winkel BAC = α, BAD = β, CAD = γ, gegeben sind. Es sey ferner bdc das der Ecke A, und ac′d′ das der Ecke B zugehörige sphärische Dreyeck; DE ein Perpendikel auf der Grundfläche, und der Bogen de auf bc perpendikulär.

1) Aus den gegebenen Winkeln kennet man die drey Seiten des sphärischen Dreyeckes bcd, also auch seine Winkel b, c, d, d. h. die Neigungswinkel der Ebenen BAC, BAD, CAD.

2) In jedem der Dreyecke BAC, BAD, CAD, kennet man zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel, also auch die dritte Seite und die übrigen Winkel. Man kennet also die Kanten BC, CD, BD, und die Winkel ABC, ACB, ABD, ADB, ACD, ADC.

3) Im sphärischen Dreyecke ac′d′ kennet man nun die Seiten ac′, ad′, und den Winkel a = b; folglich auch die Winkel c′, d′; also die Neigungswinkel der Ebenen ABC, CBD, ABD.

4) Die Winkel des Dreyeckes BCD erhält man aus den bekannten Seiten desselben.

5) Alle ebenen Winkel der Ecke C sind nun bekannt, also auch die Neigung der Ebenen ACD, BCD, gegen einander.

6) Die Dreyecke, welche die Pyramide begränzen, sind völlig bestimmt; also läßt sich ihr Flächeninhalt auf mancherley Weise finden, folglich auch die Oberfläche der Pyramide.

7) Der kubische Inhalt der Pyramide läßt sich aus 6 in § 98 finden, wenn man von dem daselbst für den kubischen Inhalt des Prisma gefundenen Ausdrucke den dritten Theil nimmt; denn eine Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Er ist demnach =

$$\tfrac{1}{3}\,abc \sqrt{\begin{bmatrix}\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\\ \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\end{bmatrix}}.$$

Zus. Für den kubischen Inhalt der Pyramide läßt sich auch noch ein anderer, wegen seiner Form merkwürdiger Ausdruck finden.

Aus dem sphärischen Dreyecke bcd erhält man nämlich,

$$\text{Cos. dbc} = \frac{\text{Cos.}\,\gamma - \text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\beta}{\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\beta},$$

und daher, da Sin. dbc $= \sqrt{[1 - (\text{Cos. dbc})^2]}$,

$$\text{Sin. dbc} = \frac{\sqrt{(\text{Sin.}\alpha^2\,\text{Sin.}\beta^2 - \text{Cos.}\gamma^2 + 2\,\text{Cos.}\alpha\,\text{Cos.}\beta\,\text{Cos.}\gamma - \text{Cos.}\alpha^2\,\text{Cos.}\beta^2)}}{\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\beta}$$

Im rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke bde hat man ferner,

$$\text{Sin. de} = \text{Sin. db Sin. dbc}$$

oder $\quad \text{Sin. DAE} = \text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin. dbc}.$

Hieraus erhält man die Höhe der Pyramide

$$\text{DE} = \text{DA Sin. DAE} = c\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin. dbc}.$$

Auch ist $\triangle \text{ACB} = \tfrac{1}{2}\,ab\,\text{Sin.}\,\alpha.$

Man hat demnach

$$\text{Pyram. } ABCD = \tfrac{1}{3} DE \times \triangle ACB =$$
$$\tfrac{1}{6} abc \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } dbc.$$

Wird hierin für Sin. dbc der vorhin gefundene Ausdruck gesetzt, so erhält man,

$$\text{Pyr. } ABCD = \tfrac{1}{6} abc \sqrt{\begin{bmatrix} \text{Sin. } \alpha^2 \text{ Sin. } \beta^2 - \text{Cos. } \gamma^2 + \\ 2 \text{Cos. } \alpha \text{ Cos } \beta \text{ Cos. } \gamma - \text{Cos. } \alpha^2 \text{ Cos. } \beta^2 \end{bmatrix}}$$

oder, da $\text{Sin. } \alpha^2 = 1 - \text{Cos. } \alpha^2$, $\text{Sin. } \beta^2 = 1 - \text{Cos. } \beta^2$,

$$\text{Pyr. } ABCD =$$
$$\tfrac{1}{6} abc \sqrt{(1 - \text{Cos. } \alpha^2 - \text{Cos. } \beta^2 - \text{Cos. } \gamma^2 + 2 \text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma)}.$$

§ 100.

Aufg. Den kubischen Inhalt einer Pyramide aus ihren Kanten zu finden.

Aufl. 1) Es sey in der Pyramide ABCD (Fig. 36) wie im vorigen §, $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$; ferner sey $BC = d$, $CD = e$, $BD = f$.

2) Die Dreyecke BAC, BAD, CAD, geben,

$$\text{Cos. } BAC = \text{Cos. } \alpha = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab},$$

$$\text{Cos. } BAD = \text{Cos. } \beta = \frac{a^2 + c^2 - f^2}{2ac},$$

$$\text{Cos. } CAD = \text{Cos. } \gamma = \frac{b^2 + c^2 - e^2}{2bc}.$$

3) Werden diese Werthe von Cos. α, Cos. β, Cos. γ, in dem, am Ende des vorigen §'s gefundenen Ausdruck substituirt, so erhält man,

$$\text{Pyram. } ABCD = \tfrac{1}{6}\, abc \sqrt{\begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{a^2+b^2-d^2}{2ab}\right)^2 - \left(\frac{a^2+c^2-f^2}{2ac}\right)^2 \\ - \left(\frac{b^2+c^2-e^2}{2bc}\right)^2 + 2\left(\frac{a^2+b^2-d^2}{2ab}\right) \\ \left(\frac{a^2+c^2-f^2}{2ac}\right)\left(\frac{b^2+c^2-e^2}{2bc}\right) \end{bmatrix}}$$

$$= \tfrac{1}{12} \sqrt{\begin{bmatrix} 4a^2b^2c^2 - c^2(a^2+b^2-d^2)^2 - b^2(a^2+c^2-f^2)^2 \\ - a^2(b^2+c^2-e^2)^2 + (a^2+b^2-d^2) \\ (a^2+c^2-f^2)(b^2+c^2-e^2) \end{bmatrix}}.$$

4) Hieraus ergiebt sich nach der gehörigen Entwickelung und Reduktion,

$$\text{Pyr. } ABCD = \tfrac{1}{12} \sqrt{\begin{bmatrix} c^2d^2(a^2+b^2+e^2+f^2-c^2-d^2)+ \\ a^2e^2(a^2+c^2+d^2+f^2-a^2-e^2)+ \\ b^2f^2(a^2+c^2+d^2+e^2-b^2-f^2)- \\ a^2b^2d^2 - a^2c^2f^2 - b^2c^2e^2 - d^2e^2f^2 \end{bmatrix}}$$

Erst. Zus. Wenn sowohl die drey Seitenlinien der Pyramide, als auch die drey Seiten ihrer Grundfläche einander gleich sind; so hat man $c = e = f$, $a = b = d$, und daher

$$\text{Pyr. } ABCD = \tfrac{1}{12} a^2 \sqrt{(3c^2 - a^2)}.$$

Zweyt. Zus. Sind alle Kanten der Pyramide einander gleich, so ist auch $c = a$, und man hat,

$$\text{Pyr. } ABCD = \tfrac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$$

§. 101.

Aufg. Den kubischen Inhalt einer parallel mit der Grundfläche abgekürzten Pyramide zu finden.

Aufl. 1) Es sey ABCcab (Fig. 37) die abgekürzte Pyramide, deren kubischer Inhalt gesucht wird, und welche aus der ganzen Pyramide ABCD erhalten wird, wenn man parallel

rallel mit der Grundfläche die kleinere Pyramide Dabc abschneidet. Demnach ist die abgekürzte Pyramide ABCcab = Pyr. DABC — Pyr. Dabc.

2) Unter den verschiedenen Stücken, die man als gegeben ansehen kann, will ich solche nehmen, welche die einfachsten Resultate geben, und sich am leichtesten messen lassen, nämlich die beyden Grundflächen ABC, abc, und die Höhe Ee, und zwar von den ersteren nur den Flächeninhalt. Es sey die Grundfläche ABC = G, und abc = g; ferner die Höhe Ee = h. Wüßte man nun die Höhe der ganzen Pyramide DABC, so wäre alles Uebrige leicht zu berechnen. Man setze daher DE = x; dies giebt De = x — h.

3) Man weiß, daß für jeden der Grundfläche parallelen Schnitt abc die folgende Proportion statt findet;

Grundfl. ABC : abc = $DA^2 : Da^2 = DE^2 : De^2$.

Es ist also $G : g = x^2 : (x - h)^2$,

oder $\sqrt{G} : \sqrt{g} = x : x - h$;

woraus man findet,

$$x = \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} = DE,$$

$$x - h = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} = De.$$

4) Es ist demnach,

Pyr. DABC = $\frac{1}{3}$DE × Grundfl. ABC = $\frac{\frac{1}{3}hG\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$,

Pyr. Dabc = $\frac{1}{3}$De × Grundfl. abc = $\frac{\frac{1}{3}hg\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$;

folglich die abgekürzte Pyramide

ABCcab = Pyr. DABC — Pyr. Dabc =

$$\frac{\frac{1}{3}h(G\sqrt{G} - g\sqrt{g})}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} = \tfrac{1}{3}h(G + g + \sqrt{Gg}).$$

Anmerk. Vermittelst dieser Formel lassen sich demnach alle Körper berechnen, welche als parallel abgekürzte Pyramiden angesehen werden können; also alle die, welche von zwey parallelen Flächen begränzt werden, und deren Seitenkanten in einen einzigen Punkt zusammen laufen. Hier folgt die Berechnung eines Körpers, der zwar ebenfalls von zwey parallelen Flächen begränzt wird, dessen Seitenkanten aber nicht in einen und denselben Punkt zusammen laufen.

§ 102.

Aufg. Den kubischen Inhalt eines vierseitigen Körpers zu finden, welcher zwey einander parallele Grundflächen hat, und dessen Seitenkanten nicht in einen einzigen Punkt zusammen laufen.

Aufl. 1) ABCDdabc (Fig. 38) sey ein solcher Körper; ABCD, abcd, seine beyden parallelen Grundflächen. Ich will annehmen, daß die Seiten der beyden viereckigen Grundflächen, nebst den Winkeln ABC = abc, ADC = adc, gegeben seyen. Man setze AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, ab = f, bc = g, cd = k, da = l, ABC = β, ADC = δ, die Höhe des Körpers = h, und verfahre wie folgt.

2) Man ziehe die Linien aE, cF, dG, der bB parallel; sie treffen die Grundfläche ABCD in den Punkten E, F, G. Hierdurch entstehet das Prisma EBFGdabc, und der Körper ist nun in dieses Prisma, und noch einen anderen Körper EGFCDAadc zerlegt.

3) Der Inhalt des Prisma wird gefunden, wenn man die Grundfläche EBFG = abcd mit der Höhe h multiplicirt. Um den Inhalt des anderen Körpers zu finden, ziehe man die Linien Gk, Gl, den Linien BA, BC, parallel; ferner die Linien dk, dl. Hierdurch wird dieser Körper in die Pyramide dkGlD, und in die beyden Prismen EAadkG,

FCdlG zerlegt. Die beyden genannten Prismen können als die Hälften zweyer Parallelepipeden angesehen werden, deren Grundflächen die Parallelogramme AEGk, CFGl sind, und deren Höhe = h. Es kommt also gegenwärtig alles darauf an, den Flächeninhalt aller der Vierecke zu finden, in welche die Grundfläche ABCD abgetheilt worden ist.

3) Denkt man sich die Diagonale AC gezogen, so ist,

$\triangle ABC = \frac{1}{2}$ ab Sin. β, $\triangle ADC = \frac{1}{2}$ cd Sin. δ;

also Trap. ABCD $= \frac{1}{2}$ (ab Sin. β + cd Sin. δ).

4) Denkt man sich eben so in dem Vierecke abcd die Diagonale ac gezogen, so erhält man auf eine ähnliche Art,

Trap. abcd = Trap. EBFG $= \frac{1}{2}$ (fg Sin. β + kl Sin. δ).

5) Da Gk = EA = AB − EB = AB − ab = a − f, Gl = FC = BC − BF = BC − bc = b − g, Dk = DA − Ak = DA − ad = d − k, Dl = DC − Cl = DC − cd = c − k, $\angle$ kGl = ABC = β, $\angle$ kDl = δ; so findet man auf eben die Art, wie in 3 und 4,

Trap. DkGl $= \frac{1}{2}$ (a − f)(b − g) Sin. β + $\frac{1}{2}$ (c − k)(d − l) Sin. δ.

6) Aus 3, 4, 5, erhält man nun auch die Summe der Parallelogramme AEGk, CFGl. Es ist nämlich diese Summe = Trap. ABCD − Trap. EBFG − Trap. DkGl

$= \frac{1}{2}$ (ag + bf − 2fg) Sin. β + $\frac{1}{2}$ (cl + dk − 2kl) Sin. δ.

7) Der Inhalt des Körpers ABCDabc ist

= [EBFG + $\frac{1}{3}$ DkGl + $\frac{1}{2}$ (AEGk + CFGl)] h.

Substituirt man hierin für die Vierecke ihre in 4, 5, 6, gefundenen Werthe, so erhält man für den Inhalt des gesuchten Körpers den folgenden Ausdruck:

$\frac{1}{6}$ h Sin. β [f (g + $\frac{1}{2}$ b) + a (b + $\frac{1}{2}$ g)]
+ $\frac{1}{6}$ h Sin. δ [k (l + $\frac{1}{2}$ d) + c (d + $\frac{1}{2}$ l)].

§ 103.

Es sey ABCDdabc (Fig. 59) der im vorigen § berechnete Körper; $a'b'c'd'$ irgend ein beliebiger der Grundfläche paralleler Schnitt; und daher die Diagonale $a'c'$ desselben ebenfalls der Grundfläche parallel. Stellet man sich nun vor, der Punkt D nähere sich der Diagonale AC; so wird der Winkel $ADC = adc = a'd'c'$ immer größer, bis er endlich, wenn der Punkt D in AC fällt, $= 180°$ wird. In diesem Falle fällt auch zugleich der Punkt d in ac, und d' in $a'c'$. Man bekommt hierdurch einen neuen Körper, welchen man, um der Einbildungskraft zu Hülfe zu kommen, so entstehen lassen kann, daß man die Ebene des Dreyeckes abc sich selbst parallel herunter rücken läßt, bis sie auf das Dreyeck ABC fällt; die Linie ac bleibt bey dieser Bewegung immer der Grundfläche parallel, bis sie auf AC fällt, und beschreibt entweder eine krumme, oder eine gerade Fläche, und zwar die letztere alsdann, wann die Seitenkanten Aa, Cc in einer und derselben Ebene liegen, in welchem Falle der erzeugte Körper eine abgekürzte dreyseitige Pyramide wird. — In jedem andern Falle beschreibt die Linie ac eine krumme Fläche, und man erhält einen Körper, welcher von zwey ebenen Dreyecken, zwey ebenen Trapezen und einer krummen Fläche begränzt wird.

Um den Inhalt eines solchen Körpers zu finden, darf man nur in dem, am Ende des vorigen §'s gefundenen Ausdrucke für den Körper ABCDdacb, $\delta = 180°$ setzen; alsdann wird $\text{Sin.}\,\delta = 0$, und man erhält für den Körper, wovon gegenwärtig die Rede ist, den folgenden Ausdruck:

$$\tfrac{1}{6}\, h\, \text{Sin.}\, \beta\, [f(g + \tfrac{1}{2} b) + a(b + \tfrac{1}{2} g)].$$

§ 104.

Der Körper § 102 kann auch einen einwärts gehenden Winkel haben. Ist alsdann C oder A ein solcher Winkel,

so leidet die daselbst gefundene Formel gar keine Aenderung. Ist es B oder D, wie Fig. 40 für den Winkel D zeigt, so muß man unter β oder δ den konvexen Winkel, also hier unter δ den konvexen Winkel ADC verstehen. Man kann auch δ den konkaven Winkel seyn lassen, wenn nur $-$ Sin. δ anstatt Sin. δ gesetzt wird.

§ 105.

Wenn man sich aus einem Körper von der in § 102 vorausgesetzten Art ABCDdcba (Fig. 41) einen anderen Körper von eben der Art A'B'C'D'd'c'b'a', welcher nicht gerade dem vorigen ähnlich zu seyn braucht, ausgeschnitten denkt, so bekommt man einen hohlen Körper, der sehr mannigfaltiger Formen fähig ist, je nachdem die Form jener Körper und die Art, wie der eine aus dem andern ausgeschnitten wird, verschieden ist. Der eine kann, um sich die Sache zu versinnlichen, als ein Kern des anderen angesehen werden, der sowohl in seiner Lage innerhalb des anderen, als auch in seiner Form unendlich viele Abwechselungen zuläßt. Der kubische Inhalt des hohlen Körpers, der durch das Herausnehmen des Kerns entstehet, kann immer gefunden werden, wenn sowohl für den Hauptkörper, als für seinen Kern, die in § 102 angegebenen Abmessungen bekannt sind. Ist nämlich für den Körper ABCDdcba, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $ab = f$, $bc = g$, $cd = k$, $da = l$, $ABC = \beta$, $ADC = \delta$, die Höhe $= h$, und für den Körper A'B'C'D'd'c'b'a', $A'B' = a'$, $B'C' = b'$, $C'D' = c'$, $D'A' = d'$, $a'b' = f'$, $b'c' = g'$, $c'd' = k'$, $d'a' = l'$, $A'B'C' = \beta'$, $A'D'C = \delta'$, und die Höhe $= h'$: so hat man für den kubischen Inhalt des hohlen Körpers folgenden Ausdruck:

$$\tfrac{1}{6} h \,\text{Sin}\, \beta \,[f(g + \tfrac{1}{2} b) + a(b + \tfrac{1}{2} g)]$$
$$+ \tfrac{1}{6} h \,\text{Sin}\, \delta \,[k(l + \tfrac{1}{2} d) + c(d + \tfrac{1}{2} l)]$$
$$- \tfrac{1}{6} h' \,\text{Sin}\, \beta' \,[f'(g' + \tfrac{1}{2} b') + a'(b' + \tfrac{1}{2} g')]$$
$$- \tfrac{1}{6} h' \,\text{Sin}\, \delta' \,[k'(l' + \tfrac{1}{2} d') + c'(d' + \tfrac{1}{2} l')].$$

Wenn die oberen Grundflächen des Hauptkörpers und des Kerns, abcd, $a'b'c'd'$, desgleichen die unteren Grundflächen, ABCD, $A'B'C'D'$, in einer Ebene liegen, so ist $h = h'$, und man erhält den kubischen Inhalt eines durchlöcherten Körpers.

§ 106.

Aufg. Den kubischen Inhalt eines Pontons zu finden.

Aufl. Ein Ponton bildet, wenn man sich seine Höhlung ausgefüllt denkt, einen Körper, welcher von zwey parallelen Rechtecken ABCD, abcd, (Fig. 42) und vier viereckigen Seitenflächen AabB, BbcC, CcdD, DdaA, begränzt wird. So betrachtet, gehört demnach der Ponton zu demjenigen Körper, welcher in § 102 berechnet worden.

Es sey $AB = a$, $BC = b$, $ab = f$, $bc = g$, die Höhe des Pontons $= h$. Hier ist also $c = a$, $d = b$, $k = f$, $l = g$, $\beta = \delta = 90°$. Substituirt man diese Werthe, so erhält man den Inhalt des ausgefüllten Pontons =

$$\tfrac{1}{6} h \,[f(2g + b) + a(2b + g)].$$

Diese Formel findet auch Kästner in der zweyten Samml. seiner geometrischen Abhandl. Seite 79, vermittelst der Integralrechnung. Was ich hier g genannt habe, ist bey ihm e.

Für den hohlen Ponton, wie er wirklich ist, findet man aus § 105, wenn a', b', f', g', h', das für die innere Fläche desselben bezeichnen, was a, b, f, g, h, für die äußere, folgenden Ausdruck:

$$\tfrac{1}{6}h\,[f(2g + b) + a\,(2b + g)]$$
$$- \tfrac{1}{6}h'\,[f'(2g' + b') + a'\,(2b' + g')].$$

§ 107.

Aufg. Zwischen den sechs Winkeln, unter welchen die Gränzflächen einer dreyseitigen Pyramide gegen einander geneigt sind, eine Gleichung zu finden.

Aufl. In der Pyramide ABCD (Fig. 43) bezeichne man die vier Gränzflächen ABC, ADB, ADC, BDC, in der Ordnung wie sie hier genannt worden, durch A, B, C, D; ferner die Winkel, welche die Flächen A und B, A und C, A und D, B und C, B und D, C und D einschließen, nach eben der Ordnung, durch α, β, γ, δ, ε, ζ. Zwischen diesen Winkeln soll man eine Gleichung finden.

1) Man fälle auf die Ebene ABC das Perpendikel DE, von E auf AB das Perpendikel EF, und ziehe die gerade Linie DF; alsdann ist DFE der Neigungswinkel der Ebenen A, B, und daher $= \alpha$.

2) Die Dreyecke BAE, BAD, haben die gemeinschaftliche Grundlinie AB, und verhalten sich demnach wie ihre Höhen EF, DF. Man hat daher,

$$DF : EF = \triangle BAD : \triangle BEA,$$

oder $\quad 1 : \text{Cos.}\,\alpha = B : \triangle BEA;$

und dies giebt $\quad \triangle BEA = B\,\text{Cos.}\,\alpha.$

Auf die nämliche Art findet man,

$$\triangle AEC = C\,\text{Cos.}\,\beta,$$
$$\triangle BEC = D\,\text{Cos.}\,\gamma;$$

und hieraus,

$$\triangle BAC = A = B\,\text{Cos.}\,\alpha + C\,\text{Cos.}\,\beta + D\,\text{Cos.}\,\gamma$$

3) Für die anderen Flächen und Winkel der Pyramide erhält man ähnliche Gleichungen; in allem folgende vier:

$$1)\quad A = B \,\mathrm{Cos.}\, \alpha + C \,\mathrm{Cos.}\, \beta + D \,\mathrm{Cos.}\, \gamma$$
$$2)\quad B = A \,\mathrm{Cos.}\, \alpha + C \,\mathrm{Cos.}\, \delta + D \,\mathrm{Cos.}\, \varepsilon$$
$$3)\quad C = A \,\mathrm{Cos.}\, \beta + B \,\mathrm{Cos.}\, \delta + D \,\mathrm{Cos.}\, \zeta$$
$$4)\quad D = A \,\mathrm{Cos.}\, \gamma + B \,\mathrm{Cos.}\, \varepsilon + C \,\mathrm{Cos.}\, \zeta.$$

Aus diesen Gleichungen muß man nun die Größen A, B, C, D, zu eliminiren suchen.

4) Man setze, der Kürze wegen, die Buchstaben α, β, γ, δ, ε, ζ, für Cos. α, Cos. β, Cos. γ, Cos. δ, Cos. ε, Cos. ζ, und substituire den Werth von D aus der vierten Gleichung in den drey ersten Gleichungen; dies giebt:

$$(\gamma^2 - 1) A + (\alpha + \gamma\varepsilon) B + (\beta + \gamma\zeta) C = 0$$
$$(\alpha + \gamma\varepsilon) A + (\varepsilon^2 - 1) B + (\delta + \varepsilon\zeta) C = 0$$
$$(\beta + \gamma\zeta) A + (\delta + \varepsilon\zeta) B + (\zeta^2 - 1) C = 0.$$

5) Eliminirt man C aus der zweyten und dritten, wie auch aus der ersten und dritten Gleichung, so erhält man:

$$[(\beta + \gamma\zeta)(\delta + \varepsilon\zeta) - (\alpha + \gamma\varepsilon)(\zeta^2 - 1)] A$$
$$+ [(\delta + \varepsilon\zeta)^2 - (\varepsilon^2 - 1)(\zeta^2 - 1)] B = 0$$
$$[(\beta + \gamma\zeta)^2 - (\gamma^2 - 1)(\zeta^2 - 1)] A$$
$$+ [(\delta + \varepsilon\zeta)(\beta + \gamma\zeta) - (\alpha + \gamma\varepsilon)(\zeta^2 - 1)] B = 0.$$

6) Die Elimination des B aus diesen beyden Gleichungen, und die Division durch A giebt,

$$[(\beta + \gamma\zeta)(\delta + \varepsilon\zeta) - (\alpha + \gamma\varepsilon)(\zeta^2 - 1)] \times$$
$$[(\delta + \varepsilon\zeta)(\beta + \gamma\zeta) - (\alpha + \gamma\varepsilon)(\zeta^2 - 1)]$$
$$- [(\beta + \gamma\zeta)^2 - (\gamma^2 - 1)(\zeta^2 - 1)] \times$$
$$[(\delta + \varepsilon\zeta)^2 - (\varepsilon^2 - 1)(\zeta^2 - 1)] = 0.$$

7) Wird diese Gleichung reducirt, und für α, β, γ, u. s. w. wieder Cos. α, Cos. β, Cos. γ, u. s. w. substituirt, so erhält man endlich,

$$1-(\text{Cos.}\,\alpha^2+\text{Cos.}\,\beta^2+\text{Cos.}\,\gamma^2+\text{Cos.}\,\delta^2+\text{Cos.}\,\varepsilon^2+\text{Cos.}\,\zeta^2)$$
$$+(\text{Cos.}\,\alpha^2\,\text{Cos.}\,\zeta^2+\beta^2\,\text{Cos.}\,\varepsilon^2+\text{Cos.}\,\gamma^2\,\text{Cos.}\,\delta^2)$$
$$-2(\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\delta+\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\varepsilon+$$
$$\text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\zeta+\text{Cos.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\varepsilon\,\text{Cos.}\,\zeta)$$
$$-2(\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\varepsilon\,\text{Cos.}\,\zeta+\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\zeta+$$
$$\text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\varepsilon)$$
$$=0.$$

Anmerk. Diese Gleichung giebt die Beziehung zwischen den Winkeln α, β, γ, δ, ε, ζ. Vermittelst derselben ist man im Stande, wenn fünf dieser Winkel gegeben sind, den sechsten zu finden.

§ 108.

Aufg. Drey auf einander perpendikuläre Gränzflächen einer dreyseitigen Pyramide sind ihrem Flächeninhalte nach gegeben: man soll den Flächeninhalt der vierten finden.

Aufl. 1) DAEB (Fig. 43) sey eine solche Pyramide, deren drey Seitenflächen DEA, DEB, AEB, auf einander perpendikulär stehen. Diese drey Seitenflächen sind ihrem Inhalte nach gegeben; es sey also △BEA = A, △DEA = B, △BED = C. Die drey Kanten DE, AE, BE, stehen auf einander perpendikulär, sind aber unbekannt; man setze daher AE = x, BE = y, DE = z.

2) Ziehet man auf AB das Perpendikel EF, so stehet auch DF auf AB perpendikulär, und es ist △DAB = ½ AB × DF.

4) Die Dreyecke BAE, EAF, sind einander ähnlich; man hat also,

BA : BE = AE : EF,

oder $\sqrt{(x^2+y^2)} : y = x : \text{EF}$,

$$EF = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

4) Da die Ebenen DEA, DEB, auf der Ebene AEB perpendikulär stehen, so ist auch DE auf dieser Ebene, und daher auch auf EF perpendikulär; also,

$$DF^2 = EF^2 + DE^2 = \frac{x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2}{x^2 + y^2},$$

und daher

$$\triangle DAB = \tfrac{1}{2} AB \cdot DF = \tfrac{1}{2}\sqrt{(x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2)}.$$

5) Es ist aber $xy = 2A$, $xz = 2B$, $yz = 2C$. Werden diese Werthe substituirt, so erhält man,

$$\triangle DAB = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}.$$

Zus. Aus diesem Resultate ergiebt sich der folgende, sehr merkwürdige, dem pythagorischen ähnliche Lehrsatz:

In jeder dreyseitigen Pyramide, die einen körperlichen rechten Winkel hat, ist das Quadrat der, diesem Winkel gegenüber liegenden Fläche, so groß als die Summe der Quadrate der drey ihn einschließenden Flächen.

§ 109.

Aufg. Drey in einer Ecke einer Pyramide zusammen stoßende Kanten, nebst den von ihnen eingeschlossenen ebenen Winkeln sind gegeben: man soll den Halbmesser der, um dieser Pyramide beschriebenen Kugel finden.

Aufl. ABCD (Fig. 44) sey eine Pyramide; deren Kanten $AD = 2a$, $BD = 2b$, $CD = 2c$, und Winkel $BDC = \alpha$, $ADC = \beta$, $ADB = \gamma$, gegeben sind; man soll den Halbmesser der umschriebenen Kugel finden.

1) Es sey P der Mittelpunkt dieser Kugel, und Pp, Pq, Pr, auf den Kanten AD, BD, CD, perpendikulär gezogen;

hierdurch werden diese letztern halbirt, und man hat daher Dp = a, Dq = b, Dr = c. Der gesuchte Halbmesser sey nun = x.

2) Man denke sich mit einem beliebigen Halbmesser, etwa DC, aus D, als Mittelpunkt, eine Kugelfläche beschrieben; verlängere DP bis sie die Kugelfläche in $\varkappa$ trifft, und verbinde die Punkte C, a, b, $\varkappa$, durch Bogen größter Kreise.

3) Alsdann ist in den sphärischen Dreyecken $C\varkappa a$, $C\varkappa b$, $a\varkappa b$,

$$\text{Cos. } C\varkappa a = \frac{\text{Cos. } Ca - \text{Cos. } C\varkappa \text{ Cos. } a\varkappa}{\text{Sin. } C\varkappa \text{ Sin. } a\varkappa},$$

$$\text{Cos. } C\varkappa b = \frac{\text{Cos. } Cb - \text{Cos. } C\varkappa \text{ Cos. } b\varkappa}{\text{Sin. } C\varkappa \text{ Sin. } b\varkappa},$$

$$\text{Cos. } a\varkappa b = \frac{\text{Cos. } ab - \text{Cos. } a\varkappa \text{ Cos. } b\varkappa}{\text{Sin. } a\varkappa \text{ Sin. } b\varkappa}.$$

4) Es ist aber,

$$\text{Cos. } a\varkappa = \text{Cos. } aD\varkappa = \frac{a}{x}, \quad \text{Sin. } a\varkappa = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)}}{x},$$

$$\text{Cos. } b\varkappa = \text{Cos. } bD\varkappa = \frac{b}{x}, \quad \text{Sin. } b\varkappa = \frac{\sqrt{(x^2 - b^2)}}{x},$$

$$\text{Cos. } C\varkappa = \text{Cos. } CD\varkappa = \frac{c}{x}, \quad \text{Sin. } C\varkappa = \frac{\sqrt{(x^2 - c^2)}}{x},$$

Cos. Ca = Cos. β, Cos. Cb = Cos. α, Cos. ab = Cos. γ.

5) Werden die Werthe aus 4 in den Gleichungen in 3 substituirt, so erhält man,

$$\text{Cos. } C\varkappa a = \frac{x^2 \text{ Cos. } \beta - ac}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - c^2)}},$$

$$\text{Cos. } C\varkappa b = \frac{x^2 \text{ Cos. } \alpha - bc}{\sqrt{(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)}},$$

$$\text{Cos. } a x b = \frac{x^2 \text{ Cos. } \gamma - ab}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}}.$$

6) Da $C x a + C x b + a x b = 360^\circ$; also $C x a + C x b = 360^\circ - a x b$, $\text{Cos. } (C x a + C x b) = \text{Cos. } a x b$, und daher, wie bey einer ähnlichen Gleichung, in 1 § 55 gezeigt worden,

$$1 + 2 \text{ Cos. } C x a \text{ Cos. } C x b \text{ Cos. } a x b =$$
$$(\text{Cos. } C x a)^2 + (\text{Cos. } C x b)^2 + (\text{Cos. } a x b)^2.$$

Werden hierin für $\text{Cos. } C x a$; $\text{Cos. } C x b$, $\text{Cos. } a x b$, ihre Werthe aus 6 substituirt, und wird hierauf alles mit $(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)$ multiplicirt, so erhält man die Gleichung,

$$(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) +$$
$$2(x^2 \text{ Cos. } \alpha - bc)(x^2 \text{ Cos. } \beta - ac)(x^2 \text{ Cos. } \gamma - ab) =$$
$$(x^2 \text{ Cos. } \alpha - bc)^2 (x^2 - a^2) + (x^2 \text{ Cos. } \beta - ac)^2 (x^2 - b^2)$$
$$+ (x^2 \text{ Cos. } \gamma - ab)^2 (x^2 - c^2).$$

7) Diese Gleichung reducirt sich, wenn man das, was sich aufhebt, wegläßt, und hernach durch x^4 dividirt, auf eine reine quadratische Gleichung, und giebt, wenn noch überdies $\text{Sin. } \alpha^2$, $\text{Sin. } \beta^2$, $\text{Sin. } \gamma^2$, für $1 - \text{Cos. } \alpha^2$, $1 - \text{Cos. } \beta^2$, $1 - \text{Cos. } \gamma^2$ gesetzt wird, $x =$

$$\sqrt{\frac{\left[\begin{array}{l} a^2 \text{ Sin. } \alpha^2 + b^2 \text{ Sin. } \beta^2 + c^2 \text{ Sin. } \gamma^2 - 2ab(\text{Cos. } \gamma - \text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \beta) \\ - 2ac(\text{Cos. } \beta - \text{Cos } \alpha \text{ Cos. } \gamma) - 2bc(\text{Cos. } \alpha - \text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma) \end{array}\right]}{1 - (\text{Cos. } \alpha^2 + \text{Cos. } \beta^2 + \text{Cos. } \gamma^2) + 2 \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma}}$$

Zus. Sind die Winkel an der Spitze einander gleich, so hat man $\alpha = \beta = \gamma$, und der gesuchte Ausdruck verwandelt sich in den folgenden:

$$\sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2) \text{ Sin. } \alpha^2 - (2ab + 2ac + 2bc)(\text{Cos } \alpha - \text{Cos. } \alpha^2)}{1 - 3 \text{ Cos. } \alpha^2 + 2 \text{ Cos. } \alpha^3}}.$$

Wenn man hierin $1 - Cos. \alpha^2$ für $Sin. \alpha^2$ setzt, und hierauf den Zähler und Nenner des unter dem Wurzelzeichen befindlichen Bruches durch $1 - Cos. \alpha$ dividirt, so erhält man,

$$x = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2)(1 + Cos. \alpha) - (2ab + 2ac + 2bc) Cos. \alpha}{1 + Cos. \alpha - 2 Cos. \alpha^2}}.$$

Ist noch überdies $a = b = c$, so ist

$$x = a \sqrt{\frac{3 - 3 Cos. \alpha}{1 + Cos. \alpha - 2 Cos. \alpha^2}} = a \sqrt{\frac{3 - 3 Cos. \alpha}{(1 - Cos. \alpha)(1 + 2 Cos. \alpha)}}.$$

Für $\alpha = 60°$ ist $x = a \sqrt{\tfrac{3}{2}}$; die Pyramide ist alsdann ein reguläres Tetraeder, dessen Kante $= 2a$ ist.

§ 110.

Aufg. In einer gleichseitigen Pyramide, welche ein reguläres Vieleck zur Grundfläche, und daher lauter gleiche Flächenwinkel an der Spitze hat, ist die Größe eines solchen Winkels gegeben: man soll daraus die übrigen Winkel des Körpers finden.

Aufl. AB, BC, (Fig. 45) mögen zwey Seiten der regulären Grundfläche, und M der Mittelpunkt dieses Vielecks seyn; L sey die Spitze der Pyramide, also LM ihre Höhe und LA = LB = LC, ihre Seitenlinien. Der Voraussetzung zufolge, ist ALB = BLC als einer von den Flächenwinkeln, welche die Spitze L gemeinschaftlich haben, gegeben; er sey $= \mu$. Aus diesem lassen sich nun alle übrige Winkel bestimmen, und zwar wie folgt.

1) In den gleichschenkeligen Dreyecken, welche die Seitenflächen der Pyramide ausmachen, findet man jeden Winkel an der Grundfläche $= 90° - \tfrac{1}{2}\mu$.

2) In der Grundfläche selbst findet man, wenn n die An-

§ 103.

Es sey ABCDabcd (Fig. 59) der im vorigen § berechnete Körper; a'b'c'd' irgend ein beliebiger der Grundfläche paralleler Schnitt; und daher die Diagonale a'c' desselben ebenfalls der Grundfläche parallel. Stellet man sich nun vor, der Punkt D nähere sich der Diagonale AC; so wird der Winkel ADC = adc = a'd'c' immer größer, bis er endlich, wenn der Punkt D in AC fällt, = 180° wird. In diesem Falle fällt auch zugleich der Punkt d in ac, und d' in a'c'. Man bekommt hierdurch einen neuen Körper, welchen man, um der Einbildungskraft zu Hülfe zu kommen, so entstehen lassen kann, daß man die Ebene des Dreyeckes abc sich selbst parallel herunter rücken läßt, bis sie auf das Dreyeck ABC fällt; die Linie ac bleibt bey dieser Bewegung immer der Grundfläche parallel, bis sie auf AC fällt, und beschreibt entweder eine krumme, oder eine gerade Fläche, und zwar die letztere alsdann, wann die Seitenkanten Aa, Cc in einer und derselben Ebene liegen, in welchem Falle der erzeugte Körper eine abgekürzte dreyseitige Pyramide wird. — In jedem andern Falle beschreibt die Linie ac eine krumme Fläche, und man erhält einen Körper, welcher von zwey ebenen Dreyecken, zwey ebenen Trapezen und einer krummen Fläche begränzt wird.

Um den Inhalt eines solchen Körpers zu finden, darf man nur in dem, am Ende des vorigen §'s gefundenen Ausdrucke für den Körper ABCDdacb, $\delta = 180°$ setzen; alsdann wird Sin. $\delta = 0$, und man erhält für den Körper, wovon gegenwärtig die Rede ist, den folgenden Ausdruck:

$$\tfrac{1}{3} h \text{ Sin. } \beta \, [f(g + \tfrac{1}{2} b) + a(b + \tfrac{1}{2} g)].$$

§ 104.

Der Körper § 102 kann auch einen einwärts gehenden Winkel haben. Ist alsdann C oder A ein solcher Winkel,

so leidet die daselbst gefundene Formel gar keine Aenderung. Ist es B oder D, wie Fig. 40 für den Winkel D zeigt, so muß man unter β oder δ den konvexen Winkel, also hier unter δ den konvexen Winkel ADC verstehen. Man kann auch δ den konkaven Winkel seyn lassen, wenn nur — Sin. δ anstatt Sin. δ gesetzt wird.

§ 105.

Wenn man sich aus einem Körper von der in § 102 vorausgesetzten Art ABCDdcba (Fig. 41) einen anderen Körper von eben der Art A'B'C'D'd'c'b'a', welcher nicht gerade dem vorigen ähnlich zu seyn braucht, ausgeschnitten denkt, so bekommt man einen hohlen Körper, der sehr mannigfaltiger Formen fähig ist, je nachdem die Form jener Körper und die Art, wie der eine aus dem andern ausgeschnitten wird, verschieden ist. Der eine kann, um sich die Sache zu versinnlichen, als ein Kern des anderen angesehen werden, der sowohl in seiner Lage innerhalb des anderen, als auch in seiner Form unendlich viele Abwechselungen zuläßt. Der kubische Inhalt des hohlen Körpers, der durch das Herausnehmen des Kerns entstehet, kann immer gefunden werden, wenn sowohl für den Hauptkörper, als für seinen Kern, die in § 102 angegebenen Abmessungen bekannt sind. Ist nämlich für den Körper ABCDdcba, AB = a, BC = b, CD = c, AD = d, ab = f, bc = g, cd = k, da = l, ABC = β, ADC = δ, die Höhe = h, und für den Körper A'B'C'D'd'c'b'a' A'B' = a', B'C' = b', C'D' = c', D'A' = d', a'b' = f', b'c' = g', c'd' = k', d'a' = l', A'B'C' = β', A'D'C = δ', und die Höhe = h': so hat man für den kubischen Inhalt des hohlen Körpers folgenden Ausdruck:

$$\tfrac{1}{6} h \, \text{Sin.} \, \beta \, [f(g + \tfrac{1}{2} b) + a(b + \tfrac{1}{2} g)]$$
$$+ \tfrac{1}{6} h \, \text{Sin.} \, \delta \, [k(l + \tfrac{1}{2} d) + c(d + \tfrac{1}{2} l)]$$
$$- \tfrac{1}{6} h' \, \text{Sin.} \, \beta' \, [f'(g' + \tfrac{1}{2} b') + a'(b' + \tfrac{1}{2} g')]$$
$$- \tfrac{1}{6} h' \, \text{Sin.} \, \delta' \, [k'(l' + \tfrac{1}{2} d') + c'(d' + \tfrac{1}{2} l')].$$

Wenn die oberen Grundflächen des Hauptkörpers und des Kerns, abcd, a'b'c'd', desgleichen die unteren Grundflächen, ABCD, A'B'C'D', in einer Ebene liegen, so ist $h = h'$, und man erhält den kubischen Inhalt eines durchlöcherten Körpers.

§ 106.

Aufg. Den kubischen Inhalt eines Pontons zu finden.

Aufl. Ein Ponton bildet, wenn man sich seine Höhlung ausgefüllt denkt, einen Körper, welcher von zwey parallelen Rechtecken ABCD, abcd, (Fig. 42) und vier viereckigen Seitenflächen AabB, BbcC, CcdD, DdaA, begränzt wird. So betrachtet, gehört demnach der Ponton zu demjenigen Körper, welcher in § 102 berechnet worden.

Es sey $AB = a$, $BC = b$, $ab = f$, $bc = g$, die Höhe des Pontons $= h$. Hier ist also $c = a$, $d = b$, $k = f$, $l = g$, $\beta = \delta = 90^\circ$. Substituirt man diese Werthe, so erhält man den Inhalt des ausgefüllten Pontons =

$$\tfrac{1}{6} h \, [f(2g + b) + a(2b + g)].$$

Diese Formel findet auch Kästner in der zweyten Samml. seiner geometrischen Abhandl. Seite 79, vermittelst der Integralrechnung. Was ich hier g genannt habe, ist bey ihm e.

Für den hohlen Ponton, wie er wirklich ist, findet man aus § 105, wenn a', b', f', g', h', das für die innere Fläche desselben bezeichnen, was a, b, f, g, h, für die äußere, folgenden Ausdruck:

$$\tfrac{1}{6}h\,[f(2g+b)+a(2b+g)]$$
$$-\tfrac{1}{6}h'\,[f'(2g'+b')+a'(2b'+g')].$$

§ 107.

Aufg. Zwischen den sechs Winkeln, unter welchen die Gränzflächen einer dreyseitigen Pyramide gegen einander geneigt sind, eine Gleichung zu finden.

Aufl. In der Pyramide ABCD (Fig. 43) bezeichne man die vier Gränzflächen ABC, ADB, ADC, BDC, in der Ordnung wie sie hier genannt worden, durch A, B, C, D; ferner die Winkel, welche die Flächen A und B, A und C, A und D, B und C, B und D, C und D einschliessen, nach eben der Ordnung, durch α, β, γ, δ, ε, ζ. Zwischen diesen Winkeln soll man eine Gleichung finden.

1) Man fälle auf die Ebene ABC das Perpendikel DE, von E auf AB das Perpendikel EF, und ziehe die gerade Linie DF; alsdann ist DFE der Neigungswinkel der Ebenen A, B, und daher $= \alpha$.

2) Die Drenecke BAE, BAD, haben die gemeinschaftliche Grundlinie AB, und verhalten sich demnach wie ihre Höhen EF, DF. Man hat daher,

$$DF : EF = \triangle BAD : \triangle BEA,$$

oder $\quad 1 : \text{Cos.}\,\alpha = B : \triangle BEA;$

und dies giebt $\quad \triangle BEA = B\,\text{Cos.}\,\alpha.$

Auf die nämliche Art findet man,

$$\triangle AEC = C\,\text{Cos.}\,\beta,$$
$$\triangle BEC = D\,\text{Cos.}\,\gamma;$$

und hieraus,

$$\triangle BAC = A = B\,\text{Cos.}\,\alpha + C\,\text{Cos.}\,\beta + D\,\text{Cos.}\,\gamma$$

3) Für die anderen Flächen und Winkel der Pyramide erhält man ähnliche Gleichungen; in allem folgende vier:

$$1)\quad A = B \text{ Cos. } \alpha + C \text{ Cos. } \beta + D \text{ Cos. } \gamma$$
$$2)\quad B = A \text{ Cos. } \alpha + C \text{ Cos. } \delta + D \text{ Cos. } \varepsilon$$
$$3)\quad C = A \text{ Cos. } \beta + B \text{ Cos. } \delta + D \text{ Cos. } \zeta$$
$$4)\quad D = A \text{ Cos. } \gamma + B \text{ Cos. } \varepsilon + C \text{ Cos. } \zeta.$$

Aus diesen Gleichungen muß man nun die Größen A, B, C, D, zu eliminiren suchen.

4) Man setze, der Kürze wegen, die Buchstaben α, β, γ, δ, ε, ζ, für Cos. α, Cos. β, Cos. γ, Cos. δ, Cos. ε, Cos. ζ, und substituire den Werth von D aus der vierten Gleichung in den drey ersten Gleichungen; dies giebt:

$$(\gamma^2 - 1) A + (\alpha + \gamma\varepsilon) B + (\beta + \gamma\zeta) C = 0$$
$$(\alpha + \gamma\varepsilon) A + (\varepsilon^2 - 1) B + (\delta + \varepsilon\zeta) C = 0$$
$$(\beta + \gamma\zeta) A + (\delta + \varepsilon\zeta) B + (\zeta^2 - 1) C = 0.$$

5) Eliminirt man C aus der zweyten und dritten, wie auch aus der ersten und dritten Gleichung, so erhält man:

$$[(\beta + \gamma\zeta)(\delta + \varepsilon\zeta) - (\alpha + \gamma\varepsilon)(\zeta^2 - 1)] A$$
$$+ [(\delta + \varepsilon\zeta)^2 - (\varepsilon^2 - 1)(\zeta^2 - 1)] B = 0$$
$$[(\beta + \gamma\zeta)^2 - (\gamma^2 - 1)(\zeta^2 - 1)] A$$
$$+ [(\delta + \varepsilon\zeta)(\beta + \gamma\zeta) - (\alpha + \gamma\varepsilon)(\zeta^2 - 1)] B = 0.$$

6) Die Elimination des B aus diesen beyden Gleichungen, und die Division durch A giebt,

$$[(\beta + \gamma\zeta)(\delta + \varepsilon\zeta) - (\alpha + \gamma\varepsilon)(\zeta^2 - 1)] \times$$
$$[(\delta + \varepsilon\zeta)(\beta + \gamma\zeta) - (\alpha + \gamma\varepsilon)(\zeta^2 - 1)]$$
$$- [(\beta + \gamma\zeta)^2 - (\gamma^2 - 1)(\zeta^2 - 1)] \times$$
$$[(\delta + \varepsilon\zeta)^2 - (\varepsilon^2 - 1)(\zeta^2 - 1)] = 0.$$

7) Wird diese Gleichung reducirt, und für α, β, γ, u. s. w. wieder Cos. α, Cos. β, Cos. γ, u. s. w. substituirt, so erhält man endlich,

$$1-(\text{Cos.}\,\alpha^2+\text{Cos.}\,\beta^2+\text{Cos.}\,\gamma^2+\text{Cos.}\,\delta^2+\text{Cos.}\,\varepsilon^2+\text{Cos.}\,\zeta^2)$$
$$+(\text{Cos.}\,\alpha^2\,\text{Cos.}\,\zeta^2+\beta^2\,\text{Cos.}\,\varepsilon^2+\text{Cos.}\,\gamma^2\,\text{Cos.}\,\delta^2)$$
$$-2(\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\delta+\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\varepsilon+$$
$$\text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\zeta+\text{Cos.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\varepsilon\,\text{Cos.}\,\zeta)$$
$$-2(\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\varepsilon\,\text{Cos.}\,\zeta+\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\zeta+$$
$$\text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\varepsilon)$$
$$=0.$$

Anmerk. Diese Gleichung giebt die Beziehung zwischen den Winkeln α, β, γ, δ, ε, ζ. Vermittelst derselben ist man im Stande, wenn fünf dieser Winkel gegeben sind, den sechsten zu finden.

§ 108.

Aufg. Drey auf einander perpendikuläre Gränzflächen einer dreyseitigen Pyramide sind ihrem Flächeninhalte nach gegeben: man soll den Flächeninhalt der vierten finden.

Aufl. 1) DAEB (Fig. 43) sey eine solche Pyramide, deren drey Seitenflächen DEA, DEB, AEB, auf einander perpendikulär stehen. Diese drey Seitenflächen sind ihrem Inhalte nach gegeben; es sey also $\triangle$BEA = A, $\triangle$DEA = B, $\triangle$BED = C. Die drey Kanten DE, AE, BE, stehen auf einander perpendikulär, sind aber unbekannt; man setze daher AE = x, BE = y, DE = z.

2) Ziehet man auf AB das Perpendikel EF, so stehet auch DF auf AB perpendikulär, und es ist $\triangle$DAB = $\frac{1}{2}$ AB × DF.

4) Die Dreyecke BAE, EAF, sind einander ähnlich; man hat also,

BA : BE = AE : EF,

oder $\sqrt{(x^2+y^2)} : y = x : \text{EF}$,

$$EF = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

4) Da die Ebenen DEA, DEB, auf der Ebene AEB perpendikulär stehen, so ist auch DE auf dieser Ebene, und daher auch auf EF perpendikulär; also,

$$DF^2 = EF^2 + DE^2 = \frac{x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2}{x^2 + y^2},$$

und daher

$$\triangle DAB = \tfrac{1}{2} AB \,.\, DF = \tfrac{1}{2} \sqrt{(x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2)}.$$

5) Es ist aber $xy = 2A$, $xz = 2B$, $yz = 2C$. Werden diese Werthe substituirt, so erhält man,

$$\triangle DAB = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}.$$

Zus. Aus diesem Resultate ergiebt sich der folgende, sehr merkwürdige, dem pythagorischen ähnliche Lehrsatz:

In jeder dreyseitigen Pyramide, die einen körperlichen rechten Winkel hat, ist das Quadrat der, diesem Winkel gegenüber liegenden Fläche, so groß als die Summe der Quadrate der drey ihn einschließenden Flächen.

§ 109.

Aufg. Drey in einer Ecke einer Pyramide zusammen stoßende Kanten, nebst den von ihnen eingeschlossenen ebenen Winkeln sind gegeben: man soll den Halbmesser der, um dieser Pyramide beschriebenen Kugel finden.

Aufl. ABCD (Fig. 44) sey eine Pyramide; deren Kanten $AD = 2a$, $BD = 2b$, $CD = 2c$, und Winkel $BDC = \alpha$, $ADC = \beta$, $ADB = \gamma$, gegeben sind; man soll den Halbmesser der umschriebenen Kugel finden.

1) Es sey P der Mittelpunkt dieser Kugel, und Pp, Pq, Pr, auf den Kanten AD, BD, CD, perpendikulär gezogen;

hierdurch werden diese letztern halbirt, und man hat daher Dp = a, Dq = b, Dr = c. Der gesuchte Halbmesser sey mn = x.

2) Man denke sich mit einem beliebigen Halbmesser, etwa DC, aus D, als Mittelpunkt, eine Kugelfläche beschrieben; verlängere DP bis sie die Kugelfläche in x trifft, und verbinde die Punkte C, a, b, x, durch Bogen größter Kreise.

3) Alsdann ist in den sphärischen Dreyecken Cxa, Cxb, axb,

$$\text{Cos. } Cxa = \frac{\text{Cos. } Ca - \text{Cos. } Cx \text{ Cos. } ax}{\text{Sin. } Cx \text{ Sin. } ax},$$

$$\text{Cos. } Cxb = \frac{\text{Cos. } Cb - \text{Cos. } Cx \text{ Cos. } bx}{\text{Sin. } Cx \text{ Sin. } bx},$$

$$\text{Cos. } axb = \frac{\text{Cos. } ab - \text{Cos. } ax \text{ Cos. } bx}{\text{Sin. } ax \text{ Sin. } bx}.$$

4) Es ist aber,

$$\text{Cos. } ax = \text{Cos. } aDx = \frac{a}{x}, \text{ Sin. } ax = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)}}{x},$$

$$\text{Cos. } bx = \text{Cos. } bDx = \frac{b}{x}, \text{ Sin. } bx = \frac{\sqrt{(x^2 - b^2)}}{x},$$

$$\text{Cos. } Cx = \text{Cos. } CDx = \frac{c}{x}, \text{ Sin. } Cx = \frac{\sqrt{(x^2 - c^2)}}{x},$$

$\text{Cos. } Ca = \text{Cos. } \beta$, $\text{Cos. } Cb = \text{Cos. } \alpha$, $\text{Cos. } ab = \text{Cos. } \gamma$.

5) Werden die Werthe aus 4 in den Gleichungen in 3 substituirt, so erhält man,

$$\text{Cos. } Cxa = \frac{x^2 \text{ Cos. } \beta - ac}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - c^2)}},$$

$$\text{Cos. } Cxb = \frac{x^2 \text{ Cos. } \alpha - bc}{\sqrt{(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)}},$$

$$\text{Cos. } a x b = \frac{x^2 \text{ Cos. } \gamma - ab}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}}$$

6) Da $C x a + C x b + a x b = 360°$; also $C x a + C x b = 360° - a x b$, $\text{Cos.}(C x a + C x b) = \text{Cos. } a x b$, und daher, wie bey einer ähnlichen Gleichung, in 1 § 55 gezeigt worden,

$$1 + 2 \text{ Cos. } C x a \text{ Cos. } C x b \text{ Cos. } a x b =$$
$$(\text{Cos. } C x a)^2 + (\text{Cos. } C x b)^2 + (\text{Cos. } a x b)^2.$$

Werden hierin für Cos. $C x a$, Cos. $C x b$, Cos. $a x b$, ihre Werthe aus 5 substituirt, und wird hierauf alles mit $(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)$ multiplicirt, so erhält man die Gleichung,

$$(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) +$$
$$2(x^2 \text{ Cos. } \alpha - bc)(x^2 \text{ Cos. } \beta - ac)(x^2 \text{ Cos. } \gamma - ab) =$$
$$(x^2 \text{ Cos. } \alpha - bc)^2 (x^2 - a^2) + (x^2 \text{ Cos. } \beta - ac)^2 (x^2 - b^2)$$
$$+ (x^2 \text{ Cos. } \gamma - ab)^2 (x^2 - c^2).$$

7) Diese Gleichung reducirt sich, wenn man das, was sich aufhebt, wegläßt, und hernach durch x^4 dividirt, auf eine reine quadratische Gleichung, und giebt, wenn noch überdies $\text{Sin. } \alpha^2$, $\text{Sin. } \beta^2$, $\text{Sin. } \gamma^2$, für $1 - \text{Cos. } \alpha^2$, $1 - \text{Cos. } \beta^2$, $1 - \text{Cos. } \gamma^2$ gesetzt wird, $x =$

$$\sqrt{\frac{\left[\begin{array}{l} a^2 \text{ Sin. } \alpha^2 + b^2 \text{ Sin. } \beta^2 + c^2 \text{ Sin. } \gamma^2 - 2ab(\text{Cos. } \gamma - \text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \beta) \\ - 2ac(\text{Cos. } \beta - \text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \gamma) - 2bc(\text{Cos. } \alpha - \text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma) \end{array}\right]}{1 - (\text{Cos. } \alpha^2 + \text{Cos. } \beta^2 + \text{Cos. } \gamma^2) + 2 \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma}}$$

Zus. Sind die Winkel an der Spitze einander gleich, so hat man $\alpha = \beta = \gamma$, und der gefundene Ausdruck verwandelt sich in den folgenden:

$$\sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2) \text{ Sin. } \alpha^2 - (2ab + 2ac + 2bc)(\text{Cos. } \alpha - \text{Cos. } \alpha^2)}{1 - 3 \text{ Cos. } \alpha^2 + 2 \text{ Cos. } \alpha^3}}.$$

Wenn man hierin $1 - \text{Cos.}\,\alpha^2$ für $\text{Sin.}\,\alpha^2$ setzt, und hierauf den Zähler und Nenner des unter dem Wurzelzeichen befindlichen Bruches durch $1 - \text{Cos.}\,\alpha$ dividirt, so erhält man,

$$x = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2)(1 + \text{Cos.}\,\alpha) - (2ab + 2ac + 2bc)\,\text{Cos.}\,\alpha}{1 + \text{Cos.}\,\alpha - 2\,\text{Cos.}\,\alpha^2}}.$$

Ist noch überdies $a = b = c$, so ist

$$x = a\sqrt{\frac{3 - 3\,\text{Cos.}\,\alpha}{1 + \text{Cos.}\,\alpha - 2\,\text{Cos.}\,\alpha^2}} = a\sqrt{\frac{3 - 3\,\text{Cos.}\,\alpha}{(1 - \text{Cos.}\,\alpha)(1 + 2\,\text{Cos.}\,\alpha)}}.$$

Für $\alpha = 60^\circ$ ist $x = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$; die Pyramide ist alsdann ein reguläres Tetraeder, dessen Kante $= 2a$ ist.

§ 110.

Aufg. In einer gleichseitigen Pyramide, welche ein reguläres Vieleck zur Grundfläche, und daher lauter gleiche Flächenwinkel an der Spitze hat, ist die Größe eines solchen Winkels gegeben: man soll daraus die übrigen Winkel des Körpers finden.

Aufl. AB, BC, (Fig. 45) mögen zwey Seiten der regulären Grundfläche, und M der Mittelpunkt dieses Vielecks seyn; L sey die Spitze der Pyramide, also LM ihre Höhe und LA = LB = LC, ihre Seitenlinien. Der Voraussetzung zufolge, ist ALB = BLC als einer von den Flächenwinkeln, welche die Spitze L gemeinschaftlich haben, gegeben; er sey $= \mu$. Aus diesem lassen sich nun alle übrige Winkel bestimmen, und zwar wie folgt.

1) In den gleichschenkeligen Dreyecken, welche die Seitenflächen der Pyramide ausmachen, findet man jeden Winkel an der Grundfläche $= 90^\circ - \tfrac{1}{2}\mu$.

2) In der Grundfläche selbst findet man, wenn n die An-

zahl der Seiten des Vielecks bezeichnet, jeden Polygonwinkel, wie $ABC = \frac{(n-2)180^{\circ}}{n}$; also $ABM = CBM = \frac{(n-2)90^{\circ}}{n}$.

3) In dem sphärischen Dreyecke alc ist also $al = lc = 90^{\circ} - \frac{1}{2}\mu$, $ac = \frac{(n-2)180^{\circ}}{n}$, $am = mc = \frac{(n-2)90^{\circ}}{n}$. Ziehet man also den Bogen lm, so halbirt derselbe den Winkel alc und stehet zugleich auf ac perpendikulär.

4) Der Winkel alc ist der Neigungswinkel der Ebenen LBA, LBC, also auch der Neigungswinkel jeder zwey anderen Seitenflächen der Pyramide, und der Winkel lac der Neigungswinkel der Ebene LBA, also auch jeder anderen Seitenfläche, gegen die Grundfläche; den ersten setze man $= \theta$, den zweyten $= \varphi$.

5) In dem rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke aml ist nun,

$$\text{Cos. lam} = \text{Tang. am Cot. al},$$

$$\text{Sin. alm} = \frac{\text{Sin. am}}{\text{Sin. al}},$$

oder,

$$\text{Cos. } \varphi = \text{Tang. } \tfrac{1}{2}\mu \text{ Tang. } \frac{(n-2)\,90^{\circ}}{n};$$

und

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta = \frac{\text{Sin. } \frac{(n-2)\,90^{\circ}}{n}}{\text{Cos. } \frac{1}{2}\mu}.$$

6) Man hat also φ und θ, und somit alle Winkel der Pyramide.

VIII. Reguläre Körper.

§ 111.

Ein regulärer Körper ist ein Polyeder, welches lauter reguläre, gleiche und ähnliche Gränzflächen hat, und dessen körperliche Winkel von gleich vielen ebenen Winkeln eingeschlossen werden.

Die Gränzflächen eines regulären Körpers können daher nur gleichseitige Dreyecke, oder Quadrate, oder reguläre Fünfecke seyn; die körperlichen Winkel desselben nur von drey, oder von vier, oder von fünf ebenen Winkel eingeschlossen werden. Mehr als fünf Seiten können die Gränzflächen eines solchen Körpers nicht haben, weil sonst jeder Flächenwinkel $= 120^\circ$, oder größer als 120° wäre, und ein körperlicher Winkel wenigstens drey ebene erfordert; auch kann kein körperlicher Winkel desselben sechs, oder mehr als sechs Flächenwinkel haben, weil sonst jeder dieser Winkel kleiner als 60° seyn müßte.

§ 112.

Die Bestimmung der Gränzflächen eines regulären Körpers hängt von der Anzahl und der Größe ihrer Seiten ab; jene sey $= n$, diese $= x$, folglich der Umfang einer jeden Gränzfläche $= nx$. Um jedes reguläre Vieleck läßt sich ferner ein Kreis beschreiben; der Halbmesser dieses Kreises sey $= y$; also das Perpendikel, welches aus dem Mittelpunkte auf eine jede der Seiten herabgelassen wird $= \sqrt{(y^2 - \frac{1}{4}x^2)}$, und folglich der Inhalt eines jeden solchen Vieleckes $= \frac{1}{2}nx\sqrt{(y^2 - \frac{1}{4}x^2)}$.

Es sey ferner der Halbmesser der Kugel, welche um das Polyeder beschrieben werden kann, $= r$. Ein Perpendikel, welches aus dem Mittelpunkte der Kugel auf eine der Gränz-

flächen herabgelassen wird, ist alsdann $= \sqrt{(r^2 - y^2)}$. Wenn man den dritten Theil dieses Perpendikels mit dem Inhalt einer Gränzfläche, und hierauf mit der Anzahl der Gränzflächen multiplicirt, so erhält man den kubischen Inhalt des Polyeders. Setzt man also die Anzahl der Gränzflächen $= N$, und den Flächeninhalt einer jeden derselben $= F$, so ist der Inhalt des Polyeders $= \frac{1}{3} NF \sqrt{(r^2 - y^2)}$.

§ 113.

Wenn man sich durch den Mittelpunkt der Kugel, und durch die Seiten der das Polyeder begränzenden Flächen, Bogen größter Kreise gelegt denkt, so entstehet für jedes Vieleck auf der Oberfläche des Polyeders, ein sphärisches Vieleck von gleich vielen Seiten auf der Oberfläche der Kugel. Das Netz, welches man auf diese Art für die Kugelfläche erhält, bestehet aus eben so vielen sphärischen Vielecken, als das Polyeder Gränzflächen hat. Behält demnach der Buchstabe N, die im vorigen §. festgesetzte Bedeutung, so ist, wenn S die Oberfläche der Kugel bezeichnet, der Flächeninhalt eines solchen sphärischen Vieleckes $= \frac{S}{N}$.

Um jeden Winkelpunkt dieses Netzes ist ferner die Summe aller sphärischen Winkel $= 360^\circ$. Wird daher jeder Winkel eines regulären Polyeders von drey ebenen Winkeln eingeschlossen, so ist jeder sphärische Winkel $= 120^\circ$; für vier ebene Winkel ist er $= 90^\circ$; für fünf ebene Winkel ist er $= 72^\circ$. Von mehr als fünf ebenen Winkeln kann der körperliche nicht eingeschlossen seyn (111).

§ 114.

Aus diesen vorläufigen Betrachtungen ergeben sich nun die folgenden, einzig möglichen regulären Körper.

I. Der Körper werde von dreyeckigen Gränzflächen,

und

und jeder körperliche Winkel von drey ebenen Winkeln eingeschlossen. Da hier jeder körperliche Winkel von drey ebenen eingeschlossen wird, so ist jeder sphärische Winkel des Netzes = 120° (§ 113). Die Summe aller drey Winkel des, einer jeden Gränzfläche des Polyeders korrespondirenden sphärischen Dreyeckes, ist demnach = 360°; folglich der Flächeninhalt desselben $= \frac{360° - 180°}{720°} S$ (§ 59) $= \frac{S}{4}$. Da aber auch dieser Inhalt $= \frac{S}{N}$ (§ 113), so ist $N = 4$. Der Körper hat demnach vier Gränzflächen, und wird daher ein reguläres Tetraeder genannt. Die Anzahl seiner ebenen Winkel ist = 12, und da immer drey eine körperliche Ecke bilden, so ist die Anzahl aller Ecken dieses Körpers = 4.

II. Der Körper werde von dreyeckigen Gränzflächen, und jeder körperliche Winkel von vier ebenen Winkeln eingeschlossen. Hier ist jeder sphärische Winkel = 90°; folglich die Summe aller drey Winkel eines jeden der Gränzfläche korrespondirenden sphärischen Dreyeckes = 270°. Hieraus findet man den Flächeninhalt des sphärischen Dreyeckes $= \frac{270° - 180°}{720°} S = \frac{S}{8}$. Da nun auch dieser Flächeninhalt $= \frac{S}{N}$; so ist $N = 8$. Der Körper wird daher ein reguläres Oktaeder genannt; die Anzahl der ebenen Winkel auf der Oberfläche desselben ist = 24, und da jede vier eine Ecke bilden, so ist die Anzahl seiner Ecken = 6.

III. Der Körper werde von dreyeckigen Gränzflächen, und jeder körperliche Winkel von fünf ebenen Winkeln eingeschlossen. Hier ist jeder sphärische Winkel = 72° (§ 113); folglich die Summe aller Winkel des sphärischen

Dreyeckes $= 216^\circ$. Demnach ist der Inhalt des sphärischen Dreyecks $= \frac{216^\circ - 180^\circ}{720^\circ} S = \frac{S}{20}$; und da dieser Inhalt auch $= \frac{S}{N}$, so ist $N = 20$. Der Körper wird daher ein reguläres Ikosaeder genannt. Auf der Oberfläche desselben befinden sich 60 ebene Winkel; und da immer fünf derselben eine Ecke bilden, so muß der Körper 12 Ecken haben.

IV. Der Körper werde von viereckigen Gränzflächen, und jeder körperliche Winkel von drey ebenen Winkeln eingeschlossen. Hier ist wieder jeder Winkelpunkt des Netzes von drey sphärischen Winkeln umgeben, und daher jeder derselben $= 120^\circ$. Die Summe aller vier Winkel eines jeden sphärischen Viereckes auf der Kugelfläche ist $= 480^\circ$; folglich der Flächeninhalt desselben $= \frac{480^\circ - 360^\circ}{720^\circ} S = \frac{S}{6}$; und da derselbe auch $= \frac{S}{N}$, so ist $N = 6$. Der Körper wird demnach von sechs Flächen eingeschlossen, weshalb er auch ein Hexaeder genannt wird; gebräuchlicher ist der Name Cubus. Auf seiner Oberfläche befinden sich 24 ebene Winkel, und da jede Ecke von drey derselben gebildet wird, so hat der Körper 8 Ecken.

V. Der Körper werde von fünfeckigen Gränzflächen, und jeder körperliche Winkel von drey ebenen Winkeln eingeschlossen. Jeder Winkelpunkt des Netzes ist von drey sphärischen Winkeln umgeben, also jeder derselben $= 120^\circ$ demnach die Summe aller Winkel des sphärischen, dem geradlinigen korrespondirenden Fünfeckes, $= 600^\circ$ Der Inhalt dieses Vieleckes ist demnach $= \frac{600^\circ - 540^\circ}{720^\circ} S = \frac{S}{12}$

$= \frac{S}{N}$, und daher $N = 12$. Der Körper wird also von 12 Flächen begränzt, und heißt daher ein reguläres Dodekaeder. Auf der Oberfläche desselben befinden sich 60 ebene Winkel, deren drey eine Ecke bilden, er hat also 20 Ecken.

§ 115.

Aufg. Aus dem bekannten Halbmesser der um einem Tetraeder beschriebenen Kugel, die Kanten dieses Körpers, seinen kubischen Inhalt, seine Oberfläche, die Größe einer jeden Gränzfläche, und den Halbmesser des um ihr beschriebenen Kreises zu finden.

Aufl. 1) Dem Tetraeder korrespondirt auf der umschriebenen Kugelfläche, deren Halbmesser $= r$, ein Netz von gleichseitigen, d. h. regulären sphärischen Dreyecken, und jeder Winkel eines solchen Dreyeckes ist $= 120°$.

2) In § 57 wurde gezeigt, wie man aus dem bekannten Polygonwinkel δ eines regulären sphärischen Vieleckes, die Seite η, und den Bogenabstand φ eines jeden Winkelpunktes vom Pole des dem Vielecke umschriebenen Kreises finden könne. Die Anwendung auf den vorliegenden Fall giebt $n = 3$, $\delta = 120°$; man hat also aus 6 in § 57,

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\ \frac{180°}{n}}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\delta} = \frac{\text{Cos.}\ 60°}{\text{Sin.}\ 60°}.$$

Es ist aber, wie bekannt, $\text{Cos.}\ 60° = \frac{1}{2}$, also $\text{Sin.}\ 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; man hat demnach $\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{\sqrt{3}}$; folglich $\text{Cos.}\ \eta = 2\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\eta^2 - 1 = -\frac{1}{3}$. Hieraus ergiebt sich, daß die Seite des sphärischen Dreyeckes größer als 90° ist, und zwar

um einen Bogen, dessen Sinus $= \frac{1}{3}$. Diese Seite ist demnach $= 109^{\circ}\ 28'$.

3) Es sey x die Sehne dieses Bogens, oder die Kante des Tetraeders; alsdann ist $x = 2\, r .\, \mathrm{Sin.}\, \frac{1}{2}\, \eta$, oder, da $\mathrm{Sin.}\, \frac{1}{2}\, \eta = \sqrt{(1 - \mathrm{Cos.}\, \frac{1}{2}\, \eta^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

$$x = 2\, r \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

4) Nach § 57 ist ferner der Winkel am Pole, oder $\alpha = \frac{360^{\circ}}{n}$; also hier $\alpha = 120^{\circ}$, und daher,

$$\mathrm{Sin.}\, \varphi = \frac{\mathrm{Sin.}\, \frac{1}{2}\, \eta}{\mathrm{Sin.}\, \frac{1}{2}\, \alpha} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

5) Läßt man nun aus dem Mittelpunkte der Kugel auf eine Dreyecksfläche des Tetraeders ein Perpendikel fallen, so trifft dasselbe den Mittelpunkt des um ihm beschriebenen Kreises, und seine Verlängerung den Pol des korrespondirenden sphärischen Dreyeckes; man hat daher, wenn y den Halbmesser dieses Kreises bezeichnet,

$$y = r\, \mathrm{Sin.}\, \varphi = \frac{2 r \sqrt{2}}{3}.$$

6) Aus den für x und y gefundenen Werthen findet man ferner $\sqrt{(y^2 - \frac{1}{4}x^2)} = \frac{r\sqrt{2}}{3}$, $\sqrt{(r^2 - y^2)} = \frac{r}{3}$; folglich aus § 112,

$$F = \tfrac{1}{2}\, n x \sqrt{(y^2 - \tfrac{1}{4}x^2)} = \frac{2\, r^2}{\sqrt{3}};$$

und daher der kubische Inhalt des Körpers $= \frac{1}{3}\, N F \sqrt{(r^2 - y^2)}$ $= \frac{8 r^3}{9\sqrt{3}}$.

7) Aus 3, 5, 6, ergeben sich nun die folgenden Resultate:

I. Kante des Tetraeders $= 2\, r \sqrt{\frac{2}{3}} = 1{,}632993 .\, r$,

II. Inhalt einer jeden Gränzfläche $= \frac{2 r^2}{\sqrt{3}} = 1{,}154701 . r^2$.

III. Halbmesser des umschriebenen Kreises $= \frac{2 r \sqrt{2}}{3} =$ $0{,}942809 . r$.

IV. Oberfläche des Tetraeders $= \frac{8 r^2}{\sqrt{3}} = 4{,}618804 . r^2$.

V. Kubischer Inhalt desselben $= \frac{8 r^3}{9 \sqrt{3}} = 0{,}513200 . r^3$.

§ 116.

Aufg. Aus dem gegebenen Halbmesser einer Kugel, die nämlichen Stücke, als in der Aufgabe § 115 für das eingeschriebene Oktaeder zu finden.

Aufl. 1) Hier ist $n = 3$, $\alpha = \frac{360^\circ}{n} = 120^\circ$, $\theta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$; also (§ 57)

$$\text{Cos.} \tfrac{1}{2} \eta = \frac{\text{Cos.} \frac{180^\circ}{n}}{\text{Sin.} \frac{1}{2} \theta} = \frac{\text{Cos.}\ 60^\circ}{\text{Sin.}\ 45^\circ};$$

oder, da Cos. $60^\circ = \frac{1}{2}$, Sin. $45^\circ =$ Cos. $45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$,

$$\text{Cos.} \tfrac{1}{2} \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \eta.$$

2) Hieraus ergiebt sich,

$$x = 2 r \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \eta = r \sqrt{2}.$$

3) Auch ist,

$$\text{Sin.}\ \varphi = \frac{\text{Sin.} \frac{1}{2} \eta}{\text{Sin.} \frac{1}{2} \alpha} = \frac{1 : \sqrt{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}};$$

also,

$$y = r \,\text{Sin}\ \varphi = r \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

4) Demnach ist

$$\sqrt{(y^2 - \tfrac{1}{4}x^2)} = \frac{r}{\sqrt{6}}, \sqrt{(r^2 - y^2)} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

5) Aus allem diesen ergeben sich nun die folgenden Bestimmungen:

I. Kante des Oktaeders $= r\sqrt{2} = 1{,}414214 . r$.

II. Inhalt einer jeden Gränzfläche $= \frac{r^2\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025 . r^2$.

III. Halbmesser des umschriebenen Kreises $= r\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}816496 . r$.

IV. Oberfläche des Oktaeders $= 4r^2\sqrt{3} = 6{,}928203 . r^2$.

V. Kubischer Inhalt desselben $= \frac{4r^3}{3} = 1{,}333333 . r^3$.

§ 117.

Aufg. Aus dem gegebenen Halbmesser einer Kugel, die nämlichen Stücke, als in der Aufgabe § 115 für das Ikosaeder zu finden.

Aufl. 1) Für das Ikosaeder ist $n = 3$, $\alpha = \frac{360^\circ}{n} = 120^\circ$, $\beta = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$; also (§ 57)

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\,\frac{180^\circ}{n}}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\beta} = \frac{\text{Cos.}\,60^\circ}{\text{Sin.}\,36^\circ}.$$

Der Sinus von 36° ist die Hälfte der Seite des Fünfeckes für einen Kreis, dessen Halbmesser $= 1$, also $= \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}$; auch ist Cos. 60° $= \tfrac{1}{2}$; man hat daher

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\eta = \frac{2}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})}}{\sqrt{10}}$$

folglich

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{10}}.$$

2) Hieraus ergiebt sich,

$$x = 2r\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{2r\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{10}} = \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}}.$$

3) Ferner ist (§ 57)

$$\text{Sin.}\ \varphi = \frac{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\alpha},$$

oder, da $\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{Sin.}\ \varphi = \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}};$$

folglich

$$y = r\ \text{Sin.}\ \varphi = \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}.$$

4) Hieraus ergiebt sich, $\sqrt{(y^2-\tfrac{1}{4}x^2)} = \frac{r\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{30}}$,

$$\sqrt{(r^2-y^2)} = \frac{r\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}},$$

$$F = \tfrac{1}{2}nx\sqrt{(y^2-\tfrac{1}{4}x^2)} = \frac{3r^2\sqrt{(6-2\sqrt{5})}}{2\sqrt{15}} =$$

$$\frac{3r^2(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{15}} = \frac{3r^2(5-\sqrt{5})}{10\sqrt{3}},$$

$$\tfrac{1}{3}NF\sqrt{(r^2-y^2)} = \frac{2r^3\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{3}.$$

5) Man hat also für das Ikosaeder die folgenden Bestimmungen:

I. Kante des Ikosaeders $= \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}} = 1{,}051462 \cdot r^2$.

II. Inhalt einer jeden Gränzfläche $= \frac{3\, r^2 (5 - \sqrt{5})}{10 \sqrt{3}} =$ $0{,}478727 \cdot r^2$.

III. Halbmesser des umschriebenen Kreises $= \frac{r \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$ $= 0{,}607062 \cdot r$.

IV. Oberfläche des Ikosaeders $= \frac{6\, r^2 (5 - \sqrt{5})}{\sqrt{3}} =$ $9{,}574542 \cdot r^2$.

V. Kubischer Inhalt desselben $= \frac{2\, r^3 \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{3} =$ $2{,}536150 \cdot r^3$.

Anmerk. Zur leichtern Berechnung der hier vorkommenden Irrationalgrößen dienet der Umstand, daß $\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = 4 \text{ Sin. } 36°$, $\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = 4 \text{ Cos. } 18°$, und $5 - \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \cdot \text{Sin. } 18°$.

§ 118.

Aufg. Aus dem gegebenen Halbmesser einer Kugel die nämlichen Stücke als in der Aufgabe § 115 für das eingeschriebene Hexaeder, oder den Kubus zu finden.

Aufl. 1) Für das Hexaeder ist $n = 4$, $\alpha = \frac{360°}{n} =$ $90°$, $\beta = \frac{360°}{3} = 120°$; also (§ 57),

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos. } \frac{180°}{n}}{\text{Sin. } \frac{1}{2}\beta} = \frac{\text{Cos. } 45°}{\text{Sin. } 60°} = \sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

weil $\text{Cos. } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und $\text{Sin. } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; also

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

2) Hieraus erhält man,

$$x = 2r\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\eta = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

3) Ferner ist,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

und daher,

$$y = r\,\text{Sin.}\,\varphi = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

4) Folglich $F = \frac{1}{2}\,nx\,\sqrt{(y^2 - \frac{1}{4}x^2)} = \frac{4r^2}{3}$

$\frac{1}{3}\,NF\,\sqrt{(r^2 - y^2)} = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}}.$

5) Man hat also für das Hexaeder die folgenden Bestimmungen:

I. Kante des Hexaeders $= \frac{2r}{\sqrt{3}} = 1{,}154700\,.\,r.$

II. Inhalt der Gränzfläche $= \frac{4r^2}{3} = 1{,}333333\,.\,r^2.$

III. Halbmesser des umschriebenen Kreises $= \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$ $0{,}816496.$

IV. Oberfläche des Hexaeders $= 8r^2 = 8{,}000000\,.\,r^2.$

V. Kubischer Inhalt desselben $= \frac{8r^3}{3\sqrt{3}} = 1{,}539600\,.\,r^3.$

§ 119.

Aufg. Aus dem gegebenen Halbmesser einer Kugel, die nämlichen Stücke, als in der Aufgabe § 115 für das Dodekaeder zu finden.

Aufl. 1) Für das Dodekaeder ist $n = 5$, $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ $= 72^\circ$, $\iota = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$; also,

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\,\frac{180^\circ}{n}}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\theta} = \frac{\text{Cos.}\,36^\circ}{\text{Sin.}\,60^\circ}.$$

Da nun Sin. 36° als die Hälfte der Seite des Fünfeckes in einem Kreise, dessen Halbmesser die Einheit ist, $= \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}$; so ist Cos. $36^\circ = \frac{\sqrt{(6+2\sqrt{5})}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$; und daher

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}},\quad \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{6}}$$

2) Hieraus erhält man

$$x = 2r\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\eta = \frac{r\sqrt{(6-2\sqrt{5})}}{\sqrt{3}} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}}.$$

3) Ferner ist,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha} = \frac{4\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{6}.\sqrt{(10-2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$$

und daher,

$$y = r\,\text{Sin.}\,\varphi = \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}.$$

4) Folglich $\sqrt{(y^2-\frac{1}{4}x^2)} = \frac{r\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{2\sqrt{15}}$,

$$\sqrt{(r^2-y^2)} = \frac{r\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$$

$$F = \tfrac{1}{2}nx\sqrt{(y^2-\tfrac{1}{4}x^2)} = r^2.\frac{\sqrt{5}}{6}\sqrt{(10-2\sqrt{5})},$$

$$\tfrac{1}{3}NF\sqrt{(r^2-y^2)} = \frac{2r^3(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}}.$$

5) Aus allem diesen erhält man daher,

I. Kante des Dodekaeders $= \frac{r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}} = 0{,}713644 .\,r.$

II. Inhalt einer jeden Gränzfläche $= r^2 . \frac{\sqrt{5}}{6}(10 - 2\sqrt{5})$
$= 0{,}876218 . r^2$.

III. Halbmesser des umschriebenen Kreises $= \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$.
$= 0{,}607062 . r$.

IV. Oberfläche des Dodekaeders $= 2r^2\sqrt{5}.\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$
$= 10{,}514616 . r^2$.

V. Kubischer Inhalt desselben $= \frac{2r^3(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{5}} =$
$2{,}785164 . r^3$.

IX. Körper, welche von regulären Figuren zweyerley Art begränzt werden.

§ 120.

Die nächste Stelle nach den regulären Körpern verdient diejenige sehr zahlreiche Klasse von Körpern, welche zwar, so wie jene, gleiche und ähnliche körperliche Winkel haben, und von lauter regulären Figuren begränzt werden, aber doch darin von ihnen abweichen, daß diese Figuren nicht alle von einerley Art sind; wie z. B. wenn ein Körper zugleich von Quadraten und gleichseitigen Dreyecken, oder zugleich von regulären Fünfecken, Vierecken und Dreyecken begränzt wird.

Ein solcher Körper ist bestimmt, wenn 1) die Figur der Gränzflächen, und 2) die Anzahl der ebenen Winkel von jeder Art, welche einen körperlichen Winkel bilden, gegeben ist.

Die Classifikation solcher Körper kann daher am füglichsten nach diesen beyden Hauptmerkmalen geschehen; vorausgesetzt, daß diese Merkmale nichts widersprechendes enthalten. Die Möglichkeit oder Unmöglichkeit eines Körpers für die gegebenen Bedingungen, muß theils aus den allgemeinen Sätzen im VIten Abschnitte, theils aus ihrer Construktion entschieden werden. So z. B. giebt es keinen Körper, welcher zugleich von Dreyecken und Quadraten begränzt wird, und in welchem jede Ecke von zwey Winkeln eines gleichseitigen Dreyeckes, jeder $= 60°$, und von einem Winkel eines Quadrates $= 90°$ eingeschlossen wird; denn die Summe der ebenen Winkel an jeder Ecke ist alsdann $= 2\frac{1}{3}$ R., folglich, wenn E die Anzahl der Ecken des Polyeders bezeichnet, die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche desselben $= 2\frac{1}{3}$ E rechten Winkeln; diese Summe ist aber nach § 89 $= 4E - 8$ rechten Winkeln; man hat also $4E - 8 = 2\frac{1}{3}E$, woraus man $E = 4\frac{4}{5}$ erhält, welches unmöglich ist.

Der Ausdruck: gleiche und ähnliche Winkel, wurde übrigens hier in dem Sinne gebraucht, wie er gewöhnlich genommen wird; indessen macht der zu behandelnde Gegenstand doch eine etwas nähere Bestimmung desselben nöthig.

§ 121.

Man denke sich zwey körperliche Winkel X, X′, deren einer X durch die ebenen Winkel a, b, c, d, ... x, y, z, der andere durch eine gleiche Anzahl ebener Winkel a′, b′, c′, d′, ... x′, y′, z′, eingeschlossen werde, und in welcher die Ordnung dieser Winkel gerade so ist, wie sie die Folge der Buchstaben angiebt. Ist nun $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$, $d' = d$, ... $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, und sind die Neigungswinkel von jeden zwey gleichen, an einander gränzenden Flächenwinkeln für X und X′ dieselben, so sollen diese körperlichen Win-

kel gleich und ähnlich, oder auch schlechthin gleich genannt werden, und zwar deshalb, weil sie, wie zwey gleiche und ähnliche ebene Figuren völlig zusammen fallen, wenn sie auf einander gelegt werden.

Man vertausche nun in dem körperlichen Winkel X', z' mit a', y' mit b', x' mit c', u. s. w., so daß die ebenen Winkel, wenn sie in der nämlichen Richtung gezählt werden als vorher, die umgekehrte Ordnung z', y', x', ... d', c', b', a', erhalten; lasse aber zugleich die Neigungswinkel der Ebenen ebenfalls in umgekehrter Ordnung folgen, so daß jede zwey Flächenwinkel z. B. b', c', ihre Neigung unverändert behalten, und denselben Winkel einschließen als vorher. Hierdurch entstehet ein körperlicher Winkel X'', der zwar, in Hinsicht auf die Größe, Neigung, und Folge der Flächenwinkel, von dem körperlichen Winkel X nicht verschieden ist, und ihm daher in sofern für gleich geachtet werden kann, aber doch von der Art ist, daß zwischen ihm und dem Winkel X schlechterdings keine Congruenz statt findet. Solche zwey körperliche Winkel nun, wie X und X'', sollen gleich und symmetrisch, oder schlechthin symmetrisch genannt werden.

Der Unterschied zwischen den gleichen und symmetrischen Winkeln bestehet also blos darin, daß bey jenen eine Congruenz, bey diesen keine möglich ist.

Bey den Körpern, mit denen wir es jetzt zu thun haben werden, wird keine durchgängige absolute Gleichheit der körperlichen Winkel gefordert, denn eine solche ist nur bey den regulären Körpern möglich, in welchen alle ebenen Winkel einander gleich sind, sondern bloß entweder absolute, oder symmetrische Gleichheit. Daß aber auch selbst die Gleichheit der körperlichen Winkel in diesem eingeschränkteren Sinne genommen, wegen der Natur der Gränzflächen, und der Bedingungen für

die körperlichen Winkel, oft nicht zu erhalten möglich ist; werden die folgenden Aufgaben zeigen.

§ 122.

Aufg. Man soll die Bedingungen angeben, unter welchen es möglich ist, an den Umfang eines gegebenen Vieleckes, andere reguläre Vielecke so anzusetzen, daß dadurch an den Winkelpunkten jener Figur lauter gleiche oder symmetrische körperliche Winkel entstehen.

Aufl. 1) Man denke sich irgend ein reguläres Vieleck; die Anzahl seiner Seiten sey = r; es heiße, der Kürze wegen, ein reck. Die Spitzen dieses Vielecks sollen nach der Ordnung, wie sie auf einander folgen, durch A′, A″, A‴, Aɪᴠ, ... A(r) bezeichnet und A′ für die erste genommen werden; alsdann ist A′A″, A″A‴, A‴Aɪᴠ ..... A(r)A′, die erste zweyte, dritte, ... rte Seite.

2) Die Spitze A″ sey nun zugleich die Spitze zweyer anderen Vielecke, eines mecks und eines necks, deren eines wenigstens von dem reck verschieden ist. Das meck habe die Seite A′A″, das neck die Seite A″A‴ mit jenem gemeinschaftlich.

3) Da jedes von den beyden angesetzten Vielecken mit dem reck eine Seite gemeinschaftlich hat, so hat auch jedes der beyden ersteren Vielecke mit dem letzteren zwey Spitzen gemeinschaftlich; und zwar das meck die Spitzen A′, A″, und das neck die Spitzen A″, A‴.

4) Sollen daher um dem Punkte A‴ die nämlichen Winkel liegen, als um dem Punkte A″, so muß man über die dritte Seite A‴Aɪᴠ des recks ein meck setzen, und aus einem ähnlichen Grunde über die vierte Seite AɪᴠAᴠ ein neck; über die fünfte Seite AᴠAᴠɪ ein meck u. s. w. immer wechselsweise ein meck und ein neck.

5) Hieraus läßt sich schließen, daß die mecke nur auf die

1ste, 3te, 5te, 7te u. s. w. Seite des recks, also auf diejenigen Seiten, welche die ungeraden Stellen in der Folge derselben einnehmen, und die necke nur auf die 2te, 4te, 6te, 8te, u. s. w. Seite, also auf diejenigen Seiten, welche die geraden Stellen in dieser Folge einnehmen, zu stehen kommen werden.

6) Ist daher r eine gerade Zahl, so kommt auf die letzte Seite des recks, nämlich $A^{(r)}A'$, ein neck zu stehen, und der Punkt A' ist die Winkelspitze von den drey Winkeln des recks, der mecks und des necks. Ist aber r ungerade, so kommt auf die Seite $A^{(r)}A'$ ein meck zu stehen, und der Punkt A' wird die gemeinschaftliche Spitze dreyer Winkel, deren einer aus dem reck, und zwey aus dem meck genommen sind; welches der Voraussetzung, daß alle körperliche Winkel gleich, oder symmetrisch seyn sollen, widerspricht.

7) Es kann also der Foderung nur alsdann eine Genüge geschehen, wenn r gerade; nicht aber, wenn r ungerade ist. Zur Erläuterung des Gesagten dienet Fig. 46 und Fig. 47: die erstere von diesen Figuren zeigt ein Achteck, mit angesetzten Dreyecken und Vierecken, welche man sich gehörig zusammen gefügt vorstellen muß; die zweyte zeigt dasselbe für ein Neuneck; in der ersten ist die Construktion möglich, in der zweyten unmöglich.

8) Stellt man sich nunmehr vor, es wäre zwischen jedem meck und neck ein anderes Vieleck, ein peck eingeschoben, so daß für den Punkt A' zwey Seiten dieses letzteren, mit zwey Seiten der beyden ersteren, $A'k$ und $A'k'$ zusammen fallen, und jede Spitze des recks zugleich eine Spitze eines mecks, eines necks und eines pecks wird, so ändert dieses in den bisherigen Schlüssen nichts, und die Construktion bleibt möglich, wenn r gerade, unmöglich, wenn r ungerade ist.

II. Inhalt einer jeden Gränzfläche $= \frac{3 r^2 (5 - \sqrt{5})}{10 \sqrt{3}} =$ $0,478727 \,.\, r^2$.

III. Halbmesser des umschriebenen Kreises $= \frac{r \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$ $= 0,607062 \,.\, r$.

IV. Oberfläche des Ikosaeders $= \frac{6 r^2 (5 - \sqrt{5})}{\sqrt{3}} =$ $9,574542 \,.\, r^2$.

V. Kubischer Inhalt desselben $= \frac{2 r^3 \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{3} =$ $2,536150 \,.\, r^3$.

Anmerk. Zur leichtern Berechnung der hier vorkommenden Irrationalgrößen dienet der Umstand, daß $\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$ $= 4 \,\text{Sin.}\, 36^\circ$, $\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = 4 \,\text{Cos.}\, 18^\circ$, und $5 - \sqrt{5}$ $= 4 \sqrt{5} \,.\, \text{Sin.}\, 18^\circ$.

§ 118.

Aufg. Aus dem gegebenen Halbmesser einer Kugel die nämlichen Stücke als in der Aufgabe § 115 für das eingeschriebene Hexaeder, oder den Kubus zu finden.

Aufl. 1) Für das Hexaeder ist $n = 4$, $\alpha = \frac{360^\circ}{n} =$ 90°, $\varepsilon = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$; also (§ 57),

$$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} \eta = \frac{\text{Cos.}\, \frac{180^\circ}{n}}{\text{Sin.}\, \frac{1}{2} \varepsilon} = \frac{\text{Cos.}\, 45^\circ}{\text{Sin.}\, 60^\circ} = \sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

weil $\text{Cos.}\, 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und $\text{Sin.}\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; also

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \eta = \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

2) Hieraus erhält man,

$$x = 2r \,\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\eta = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

3) Ferner ist,

$$\text{Sin.}\, \varphi = \frac{\text{Sin.}\, \frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\, \frac{1}{2}\alpha} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

und daher,

$$y = r \,\text{Sin.}\, \varphi = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

4) Folglich $F = \frac{1}{2} nx \sqrt{(y^2 - \frac{1}{4}x^2)} = \frac{4r^2}{3}$

$\frac{1}{3} NF \sqrt{(r^2 - y^2)} = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}}$.

5) Man hat also für das Hexaeder die folgenden Bestimmungen:

I. Kante des Hexaeders $= \frac{2r}{\sqrt{3}} = 1{,}154700 \,.\, r$.

II. Inhalt der Gränzfläche $= \frac{4r^2}{3} = 1{,}333333 \,.\, r^2$.

III. Halbmesser des umschriebenen Kreises $= \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 0{,}816496$.

IV. Oberfläche des Hexaeders $= 8r^2 = 8{,}000000 \,.\, r^2$.

V. Kubischer Inhalt desselben $= \frac{8r^3}{3\sqrt{3}} = 1{,}539600 \,.\, r^3$.

§ 119.

Aufg. Aus dem gegebenen Halbmesser einer Kugel, die nämlichen Stücke, als in der Aufgabe § 115 für das Dodekaeder zu finden.

Aufl. 1) Für das Dodekaeder ist $n = 5$, $\alpha = \frac{360^\circ}{n} = 72^\circ$, $\iota = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$; also,

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\ \frac{180^\circ}{n}}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\theta} = \frac{\text{Cos.}\ 36^\circ}{\text{Sin.}\ 60^\circ}.$$

Da nun Sin. 36° als die Hälfte der Seite des Fünfeckes in einem Kreise, dessen Halbmesser die Einheit ist, $= \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}$; so ist $\text{Cos.}\ 36^\circ = \frac{\sqrt{(6+2\sqrt{5})}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$; und daher

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}},\quad \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{6}}$$

2) Hieraus erhält man

$$x = 2r\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{r\sqrt{(6-2\sqrt{5})}}{\sqrt{3}} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}}.$$

3) Ferner ist,

$$\text{Sin.}\ \varphi = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\alpha} = \frac{4\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{6}.\sqrt{(10-2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$$

und daher,

$$y = r\ \text{Sin.}\ \varphi = \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}.$$

4) Folglich $\sqrt{(y^2 - \frac{1}{4}x^2)} = \frac{r\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{2\sqrt{15}}$,

$$\sqrt{(r^2 - y^2)} = \frac{r\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$$

$$F = \tfrac{1}{4}nx\sqrt{(y^2 - \tfrac{1}{4}x^2)} = r^2 . \frac{\sqrt{5}}{6}\sqrt{(10-2\sqrt{5})},$$

$$\tfrac{1}{3}NF\sqrt{(r^2 - y^2)} = \frac{2r^3(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}}.$$

5) Aus allem diesen erhält man daher,

I. Kante des Dodekaeders $= \frac{r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}} = 0{,}713644 . r.$

II. Inhalt einer jeden Gränzfläche $= r^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{6}(10 - 2\sqrt{5})$ $= 0,876218 \cdot r^2$.

III. Halbmesser des umschriebenen Kreises $= \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$ $= 0,607062 \cdot r$.

IV. Oberfläche des Dodekaeders $= 2r^2\sqrt{5} \cdot \sqrt{(10-2\sqrt{5})}$ $= 10,514616 \cdot r^2$.

V. Kubischer Inhalt desselben $= \frac{2r^3(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{5}} =$ $2,785164 \cdot r^3$.

IX. Körper, welche von regulären Figuren zweyerley Art begränzt werden.

---

§ 120.

Die nächste Stelle nach den regulären Körpern verdient diejenige sehr zahlreiche Klasse von Körpern, welche zwar, so wie jene, gleiche und ähnliche körperliche Winkel haben, und von lauter regulären Figuren begränzt werden, aber doch darin von ihnen abweichen, daß diese Figuren nicht alle von einerley Art sind; wie z. B. wenn ein Körper zugleich von Quadraten und gleichseitigen Dreyecken, oder zugleich von regulären Fünfecken, Vierecken und Dreyecken begränzt wird.

Ein solcher Körper ist bestimmt, wenn 1) die Figur der Gränzflächen, und 2) die Anzahl der ebenen Winkel von jeder Art, welche einen körperlichen Winkel bilden, gegeben ist.

Die Classifikation solcher Körper kann daher am füglichsten nach diesen beyden Hauptmerkmalen geschehen; vorausgesetzt, daß diese Merkmale nichts widersprechendes enthalten. Die Möglichkeit oder Unmöglichkeit eines Körpers für die gegebenen Bedingungen, muß theils aus den allgemeinen Sätzen im VIten Abschnitte, theils aus ihrer Construktion entschieden werden. So z. B. giebt es keinen Körper, welcher zugleich von Dreyecken und Quadraten begränzt wird, und in welchem jede Ecke von zwey Winkeln eines gleichseitigen Dreyeckes, jeder $= 60°$, und von einem Winkel eines Quadrates $= 90°$ eingeschlossen wird; denn die Summe der ebenen Winkel an jeder Ecke ist alsdann $= 2\frac{1}{3}$ R., folglich, wenn E die Anzahl der Ecken des Polyeders bezeichnet, die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche desselben $= 2\frac{1}{3}$ E rechten Winkeln; diese Summe ist aber nach § 89 $= 4\,E - 8$ rechten Winkeln; man hat also $4\,E - 8 = 2\frac{1}{3}\,E$, woraus man $E = 4\frac{4}{5}$ erhält, welches unmöglich ist.

Der Ausdruck: gleiche und ähnliche Winkel, wurde übrigens hier in dem Sinne gebraucht, wie er gewöhnlich genommen wird; indessen macht der zu behandelnde Gegenstand doch eine etwas nähere Bestimmung desselben nöthig.

§ 121.

Man denke sich zwey körperliche Winkel X, X′, deren einer X durch die ebenen Winkel a, b, c, d, ... x, y, z, der andere durch eine gleiche Anzahl ebener Winkel a′, b′, c′, d′, ... x′, y′, z′, eingeschlossen werde, und in welcher die Ordnung dieser Winkel gerade so ist, wie sie die Folge der Buchstaben angiebt. Ist nun $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$, $d' = d$, ... $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, und sind die Neigungswinkel von jeden zwey gleichen, an einander gränzenden Flächenwinkeln für X und X′ dieselben, so sollen diese körperlichen Win-

kel gleich und ähnlich, oder auch schlechthin gleich genannt werden, und zwar deshalb, weil sie, wie zwey gleiche und ähnliche ebene Figuren völlig zusammen fallen, wenn sie auf einander gelegt werden.

Man vertausche nun in dem körperlichen Winkel X′, z′ mit a′, y′ mit b′, x′ mit c′, u. s. w., so daß die ebenen Winkel, wenn sie in der nämlichen Richtung gezählt werden als vorher, die umgekehrte Ordnung z′, y′, x′, ... d′, c′, b′, a′, erhalten; lasse aber zugleich die Neigungswinkel der Ebenen ebenfalls in umgekehrter Ordnung folgen, so daß jede zwey Flächenwinkel z. B. b′, c′, ihre Neigung unverändert behalten, und denselben Winkel einschließen als vorher. Hierdurch entstehet ein körperlicher Winkel X″, der zwar, in Hinsicht auf die Größe, Neigung, und Folge der Flächenwinkel, von dem körperlichen Winkel X nicht verschieden ist, und ihm daher in sofern für gleich geachtet werden kann, aber doch von der Art ist, daß zwischen ihm und dem Winkel X schlechterdings keine Congruenz statt findet. Solche zwey körperliche Winkel nun, wie X und X″, sollen gleich und symmetrisch, oder schlechthin symmetrisch genannt werden.

Der Unterschied zwischen den gleichen und symmetrischen Winkeln bestehet also blos darin, daß bey jenen eine Congruenz, bey diesen keine möglich ist.

Bey den Körpern, mit denen wir es jetzt zu thun haben werden, wird keine durchgängige absolute Gleichheit der körperlichen Winkel gefordert, denn eine solche ist nur bey den regulären Körpern möglich, in welchen alle ebenen Winkel einander gleich sind, sondern bloß entweder absolute, oder symmetrische Gleichheit. Daß aber auch selbst die Gleichheit der körperlichen Winkel in diesem eingeschränkteren Sinne genommen, wegen der Natur der Gränzflächen, und der Bedingungen für

die körperlichen Winkel, oft nicht zu erhalten möglich ist, werden die folgenden Aufgaben zeigen.

§ 122.

Aufg. Man soll die Bedingungen angeben, unter welchen es möglich ist, an den Umfang eines gegebenen Vieleckes, andere reguläre Vielecke so anzusetzen, daß dadurch an den Winkelpunkten jener Figur immer gleiche oder symmetrische körperliche Winkel entstehen.

Aufl. 1) Man denke sich irgend ein reguläres Vieleck; die Anzahl seiner Seiten sey = r; es heiße, der Kürze wegen, ein reck. Die Spitzen dieses Vielecks sollen nach der Ordnung, wie sie auf einander folgen, durch A', A'', A''', A^{IV}, ... $A^{(r)}$ bezeichnet und A' für die erste genommen werden; alsdann ist $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A^{IV}$ ..... $A^{(r)}A'$, die erste zweyte, dritte, ... rte Seite.

2) Die Spitze A'' sey nun zugleich die Spitze zweyer anderen Vielecke, eines mecks und eines necks, deren eines wenigstens von dem reck verschieden ist. Das meck habe die Seite $A'A''$, das neck die Seite $A''A'''$ mit jenem gemeinschaftlich.

3) Da jedes von den beyden angesetzten Vielecken mit dem reck eine Seite gemeinschaftlich hat, so hat auch jedes der beyden ersteren Vielecke mit dem letzteren zwey Spitzen gemeinschaftlich, und zwar das meck die Spitzen A', A'', und das neck die Spitzen A'', A'''.

4) Sollen daher um dem Punkte A''' die nämlichen Winkel liegen, als um dem Punkte A'', so muß man über die dritte Seite $A'''A^{IV}$ des recks ein meck setzen, und aus einem ähnlichen Grunde über die vierte Seite $A^{IV}A^{V}$ ein neck, über die fünfte Seite $A^{V}A^{VI}$ ein meck u. s. w. immer wechselsweise ein meck und ein neck.

5) Hieraus läßt sich schließen, daß die mecke nur auf die

1ste, 3te, 5te, 7te u. s. w. Seite des $r$ecks, also auf diejenigen Seiten, welche die ungeraden Stellen in der Folge derselben einnehmen, und die $n$ecke nur auf die 2te, 4te, 6te, 8te, u. s. w. Seite, also auf diejenigen Seiten, welche die geraden Stellen in dieser Folge einnehmen, zu stehen kommen werden.

6) Ist daher r eine gerade Zahl, so kommt auf die letzte Seite des $r$ecks, nämlich $A^{(r)}A'$, ein $n$eck zu stehen, und der Punkt A' ist die Winkelspitze von den drey Winkeln des $r$ecks, der $m$ecks und des $n$ecks. Ist aber r ungerade, so kommt auf die Seite $A^{(r)}A'$ ein $m$eck zu stehen, und der Punkt A' wird die gemeinschaftliche Spitze dreyer Winkel, deren einer aus dem $r$eck, und zwey aus dem $m$eck genommen sind; welches der Voraussetzung, daß alle körperliche Winkel gleich, oder symmetrisch seyn sollen, widerspricht.

7) Es kann also der Foderung nur alsdann eine Genüge geschehen, wenn r gerade, nicht aber, wenn r ungerade ist. Zur Erläuterung des Gesagten dienet Fig. 46 und Fig. 47: die erstere von diesen Figuren zeigt ein Achteck, mit angesetzten Dreyecken und Vierecken, welche man sich gehörig zusammen gefügt vorstellen muß; die zweyte zeigt dasselbe für ein Neuneck; in der ersten ist die Construktion möglich, in der zweyten unmöglich.

8) Stellt man sich nunmehr vor, es wäre zwischen jedem $m$eck und $n$eck ein anderes Vieleck, ein $p$eck eingeschoben, so daß für den Punkt A' zwey Seiten dieses letzteren, mit zwey Seiten der beyden ersteren, $A'k$ und $A'k'$ zusammen fallen, und jede Spitze des $r$ecks zugleich eine Spitze eines $m$ecks, eines $n$ecks und eines $p$ecks wird, so ändert dieses in den bisherigen Schlüssen nichts, und die Construktion bleibt möglich, wenn r gerade, unmöglich, wenn r ungerade ist.

9) Bisher wurde angenommen, daß m von n verschieden sey; ist das nicht der Fall, so ist die Construktion immer möglich, r mag gerade oder ungerade seyn.

10) Hieraus folgt aber ferner, daß, wenn für ein ungerades r die Construktion möglich seyn soll, sich unter den anzusetzenden Vielecken nothwendig zwey gleiche befinden müssen.

Zus. Soll daher ein Körper von regulären Vielecken eingeschlossen werden, zugleich aber lauter gleiche oder symmetrische körperliche Winkel haben, und befindet sich unter den Vielecken, welche einen solchen Winkel begränzen, eines mit einer ungeraden Anzahl der Seiten, so muß es unter den übrigen wenigstens zwey gleiche geben.

§. 123.

Aufg. Ein Körper mit gleichen, und symmetrischen Winkeln, wird von lauter regulären meken und neken eingeschlossen, und zwar so, daß jeder körperliche Winkel von p Flächenwinkel aus dem ersten Vieleck, und q Flächenwinkel aus dem letzteren gebildet wird: man soll die Anzahl der Ecken des Körpers und die Anzahl der Gränzflächen von jeder Art bestimmen.

Aufl. Es sey E die Anzahl der Ecken, M die Anzahl der mecke, und N die Anzahl der necke auf der Oberfläche des Körpers.

a) Da jedes meck m Winkel enthält, so giebt es auf der Oberfläche des Körpers in allem Mm Winkel, welche diesem Vielecke zugehören; und da jeden körperlichen Winkel p derselben umgränzen, so ist die Anzahl der Ecken oder $E = \frac{Mm}{p}$. Durch ähnliche Schlüsse erhält man $E = \frac{Nn}{q}$. Man hat also $\frac{Mm}{p} = \frac{Nn}{q}$, und daher $N = \frac{Mmq}{np}$.

2) Jeder

2) Jeder Winkel eines meds ist, wie bekannt, $= \frac{2m-4}{m}$ R, und jeder Winkel aus dem neck $= \frac{2n-4}{n}$ R; folglich die Summe aller Flächenwinkel auf der Oberfläche des Körpers $= \left[p \cdot \frac{2m-4}{m} + q \cdot \frac{2n-4}{n}\right]$ E rechten Winkeln. Aber die Summe dieser Winkel ist auch $= 4E - 8$ rechten Winkeln (§ 89); man hat also die Gleichung,

$$\left[p \cdot \frac{2m-4}{m} + q \cdot \frac{2n-4}{n}\right] E = 4E - 8$$

3) Aus dieser Gleichung und aus 1 erhält man, wenn zur Abkürzung, $2mn - np(m-2) - mq(n-2) = A$ gesetzt wird,

$$E = \frac{4mn}{A}, \; M = \frac{4np}{A}, \; N = \frac{4mq}{A}.$$

Die Werthe, welche man hieraus für E, M, N, erhält, müssen endliche, ganze und positive Zahlen seyn; wo dieses nicht zutrifft, ist der Körper unmöglich.

§ 124.

Aufg. Es sollen alle mögliche Körper gefunden werden, welche gleiche oder symmetrische Ecken besitzen, und von regulären Vielecken zweyerley Art begränzt werden.

Aufl. 1) Jeder Körper wird durch die für m, n, p, q, angenommenen ganzen Zahlen bestimmt; denn aus diesen findet man (§ 123) A, und hieraus ferner M, N, E. Auch ist, wenn K die Anzahl der Kanten bezeichnet, $K = \frac{Mm + Nn}{2}$; woraus sich K bestimmen läßt.

2) Um bey dieser Untersuchung die gehörige Ordnung zu beobachten, wollen wir zuerst für m und p die kleinsten möglichen Werthe, nämlich $m = 3$, $p = 1$, annehmen. Bey

diesen Werthen ist es nicht gestattet, n kleiner als 4 anzunehmen, weil vorausgesetzt worden, daß jeder körperliche Winkel von Vielecken zweyerley Art begränzt werde; auch kann q nicht kleiner als 2 seyn, weil ein körperlicher Winkel wenigstens drey Flächenwinkel haben muß, und nicht größer als 3, weil sonst die Summe aller Flächenwinkel größer als 360° wäre.

3) Es sey daher zuerst $m = 3$, $p = 1$, $n = 4$, $q = 2$. Substituirt man diese Werthe in den Formeln des vorigen §'s, so erhält man, $A = 8$, und hieraus

$$E = 6, \quad M = 2, \quad N = 3, \quad K = 9.$$

Es sey zweytens $m = 3$, $p = 1$, $n = 4$, $q = 3$. Hier ist $A = 2$; folglich,

$$E = 24, \quad M = 8, \quad N = 18, \quad K = 48.$$

4) Behält man die Werthe $m = 3$, $p = 1$, und setzt $n = 5$, so kann q nicht größer als 2 seyn, weil sonst die Summe aller Flächenwinkel größer als 360° wäre. Noch weniger kann aus diesem Grunde $q > 2$ seyn, wenn $n > 5$ ist. Man setze daher $q = 2$, nnd lasse n unbestimmt; alsdann ist $A = 12 - n$, und n kann daher nicht größer als 11 seyn. Die Werthe $n = 5$, $n = 7$, $n = 9$, $n = 11$, können wegen § 122 nicht statt finden; die ersteren beyde auch schon deshalb, weil sie für E Brüche geben. Es bleiben also nur die Werthe, $n = 6$, $n = 8$, $n = 10$. Hieraus ergiebt sich,

5) Für $m = 3$, $p = 1$, $n = 6$, $q = 2$:

$$E = 12, \quad M = 4, \quad N = 4, \quad K = 18.$$

Für $m = 3$, $p = 1$, $n = 8$, $q = 2$;

$$E = 24, \quad M = 8, \quad N = 6, \quad K = 36.$$

Für $m = 3$, $p = 1$, $n = 10$, $q = 2$;

$$E = 60, \quad M = 20, \quad N = 12, \quad K = 90.$$

6) Es sey nun $m = 3$, $p = 2$, so kann man $n = 4$, 5, 6, u. s. w., und $q = 1$, 2, 3, u. s. w. setzen. Da aber

die Summe der Flächenwinkel 360° nicht übersteigen darf, so bleiben nur die Werthe q = 1, q = 2 übrig. Setzt man q = 1, und läßt n unbestimmt, so findet man, $A = 6 + n$, $E = \frac{12n}{6+n}$, $M = \frac{8n}{6+n}$, $N = \frac{12}{6+n}$. Es kann daher n nicht größer als 6 seyn, weil N sonst einem Bruche gleich werden würde. Auch kann nicht n = 6 seyn, weil sonst ein Flächenwinkel so groß wäre, als die beyden andern zusammen, welches unmöglich ist. Es bleiben also nur die Werthe n = 4, n = 5 übrig, und diese Werthe geben für E Brüche. Man setze daher q = 2, so erhält man, $A = 12 - 2n$, und es darf also n nicht größer als 5 seyn. Es bleiben demnach nur die Werthe n = 4, n = 5, und diese geben,

7) Für m = 3, p = 2, n = 4, q = 2;

$E = 12,\ M = 8,\ N = 6,\ K = 24.$

Für m = 3, p = 2, n = 5, q = 2;

$E = 30,\ M = 20,\ N = 12,\ K = 60.$

8) Es sey m = 3, p = 3; alsdann kann q nicht größer als 1 seyn, und man erhält für diesen Werth A = 6, und daher,

$E = 2n,\ M = 2n,\ N = 2,\ K = 4n.$

Hier kann n jeden beliebigen Werth über 3 erhalten. Der Körper wird von zwey beliebigen Vielecken, und doppelt so vielen Dreyecken, als das Vieleck Seiten hat, begränzt. Er kann leicht konstruirt werden; denn man darf nur an jeder Winkelspitze des Vieleckes drey Dreyecke setzen.

9) Man setze m = 3, p = 4; alsdann darf q nicht größer als 1, und n nicht größer als 5 seyn, weil sonst die Summe der Flächenwinkel = oder > 360° wäre. Man kann also nur n = 4, oder n = 5 setzen. Es ist aber,

10) Für $m = 3$, $p = 4$, $n = 4$, $q = 1$,

$$E = 24,\ M = 32,\ N = 6,\ K = 60.$$

Für $m = 3$, $p = 4$, $n = 5$, $q = 1$,

$$E = 60,\ M = 80,\ N = 12,\ K = 150.$$

11) Es sey nun $m = 4$, $p = 1$; alsdann kann q nicht größer als 2 seyn, weil $n > m$ angenommen wird; aber auch nicht kleiner als 2, weil zur Bildung eines körperlichen Winkels wenigstens drey Flächenwinkel erfordert werden. Man setze also $q = 2$; alsdann ist $A = 16 - 2n$, und n kann daher nicht größer als 7 seyn. Es bleiben also nur die Werthe $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$; und von diesen wird wieder 5 und 7 wegen § 122 ausgeschlossen. Man darf also nur $n = 6$ setzen. Es ist aber,

12) Für $m = 4$, $p = 1$, $n = 6$, $q = 2$;

$$E = 24,\ M = 6,\ N = 8,\ K = 36.$$

13) Für $m = 4$, $p = 2$, kann n nicht kleiner als 5 und q nicht größer als 1 seyn; und man erhält daher $A = 8$, und

$$E = 2n,\ M = n,\ N = 2,\ K = 3n,$$

wo n jeden beliebigen Werth, der nicht kleiner als 5 ist, erhalten kann. Dieser Körper wird also von zwey beliebigen regulären und gleichen Vielecken, und so vielen Quadraten begränzt, als das Vieleck Seiten hat. Er ist demnach nichts anders als ein geradstehendes Prisma mit quadratischen Seitenflächen.

14) Für $m = 5$, $p = 1$, kann nur $q = 2$ seyn. Alsdann ist aber $A = 20 - 5n$, und folglich kann nur $n = 6$ seyn. Dieser Werth giebt,

$$E = 60,\ M = 12,\ N = 20,\ K = 90.$$

15) $m = 6$, oder $m > 6$, kann, wie leicht zu begreifen ist, nicht statt finden.

§ 125.

Der leichtern Uebersicht wegen, will ich nun die Körper in der Ordnung, wie sie gefunden worden, zusammen stellen.

I. Ein Körper, welcher von 2 Dreyecken und 3 Quadraten begränzt wird. Er hat 6 Ecken und 9 Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von 60° und 2 von 90° eingeschlossen. Er ist nichts anders als ein geradstehendes, dreyseitiges Prisma mit quadratischen Seitenflächen.

II. Ein Körper, welcher von 8 Dreyecken und 18 Quadraten begränzt wird. Er hat 24 Ecken und 48 Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von 60° und 3 von 90° eingeschlossen. Fig. 48 zeigt das Netz dieses Körpers.

III. Ein Körper, welcher von 4 Dreyecken und 4 Sechsecken begränzt wird. Er hat 12 Ecken und 18 Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von 60° und 2 von 120° eingeschlossen. Das Netz Fig. 49.

IV. Ein Körper, welcher von 8 Dreyecken und 6 Achtecken begränzt wird. Er hat 24 Ecken und 36 Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von 60° und 2 von 135° eingeschlossen. Das Netz Fig. 50.

V. Ein Körper, welcher von 20 Dreyecken und 12 Zehnecken begränzt wird. Er hat 60 Ecken und 90 Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von 60° und 2 von 144° eingeschlossen. Das Netz Fig. 51; es muß doppelt gemacht und an einander gefügt werden.

VI. Ein Körper, welcher von 8 Dreyecken und 6 Quadraten begränzt wird. Er hat 12 Ecken und 24 Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von 2 ebenen Winkeln von 60° und 2 von 90° eingeschlossen. Das Netz Fig. 52.

VII. Ein Körper, welcher von 20 Dreyecken und 12

Fünfecken begränzt wird. Er hat 30 Ecken und 60 Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von 2 ebenen Winkeln von 60° und 2 von 108° eingeschlossen. Das Netz Fig. 53; es muß doppelt gemacht werden.

VIII. Ein Körper, welcher von 2 n Dreyecken und 2 necken begränzt wird. Er hat 2 n Ecken und 4 n Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von drey ebenen Winkeln von 60° und von einem Winkel des necks $= \frac{2n-4}{n}$ 90° eingeschlossen.

IX. Ein Körper, welcher von 32 Dreyecken und 6 Quadraten begränzt wird. Er hat 24 Ecken und 60 Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von 4 ebenen Winkeln von 60° und einem von 90° eingeschlossen. Das Netz Fig. 54.

X. Ein Körper, welcher von 80 Dreyecken und 12 Fünfecken begränzt wird. Er hat 60 Ecken und 150 Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von 4 ebenen Winkeln von 60° und einem von 108° eingeschlossen. Das Netz Fig. 55; es muß doppelt gemacht werden.

XI. Ein Körper, welcher von 6 Quadraten und 8 Sechsecken begränzt wird. Er hat 24 Ecken und 36 Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von 90° und 2 von 120° eingeschlossen. Das Netz Fig. 56.

XII. Ein Körper, welcher von n Quadraten und 2 necken begränzt wird, wofür aber n nicht kleiner als 5 seyn darf. Er hat 2 n Ecken und 3 n Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von 2 ebenen Winkeln von 90° und einem Winkel des n Ecks $= \frac{2n-4}{n}$ 90° eingeschlossen. Er ist ein geradstehendes Prisma.

XIII. Ein Körper, welcher von 12 Fünfecken und 20 Sechsecken begränzt wird. Er hat 60 Ecken und 90 Kanten.

Jeder körperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von 108° und 2 von 120° eingeschlossen. Das Netz Fig. 57: es muß doppelt gemacht werden.

Es giebt also außer den Körpern I. VIII. XII. nur 10 Körper, welche von regulären und gleichen Vielecken zweyerley Art begränzt werden, und deren körperliche Winkel gleich oder symmetrisch sind.

§ 126.

Aufg. Ein körperlicher Winkel, welcher von p Flächenwinkeln, jeder $= x$, und von q Winkeln, jeder $= x'$ eingeschlossen wird, ist innerhalb einer Kugel von einem gegebenen Halbmesser $= r$, so gesetzt worden, daß seine Spitze die Kugelfläche berührt, und alle seine Schenkel einander gleich werden: man soll die den Flächenwinkeln x, x', korrespondirenden sphärischen Winkel und die gleichen Schenkel finden.

Aufl. 1) Es seyen ϱ, ϱ', die den Flächenwinkeln x, x', korrespondirenden sphärischen Winkel, d. h. diejenigen Winkel, welche entstehen, wenn man die Schenkel des körperlichen Winkels Sehnen von Bogen größter Kreise seyn läßt. Die Summe dieser Winkel ist $= 360°$. Man hat also $p\varrho + q\varrho' = 360°$.

2) Jeder der in 1 erwähnten unbekannten Bogen sey $= \eta$. Man verbinde die Endpunkte jeder zwey neben einander liegenden Bogen durch andere Bogen größter Kreise; so entstehen $p + q$ gleichschenkelige sphärische Dreyecke. Zu den p sphär. Dreyecken mit dem Scheitelwinkel ϱ gehören eben so viele Sehnendreyecke (§ 48) mit dem ebenen Scheitelwinkel x, und zu den q sphär. Dreyecken mit dem Scheitelwinkel ϱ', eben so viele Sehnendreyecke mit dem ebenen Scheitelwinkel x'.

3) Die Beziehung zwischen dem Scheitelwinkel eines sphärischen Dreyeckes, und dem Scheitelwinkel seines Sehnendreyeckes, wurde § 50 Anmerk. gefunden. Auf den gegenwärtigen

Fall angewandt, muß man anstatt α, b, A, erst $\varkappa$, η, θ, und hernach $\varkappa'$, η, θ', setzen. Hierdurch erhält man,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa = \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta,\quad \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa' = \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta\ \text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\theta',$$

und hieraus die Proportion,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa : \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta : \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta'.$$

Da hier $\varkappa$ und $\varkappa'$ bekannt sind, so läßt sich vermittelst dieser Proportion θ' aus θ finden.

4) Aus der Gleichung $p\theta + q\theta' = 360°$ in 1, erhält man $\frac{1}{2} q\theta' = 180° - \frac{1}{2} p\theta$, und daher,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}q\theta' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}p\theta.$$

5) In der Goniometrie wird gezeigt, wie man im Allgemeinen, wenn φ irgend einen Winkel, und n irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet, Sin. $n\varphi$ durch Sin. φ ausdrücken könne (m. s. Klügels analytische Trigonometrie S. 65, oder dessen mathematisches Wörterbuch 2ter Th. S. 540); also auch Sin. $\frac{1}{2} q\theta'$ durch Sin. $\frac{1}{2}\theta'$, und Sin. $\frac{1}{2} p\theta$ durch Sin. $\frac{1}{2}\theta$. Hier werden wir indessen dieser Formel nicht benöthigt seyn, weil q und p immer nur klein sind, und die Zahl 4 nicht übersteigen.

6) Hat man nun Sin. $\frac{1}{2} q\theta'$ durch Sin. $\frac{1}{2}\theta'$ und Sin. $\frac{1}{2} p\theta$ durch Sin. $\frac{1}{2}\theta$ ausgedrückt, so darf man nur für Sin. $\frac{1}{2}\theta'$ seinen Werth $\frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\varkappa'}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\varkappa}$ Sin. $\frac{1}{2}\theta$ aus 3 setzen. Man erhält alsdann eine Gleichung, worin bloß Sin $\frac{1}{2}\theta$ unbekannt ist. Die allgemeine Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe beruhet also auf der allgemeinen Auflösung der Gleichungen.

7) Hat man auf diese Weise Sin. $\frac{1}{2}\theta$ gefunden, so erhält man aus 3,

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\varkappa}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\theta},$$

woraus sich nun auch η bestimmen läßt.

8) Es sey nunmehr x der gesuchte Schenkel des körperlichen Winkels; er ist nichts anders als die Sehne des Bogens η; man hat daher,

$$x = 2\, r\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\eta.$$

Zus. Vermittelst der hier aufgelösten Aufgabe lassen sich die in § 125 aufgezählten Körper, auf die folgende Art konstruiren, wenn man sich etwa mit ihren Netzen nicht begnügen wollte. Man konstruire nämlich zuerst den körperlichen Winkel, indem man die Winkel θ, θ', und den Bogen η so groß macht, wie die Rechnung giebt; beschreibe hierauf um die in 2 erwähnten Sehnendreyecke Kreise, deren Peripherien nothwendig in die Kugelfläche fallen werden; vollende in diesen Kreisen, wenn es nöthig ist, die Vielecke, welche den körperlichen Winkel begränzen; an jedem Winkelpunkte dieser Vielecke setze man einen, dem vorigen gleichen oder symmetrischen körperlichen Winkel, wodurch wieder neue Vielecke entstehen, an deren Winkelpunkte man ebenfalls solche Winkel setzt, und fahre hiermit so lange fort, bis sich der Körper schließt. Aus dieser Construktion erhellet, daß sich alle solche Körper, so wie die regulären, innerhalb einer Kugel beschreiben lassen; ein Umstand, der sehr viel zur leichtern Berechnung derselben beyträgt.

§ 127.

Aufg. Der Halbmesser einer Kugel, in welcher die in § 125 aufgeführten Körper beschrieben sind, ist gegeben: man soll allgemeine Ausdrücke für die Größe ihrer Kanten, ihrer Gränzflächen, ihrer Oberfläche, ihres kubischen Inhalts, und für den Halbmesser des um jede Gränzfläche beschriebenen Kreises finden.

Aufl. 1) Der Körper werde von m ecken und n ecken begränzt, und jeder körperliche Winkel desselben von p Polygons

winkeln des ersten und q Polygonwinkeln des zweyten Vielecks gebildet. Jede von den gleichen Kanten des Körpers sey ferner $= x$; der Halbmesser des um das m eck beschriebenen Kreises $= y$, und der Halbmesser des Kreises um das n eck $= y'$. Der Polygonwinkel des m ecks sey $= \varkappa$, und der des n ecks $= \varkappa'$, so daß,

$$\varkappa = \frac{2m-4}{m}\mathfrak{R}, \quad \varkappa' = \frac{2n-4}{n}\mathfrak{R}.$$

2) Jedem geradlinigen Vielecke entspricht ein sphärisches Vieleck auf der Kugelfläche: es giebt daher auch nur zwey Arten von diesen letzteren; zum m eck gehöre ein sphärisches Vieleck mit dem Polygonwinkel $= \theta$, und zum n ecke eines mit dem Polygonwinkel θ'. Die gleichen Seiten dieser Vielecke, d. h. die Bogen, welche die Kanten des Körpers zu Sehnen haben, seyen $= \eta$.

3) Man denke sich aus dem Mittelpunkte der Kugel auf eines der m ecke ein Perpendikel herabgelassen; so gehet dieses Perpendikel durch den Mittelpunkt des um das Vieleck beschriebenen Kreises, und trifft verlängert den Pol desselben. Von diesem Pole denke man sich ferner nach jedem Winkelpunkte des sphärischen Vieleckes Bogen größter Kreise gezogen; die Bogen setze ich $= \varphi$, und den Winkel, welche jede zwey zunächst liegende rings um den Pol einschließen, $= \alpha$; alsdann ist nach § 57

$$\alpha = \frac{360^\circ}{m}, \quad \text{Sin.}\,\varphi = \frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha}.$$

Bezeichnet ferner α', φ', für das n eck das Nämliche als α, φ, für das m eck; so ist auch

$$\alpha' = \frac{360^\circ}{n}, \quad \text{Sin.}\,\varphi' = \frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha'}.$$

4) Wüßte man nun die Seite η der sphärischen Vielecke, so würde man auch vermittelst dieser Gleichungen Sin. φ, Sin. φ', bestimmen können, und hieraus ferner die Halbmesser y, y'; denn es ist, wenn der Halbmesser der Kugel = r,

$$y = r \,\text{Sin.}\, \varphi. \quad y' = r \,\text{Sin.}\, \varphi'.$$

5) Um η, zu bestimmen, müßte man einen der Polygonwinkel θ, θ', kennen; denn man hat (§ 57. 6)

$$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\, \frac{180^\circ}{m}}{\text{Sin}\, \frac{1}{2}\theta} = \frac{\text{Cos.}\, \frac{180^\circ}{n}}{\text{Sin.}\, \frac{1}{2}\theta'}.$$

6) Man erhält aber die Winkel θ, θ', aus den beyden Gleichungen (§ 126. 3 und 4),

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin.}\, \frac{1}{2}\varkappa'}{\text{Sin.}\, \frac{1}{2}\varkappa}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, q\, \theta' = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, p\, \theta.$$

7) Alles beruhet also auf der Auflösung dieser beyden Gleichungen. Hat man nämlich daraus θ bestimmt, so läßt sich η, φ, φ', und somit auch y, y', finden. Aber auch die Kante des Körpers ist alsdann bekannt; denn man hat, (§ 126. 8)

$$x = 2\, r \,\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\eta.$$

8) Aus y, y', x, findet man nun den Flächeninhalt der Gränzflächen; denn wenn f den Inhalt des mecks und f' den Inhalt des necks bezeichnet; so ist,

$$f = \tfrac{1}{4}\, m x \sqrt{(y^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}, \quad f' = \tfrac{1}{4}\, n x \sqrt{(y'^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}.$$

9) Aus § 125 ist die Anzahl der mecke und die Anzahl der necke, welche den Körper begränzen, schon bekannt; die erstere sey im Allgemeinen = M, die zweyte = N; alsdann ist

Oberfläche des Körpers = Mf + Nf'.

10) Die Entfernung jedes $m$ecks vom Mittelpunkte der Kugel ist $\sqrt{(r^2 - y^2)}$, und die Entfernung des $n$ecks $= \sqrt{(r^2 - y'^2)}$. Denkt man sich daher den Körper in lauter Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen die erwähnten Vielecke sind, und deren Spitzen sich im Mittelpunkte der Kugel befinden: so ist

der Inhalt des Körpers $= \frac{1}{3} Mf \sqrt{(r^2 - y^2)} + \frac{1}{3} Nf' \sqrt{(r^2 - y'^2)}$.

11) Vermittelst aller dieser Formeln lassen sich nun die in § 125 aufgezählten Körper sehr leicht berechnen.

§ 128.

a) Berechnung des Körpers I. § 125.

1) Für diesen Körper ist $m = 3$, $n = 4$; $p = 1$, $q = 2$; $\varkappa = 60^\circ$, $\varkappa' = 90^\circ$; $M = 2$, $N = 3$. Man hat also aus § 127. 6 die beyden Gleichungen,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta' = \frac{\text{Sin. } 45^\circ}{\text{Sin. } 30^\circ} \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta \cdot \sqrt{2},$$

$$\text{Sin.} \theta' = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta;$$

und diese geben,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta' = \text{Sin.} \theta' \sqrt{2} = 2 \text{ Sin.} \tfrac{1}{2} \theta' \text{ Cos.} \tfrac{1}{2} \theta' \cdot \sqrt{2};$$

woraus man erhält,

$$\text{Cos.} \tfrac{1}{2} \theta' = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta' = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

2) Demnach ist (§ 127. 5)

$$\text{Cos.} \tfrac{1}{2} \eta = \frac{\text{Cos. } 45^\circ}{\text{Sin} \tfrac{1}{2} \theta'} = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \eta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

3) Aus § 127. 3, hat man ferner $\alpha = 120^\circ$, $\alpha' = 90^\circ$,

$$\text{Sin.} \varphi = \frac{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \eta}{\text{Sin.} 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \text{Sin.} \varphi' = \frac{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \eta}{\text{Sin.} 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}.$$

4) Folglich, (§ 127. 4)

$$y = \frac{2\,r}{\sqrt{7}}, \quad y' = \frac{r\sqrt{6}}{\sqrt{7}}.$$

Auch ist (§ 127. 7)

$$x = \frac{2\,r\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

5) Man hat also (§ 127. 8)

$$f = \frac{3\,r^2\sqrt{3}}{7}, \quad f' = \frac{12\,r^2}{7}.$$

6) Die Oberfläche des Körpers $= \frac{r^2\,(36 + 6\sqrt{3})}{7}$.

7) Der kubische Inhalt $= \frac{18\,r^3}{7\sqrt{7}}$.

§ 129.

b) Berechnung des Körpers II. § 125.

1) Für diesen Körper ist $m = 3$, $n = 4$; $p = 1$, $q = 5$; $\varkappa = 60°$, $\varkappa' = 90°$; $M = 8$, $N = 18$. Es ist also (§ 127. 6)

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \frac{\text{Sin.}\,45°}{\text{Sin.}\,30°}\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta\,.\,\sqrt{2},$$

$$\text{Sin.}\,\tfrac{3}{2}\,\theta' = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta;$$

und daher,

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{3}{2}\,\theta'}{\sqrt{2}}.$$

2) Nun ist aber $\text{Sin.}\,\tfrac{3}{2}\,\theta' = \text{Sin.}\,(\theta' + \tfrac{1}{2}\,\theta') =$

$$\text{Sin.}\,\theta'\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' + \text{Cos.}\,\theta'\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' =$$

$$2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'^2 + (2\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'^2 - 1)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' =$$

$$(4\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'^2 - 1)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'.$$

Wird dieser Werth in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält man nach der Division mit $\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'$,

$$4 \operatorname{Cos.} \tfrac{1}{2} \theta'^2 - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

und hieraus,

$$\operatorname{Cos.} \tfrac{1}{2} \theta' = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{8}},$$

$$\operatorname{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta' = \sqrt{\frac{6 - \sqrt{2}}{8}}.$$

3) Demnach (§ 127. 5)

$$\operatorname{Cos.} \tfrac{1}{2} \eta = \frac{\operatorname{Cos.} 45^\circ}{\operatorname{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta'} = \sqrt{\frac{4}{6 - \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{12 + 2\sqrt{2}}{17}},$$

$$\operatorname{Sin.} \tfrac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{2}}{17}}.$$

4) Ferner ist (§ 127. 3), $\alpha = 120^\circ$, $\alpha' = 90^\circ$; also,

$$\operatorname{Sin.} \varphi = \frac{\operatorname{Sin.} \tfrac{1}{2} \eta}{\operatorname{Sin.} 60^\circ} = \sqrt{\frac{20 - 8\sqrt{2}}{51}},$$

$$\operatorname{Sin.} \varphi' = \frac{\operatorname{Sin.} \tfrac{1}{2} \eta}{\operatorname{Sin.} 45^\circ} = \sqrt{\frac{10 - 4\sqrt{2}}{17}}.$$

5) Folglich (§ 127. 4 und 7),

$$y = r\sqrt{\frac{20 - 8\sqrt{2}}{51}},\ y' = r\sqrt{\frac{10 - 4\sqrt{2}}{17}},$$

$$x = 2r\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{2}}{17}}.$$

6) Man hat also (§ 127. 8)

$$f = \frac{r^2\sqrt{3}}{17}(5 - 2\sqrt{2}),\quad f' = \frac{4r^2}{17}(5 - 2\sqrt{2}).$$

7) Die Oberfläche des Körpers (§ 127. 9) =

$$\frac{5 - 2\sqrt{2}}{17}(8\sqrt{3} + 72)\, r^2.$$

8) Der Inhalt des Körpers =

$$\frac{r^3 \,.\, (5 - 2\sqrt{2})}{17\sqrt{17}} [\tfrac{1}{3}\sqrt{(31 + 8\sqrt{2})} + 24\sqrt{(7 + 4\sqrt{2})}].$$

§ 130.

c) Berechnung des Körpers III. § 125.

1) Für diesen Körper ist $m = 3$, $n = 6$; $p = 1$, $q = 2$; $\varkappa = 60^\circ$, $\varkappa' = 120^\circ$; $M = N = 4$; also,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta' = \frac{\text{Sin. } 60^\circ}{\text{Sin. } 30^\circ}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta \cdot \sqrt{3},$$

$$\text{Sin.}\, \theta' = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta,$$

und daher, $$\text{Sin.}\, \theta' = \frac{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta'}{\sqrt{3}},$$

oder, da $\text{Sin.}\, \theta' = 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta'\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta'$,

$$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta' = \frac{1}{2\sqrt{3}},\ \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta' = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}.$$

2) $$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\, \eta = \frac{\text{Cos. } 30^\circ}{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta'} = \frac{3}{\sqrt{11}},\ \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \eta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

3) $\alpha = 120^\circ$, $\alpha' = 60^\circ$; also,

$$\text{Sin.}\, \varphi = \frac{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \eta}{\text{Sin. } 60^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}},$$

$$\text{Sin.}\, \varphi' = \frac{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \eta}{\text{Sin. } 30^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

4) $$y = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{33}},\quad y' = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{11}},\quad x = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

5) $$f = \frac{2r^2\sqrt{3}}{11},\quad f' = \frac{12r^2\sqrt{3}}{11}.$$

6) Oberfläche des Körpers $= \dfrac{56\, r^2 \sqrt{3}}{11}$.

7) Inhalt desselben $= \frac{184\, r^3}{33 \sqrt{11}}$.

§ 131.

d) Berechnung des Körpers IV, § 125.

1) Hier ist $m = 3$, $n = 8$; $p = 1$, $q = 2$; $\varkappa = 60^\circ$ $\varkappa' = 135^\circ$; $M = 8$, $N = 6$; $\text{Cos.}\ \varkappa' = \text{Cos.}\ 135^\circ = - \text{Cos.}\ 45^\circ = - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\, \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2} \varkappa'^2 - 1$, und daher

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2} \varkappa' = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2},\quad \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \varkappa' = \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{2}.$$

Man hat also,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta' = \frac{\text{Sin}\ \tfrac{1}{2} \varkappa'}{\text{Sin.}\ 30^\circ} \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta \,.\, \sqrt{(2 + \sqrt{2})},$$

$$\text{Sin.}\ \theta' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta;$$

woraus man erhält,

$$\text{Sin.}\ \theta' = \frac{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta'}{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}} = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta' \cdot \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}},$$

oder, da $\text{Sin.}\ \theta' = 2\, \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta'\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2} \theta'$,

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2} \theta' = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{8}},\quad \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta' = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{2}}{8}}.$$

2) Da $\text{Cos.}\ \frac{180^\circ}{n} = \text{Cos.}\ 22^\circ\ 30' = \text{Sin.}\ 67^\circ\ 30' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \varkappa' = \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{2}$; so ist (§ 127. 5)

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{2}}{6 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{10 + 4\sqrt{2}}{17}},$$

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{2}}{17}}.$$

3) $\alpha =$

3) $\alpha = \frac{360^\circ}{m} = 120^\circ$, $\alpha' = \frac{360^\circ}{n} = 45^\circ$, $\text{Sin.} \frac{1}{2} \alpha' =$

$\text{Sin.}\, 22^\circ\, 30' = \text{Cos.}\, 67^\circ\, 30' = \text{Cos.} \frac{1}{2} \varkappa' = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2}$;

also,

$$\text{Sin.}\, \varphi = \frac{\text{Sin.} \frac{1}{2} \eta}{\text{Sin.} \frac{1}{2} \alpha} = \sqrt{\frac{28 - 16\sqrt{2}}{51}},$$

$$\text{Sin.}\, \varphi' = \frac{\text{Sin.} \frac{1}{2} \eta}{\text{Sin.} \frac{1}{2} \alpha'} = \sqrt{\frac{28 - 16\sqrt{2}}{17(2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{12 - 2\sqrt{2}}{17}},$$

4) $$y = r\sqrt{\frac{28 - 16\sqrt{2}}{51}}, \quad y' = r\sqrt{\frac{12 - 2\sqrt{2}}{17}},$$

$$x = 2r\sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{2}}{17}}.$$

5) $$f = \frac{r^2\sqrt{3}}{17}(7 - 4\sqrt{2}), \quad f' = \frac{4r^2\sqrt{(19 - 6\sqrt{2})}}{17}$$

$$= \frac{12\sqrt{2} - 4}{17} r^2.$$

6) Oberfläche des Körp. $= \frac{56\sqrt{3} - 32\sqrt{6} + 72\sqrt{2} - 24}{17} r^2$.

7) Inhalt desselben =

$$\frac{8r^3}{17\sqrt{17}}\left[\frac{7 - 4\sqrt{2}}{3}\sqrt{(23 + 16\sqrt{2})} + (3\sqrt{2} - 1)\sqrt{(5 + 2\sqrt{2})}\right].$$

§ 132.

e) Berechnung des Körpers V. § 125.

1) Für diesen Körper ist $m = 3$, $n = 10$; $p = 1$, $q = 2$; $\varkappa = 60^\circ$, $\varkappa' = 144^\circ$; $M = 20$, $N = 12$. Da nun Sin. 18° als die halbe Seite des Zehenecks für den Halbmesser 1, $= \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$; so ist $\text{Sin.}\, 72^\circ = \text{Cos.}\, 18^\circ = \frac{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{4}$.

Man hat daher,

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \frac{\text{Sin.}\,72^\circ}{\text{Sin.}\,30^\circ}\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta\,.\,\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{2},$$

$$\text{Sin.}\,\theta' = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta,$$

und daher,

$$\text{Sin.}\,\theta' = \frac{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}} = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'\,.\,\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

Hieraus erhält man, da $\text{Sin.}\,\theta' = 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'$,

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40}},\quad \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \sqrt{\frac{35+\sqrt{5}}{40}}.$$

2) $$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta = \frac{\text{Cos.}\,18^\circ}{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'} = \sqrt{\frac{50+10\sqrt{5}}{70+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{85+15\sqrt{5}}{122}}$$

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta = \sqrt{\frac{37-15\sqrt{5}}{122}}.$$

3) $\alpha' = 120^\circ$, $\alpha'' = 36^\circ$; also,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta}{\text{Sin.}\,60^\circ} = \sqrt{\frac{74-30\sqrt{5}}{183}}.$$

$$\text{Sin.}\,\varphi' = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta}{\text{Sin.}\,18^\circ} = \sqrt{\frac{72-16\sqrt{5}}{61}}.$$

4) $$y = r\sqrt{\frac{74-30\sqrt{5}}{183}},\quad y' = r\sqrt{\frac{72-16\sqrt{5}}{61}},$$

$$x = 2\,r\sqrt{\frac{37-15\sqrt{5}}{122}}.$$

5) $$f = \frac{r^2\sqrt{3}}{122}\,(37-15\sqrt{5}),\quad f' = 5r^2\sqrt{\frac{2617-1117\sqrt{5}}{61}}.$$

Hieraus erhält man nun ferner,

6) Die Oberfläche des Körpers $= 20\,f + 12\,f'$.

7) Der Inhalt des Körpers =

$$\frac{1}{3\sqrt{61}}\left[20\,f\sqrt{\frac{109+30\sqrt{5}}{3}} + 12\,f'\sqrt{\frac{16\sqrt{5}-11}{61}}\right].$$

§ 133.

f) Berechnung des Körpers VI. § 125.

1) Hier ist $m = 3$; $n = 4$; $p = 2$, $q = 2$; $\varkappa = 60^\circ$, $\varkappa' = 90^\circ$; $M = 8$, $N = 6$; also,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta' = \frac{\text{Sin. } 45^\circ}{\text{Sin. } 30^\circ} \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta \cdot \sqrt{2},$$

$$\text{Sin.}\, \theta' = \text{Sin.}\, \theta.$$

2) Man dividire die zweyte Gleichung durch die erste; dies giebt, da $\text{Sin.}\, \theta' = 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta'\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta'$, $\text{Sin.}\, \theta = 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta$,

$$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta' = \frac{\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta}{\sqrt{2}}.$$

Man quadrire sowohl diese, als die erste Gleichung in 1, und addire sie hierauf; dies giebt, da $\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta'^2 + \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta'^2 = 1$,

$$1 = \frac{\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta^2}{2} + 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta^2.$$

Aus dieser Gleichung erhält man, wenn $1 - \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta^2$ für $\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta^2$ gesetzt wird,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3) Daher ist

$$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\, \eta = \frac{\text{Cos. } 60^\circ}{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \theta} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, \eta = \tfrac{1}{2}.$$

4) $\alpha = 120^\circ$, $\alpha' = 90^\circ$; also,

$$\text{Sin.}\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{Sin.}\, \varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5) $$y = \frac{r}{\sqrt{3}},\ y' = \frac{r}{\sqrt{2}},\quad x = r.$$

winkeln des ersten und q Polygonwinkeln des zweyten Vielecks gebildet. Jede von den gleichen Kanten des Körpers sey fer- ner $= x$; der Halbmesser des um das meck beschriebenen Krei- ses $= y$, und der Halbmesser des Kreises um das neck $= y'$. Der Polygonwinkel des mecks sey $= \varkappa$, und der des necks $= \varkappa'$, so daß,

$$\varkappa = \frac{2m-4}{m}\mathfrak{R}, \quad \varkappa' = \frac{2n-4}{n}\mathfrak{R}.$$

2) Jedem geradlinigen Vielecke entspricht ein sphärisches Vieleck auf der Kugelfläche; es giebt daher auch nur zwey Ar- ten von diesen letzteren; zum meck gehöre ein sphärisches Viel- eck mit dem Polygonwinkel $= \theta$, und zum necke eines mit dem Polygonwinkel θ'. Die gleichen Seiten dieser Vielecke, d. h. die Bogen, welche die Kanten des Körpers zu Sehnen haben, seyen $= \eta$.

3) Man denke sich aus dem Mittelpunkte der Kugel auf eines der mecke ein Perpendikel herabgelassen; so gehet dieses Perpendikel durch den Mittelpunkt des um das Vieleck be- schriebenen Kreises, und trifft verlängert den Pol desselben. Von diesem Pole denke man sich ferner nach jedem Winkel- punkte des sphärischen Vieleckes Bogen größter Kreise gezo- gen; die Bogen setze ich $= \varphi$, und den Winkel, welche jede zwey zunächst liegende rings um den Pol einschließen, $= \alpha$; alsdann ist nach § 57

$$\alpha = \frac{360°}{m}, \ \text{Sin.}\,\varphi = \frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha}.$$

Bezeichnet ferner α', φ', für das neck das Nämliche als α, φ, für das meck; so ist auch

$$\alpha' = \frac{360°}{n}, \ \text{Sin.}\,\varphi' = \frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha'}.$$

4) Wüßte man nun die Seite η der sphärischen Vielecke, so würde man auch vermittelst dieser Gleichungen Sin. φ, Sin. φ', bestimmen können, und hieraus ferner die Halbmesser y, y'; denn es ist, wenn der Halbmesser der Kugel $= r$,

$$y = r \text{ Sin. } \varphi. \quad y' = r \text{ Sin. } \varphi'.$$

5) Um η, zu bestimmen, müßte man einen der Polygonwinkel θ, θ', kennen; denn man hat (§ 57. 6)

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos. } \frac{180^\circ}{m}}{\text{Sin } \frac{1}{2}\theta} = \frac{\text{Cos. } \frac{180^\circ}{n}}{\text{Sin. } \frac{1}{2}\theta'}.$$

6) Man erhält aber die Winkel θ, θ', aus den beyden Gleichungen (§ 126. 5 und 4),

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}\varkappa'}{\text{Sin. } \frac{1}{2}\varkappa} \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} q\, \theta' = \text{Sin. } \tfrac{1}{2} p\, \theta.$$

7) Alles beruhet also auf der Auflösung dieser beyden Gleichungen. Hat man nämlich daraus θ bestimmt, so läßt sich η, φ, φ', und somit auch y, y', finden. Aber auch die Kante des Körpers ist alsdann bekannt; denn man hat, (§ 126. 8)

$$x = 2 r \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\eta.$$

8) Aus y, y', x, findet man nun den Flächeninhalt der Gränzflächen; denn wenn f den Inhalt des $m$ecks und f' den Inhalt des $n$ecks bezeichnet; so ist,

$$f = \tfrac{1}{4} mx \sqrt{(y^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}, \quad f' = \tfrac{1}{4} nx \sqrt{(y'^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}.$$

9) Aus § 125 ist die Anzahl der $m$ecke und die Anzahl der $n$ecke, welche den Körper begränzen, schon bekannt; die erstere sey im Allgemeinen $= M$, die zweyte $= N$; alsdann ist

$$\text{Oberfläche des Körpers} = Mf + Nf'.$$

10) Die Entfernung jedes m ecks vom Mittelpunkte der Kugel ist $\sqrt{(r^2 - y^2)}$, und die Entfernung des n ecks $= \sqrt{(r^2 - y'^2)}$. Denkt man sich daher den Körper in lauter Pyramiden zerlegt, deren Gränzflächen die erwähnten Vielecke sind, und deren Spitzen sich im Mittelpunkte der Kugel befinden: so ist

der Inhalt des Körpers $= \frac{1}{3}Mf\sqrt{(r^2 - y^2)} + \frac{1}{3}Nf'\sqrt{(r^2 - y'^2)}$.

11) Vermittelst aller dieser Formeln lassen sich nun die in § 125 aufgezählten Körper sehr leicht berechnen.

§ 128.

a) Berechnung des Körpers I. § 125.

1) Für diesen Körper ist $m = 3$, $n = 4$; $p = 1$. $q = 2$; $\varkappa = 60°$, $\varkappa' = 90°$; $M = 2$, $N = 3$. Man hat also aus § 127. 6 die beyden Gleichungen,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin. } 45°}{\text{Sin. } 30°}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{2},$$

$$\text{Sin.}\, \theta' = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta;$$

und diese geben,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta' = \text{Sin.}\, \theta' \sqrt{2} = 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta'\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\theta' \cdot \sqrt{2};$$

woraus man erhält,

$$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{1}{2\sqrt{2}},\quad \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

2) Demnach ist (§ 127. 5)

$$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos. } 45°}{\text{Sin}\, \tfrac{1}{2}\theta'} = \frac{2}{\sqrt{7}},\quad \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

3) Aus § 127. 3, hat man ferner $\alpha = 120°$, $\alpha' = 90°$,

$$\text{Sin.}\, \varphi = \frac{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\eta}{\text{Sin. } 60°} = \frac{2}{\sqrt{7}},\quad \text{Sin.}\, \varphi' = \frac{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\eta}{\text{Sin. } 45°} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}.$$

4) Folglich, (§ 127. 4)

$$y = \frac{2\,r}{\sqrt{7}},\quad y' = \frac{r\sqrt{6}}{\sqrt{7}}.$$

Auch ist (§ 127. 7)

$$x = \frac{2\,r\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

5) Man hat also (§ 127. 8)

$$f = \frac{3\,r^2\sqrt{3}}{7},\quad f' = \frac{12\,r^2}{7}.$$

6) Die Oberfläche des Körpers $= \frac{r^2\,(36 + 6\sqrt{3})}{7}$.

7) Der kubische Inhalt $= \frac{18\,r^3}{7\sqrt{7}}$.

§ 129.

b) Berechnung des Körpers II. § 125.

1) Für diesen Körper ist $m = 3$, $n = 4$; $p = 1$, $q = 5$; $\varkappa = 60°$, $\varkappa' = 90°$; $M = 8$, $N = 18$. Es ist also (§ 127. 6)

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \frac{\text{Sin. } 45°}{\text{Sin. } 30°}\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta\,.\,\sqrt{2},$$

$$\text{Sin.}\,\tfrac{3}{2}\,\theta' = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta;$$

und daher,

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{3}{2}\,\theta'}{\sqrt{2}}.$$

2) Nun ist aber $\text{Sin.}\,\tfrac{3}{2}\,\theta' = \text{Sin.}\,(\theta' + \tfrac{1}{2}\,\theta') =$

$$\text{Sin.}\,\theta'\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' + \text{Cos.}\,\theta'\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' =$$

$$2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'^2 + (2\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'^2 - 1)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' =$$

$$(4\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'^2 - 1)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'.$$

Wird dieser Werth in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält man nach der Division mit $\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'$,

$$4\,\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\theta'^2 - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

und hieraus,

$$\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\theta' = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{8}},$$

$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\theta' = \sqrt{\frac{6-\sqrt{2}}{8}}.$$

3) Demnach (§ 127. 6)

$$\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\mathrm{Cos.}\,45^\circ}{\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\theta'} = \sqrt{\frac{4}{6-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{12+2\sqrt{2}}{17}},$$

$$\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{2}}{17}}.$$

4) Ferner ist (§ 127. 3), $\alpha = 120^\circ$; $\alpha' = 90^\circ$; also,

$$\mathrm{Sin.}\,\varphi = \frac{\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\eta}{\mathrm{Sin.}\,60^\circ} = \sqrt{\frac{20-8\sqrt{2}}{51}},$$

$$\mathrm{Sin.}\,\varphi' = \frac{\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\eta}{\mathrm{Sin.}\,45^\circ} = \sqrt{\frac{10-4\sqrt{2}}{17}}.$$

5) Folglich (§ 127. 4 und 7),

$$y = r\sqrt{\frac{20-8\sqrt{2}}{51}},\quad y' = r\sqrt{\frac{10-4\sqrt{2}}{17}},$$

$$x = 2r\sqrt{\frac{5-2\sqrt{2}}{17}}.$$

6) Man hat also (§ 127. 8)

$$f = \frac{r^2\sqrt{3}}{17}(5-2\sqrt{2}),\quad f' = \frac{4r^2}{17}(5-2\sqrt{2}).$$

7) Die Oberfläche des Körpers (§ 127. 9) =

$$\frac{5-2\sqrt{2}}{17}(8\sqrt{3}+72)\,r^2.$$

8) Der Inhalt des Körpers =

$$\frac{r^3 \cdot (5 - 2\sqrt{2})}{17\sqrt{17}} [\tfrac{1}{3}\sqrt{(31 + 8\sqrt{2})} + 24\sqrt{(7 + 4\sqrt{2})}].$$

§ 130.

c) Berechnung des Körpers III. § 125.

1) Für diesen Körper ist $m = 3$, $n = 6$; $p = 1$, $q = 2$; $\varkappa = 60^\circ$, $\varkappa' = 120^\circ$; $M = N = 4$; also,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin.}\, 60^\circ}{\text{Sin.}\, 30^\circ}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{3},$$

$$\text{Sin.}\, \theta' = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta,$$

und daher, $$\text{Sin.}\, \theta' = \frac{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta'}{\sqrt{3}},$$

oder, da $\text{Sin.}\, \theta' = 2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta'\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\theta'$,

$$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{1}{2\sqrt{3}},\quad \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}.$$

2) $$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\, 30^\circ}{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta'} = \frac{3}{\sqrt{11}},\quad \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

3) $\alpha = 120^\circ$, $\alpha' = 60^\circ$; also,

$$\text{Sin.}\, \varphi = \frac{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\, 60^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}},$$

$$\text{Sin.}\, \varphi' = \frac{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\, 30^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

4) $$y = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{33}},\quad y' = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{11}},\quad x = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

5) $$f = \frac{2r^2\sqrt{3}}{11},\quad f' = \frac{12r^2\sqrt{3}}{11}.$$

6) Oberfläche des Körpers $= \dfrac{56r^2\sqrt{3}}{11}$.

7) Inhalt desselben $= \frac{184\, r^3}{33 \sqrt{11}}$.

§ 131.

d) Berechnung des Körpers IV, § 125.

1) Hier ist $m = 3$, $n = 8$; $p = 1$, $q = 2$; $\varkappa = 60^\circ$ $\varkappa' = 135^\circ$; $M = 8$, $N = 6$; $\text{Cos.}\ \varkappa' = \text{Cos.}\ 135^\circ = - \text{Cos.}\ 45^\circ = - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2} \varkappa'^2 - 1$, und daher $\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2} \varkappa' = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2}$, $\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \varkappa' = \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{2}$.

Man hat also,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta' = \frac{\text{Sin}\ \tfrac{1}{2} \varkappa'}{\text{Sin.}\ 30^\circ} \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta \,.\, \sqrt{(2 + \sqrt{2})},$$

$$\text{Sin.}\ \theta' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta;$$

woraus man erhält,

$$\text{Sin.}\ \theta' = \frac{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta'}{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}} = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta' \cdot \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}},$$

oder, da $\text{Sin.}\ \theta' = 2\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta'\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2} \theta'$,

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2} \theta' = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{8}},\quad \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \theta' = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{2}}{8}}.$$

2) Da $\text{Cos.}\ \frac{180^\circ}{n} = \text{Cos.}\ 22^\circ\ 30' = \text{Sin.}\ 67^\circ\ 30' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \varkappa' = \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{2}$; so ist (§ 127. 5)

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{2}}{6 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{10 + 4\sqrt{2}}{17}},$$

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{2}}{17}}.$$

3) $\alpha =$

3) $\alpha = \frac{360^\circ}{m} = 120^\circ$, $\alpha' = \frac{360^\circ}{n} = 45^\circ$, $\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\alpha' =$ $\text{Sin.}\ 22^\circ\ 30' = \text{Cos.}\ 67^\circ\ 30' = \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\alpha' = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2}$;

also,

$$\text{Sin.}\ \varphi = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\alpha} = \sqrt{\frac{28 - 16\sqrt{2}}{51}},$$

$$\text{Sin.}\ \varphi' = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\alpha'} = \sqrt{\frac{28 - 16\sqrt{2}}{17(2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{12 - 2\sqrt{2}}{17}},$$

4) $$y = r\sqrt{\frac{28 - 16\sqrt{2}}{51}},\quad y' = r\sqrt{\frac{12 - 2\sqrt{2}}{17}},$$

$$x = 2r\sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{2}}{17}}.$$

5) $$f = \frac{r^2\sqrt{3}}{17}(7 - 4\sqrt{2}),\quad f' = \frac{4r^2\sqrt{(19 - 6\sqrt{2})}}{17}$$

$$= \frac{12\sqrt{2} - 4}{17}r^2.$$

6) Oberfläche des Körp. $= \frac{56\sqrt{3} - 32\sqrt{6} + 72\sqrt{2} - 24}{17}r^2.$

7) Inhalt desselben =

$$\frac{8r^3}{17\sqrt{17}}\left[\frac{7 - 4\sqrt{2}}{3}\sqrt{(23 + 16\sqrt{2})} + (3\sqrt{2} - 1)\sqrt{(5 + 2\sqrt{2})}\right].$$

§ 132.

e) Berechnung des Körpers V. § 125.

1) Für diesen Körper ist $m = 3$, $n = 10$; $p = 1$, $q = 2$; $\alpha = 60^\circ$, $\alpha' = 144^\circ$; $M = 20$, $N = 12$. Da nun Sin. 18° als die halbe Seite des Zehenecks für den Halbmesser 1, $= \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$; so ist $\text{Sin.}\ 72^\circ = \text{Cos.}\ 18^\circ = \frac{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{4}$.

Man hat daher,

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \frac{\text{Sin.}\,72^\circ}{\text{Sin.}\,30^\circ}\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta\,.\,\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{2},$$

$$\text{Sin.}\,\theta' = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta,$$

und daher,

$$\text{Sin.}\,\theta' = \frac{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}} = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'\,.\,\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

Hieraus erhält man, da $\text{Sin.}\,\theta' = 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'$,

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40}},\quad \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \sqrt{\frac{35+\sqrt{5}}{40}}.$$

2) $$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta = \frac{\text{Cos.}\,18^\circ}{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'} = \sqrt{\frac{50+10\sqrt{5}}{70+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{85+15\sqrt{5}}{122}}$$

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta = \sqrt{\frac{37-15\sqrt{5}}{122}}.$$

3) $\alpha' = 120^\circ$, $\alpha^f = 36^\circ$; also,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta}{\text{Sin.}\,60^\circ} = \sqrt{\frac{74-30\sqrt{5}}{183}}.$$

$$\text{Sin.}\,\varphi' = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta}{\text{Sin.}\,18^\circ} = \sqrt{\frac{72-16\sqrt{5}}{61}}.$$

4) $$y = r\sqrt{\frac{74-30\sqrt{5}}{183}},\quad y' = r\sqrt{\frac{72-16\sqrt{5}}{61}},$$

$$x = 2\,r\sqrt{\frac{37-15\sqrt{5}}{122}}.$$

5) $$f = \frac{r^2\sqrt{3}}{122}\,(37-15\sqrt{5}),\quad f' = 5r^2\sqrt{\frac{2617-1117\sqrt{5}}{61}}.$$

Hieraus erhält man nun ferner,

6) Die Oberfläche des Körpers $= 20\,f + 12\,f'$.

7) Der Inhalt des Körpers =

$$\frac{1}{3\sqrt{61}}\left[20\,f\sqrt{\frac{109+30\sqrt{5}}{3}} + 12\,f'\sqrt{\frac{16\sqrt{5}-11}{61}}\right].$$

§ 133.

f) Berechnung des Körpers VI. § 125.

1) Hier ist $m = 3$, $n = 4$; $p = 2$, $q = 2$; $\varkappa = 60^\circ$, $\varkappa' = 90^\circ$; $M = 8$, $N = 6$; also,

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \frac{\text{Sin.}\,45^\circ}{\text{Sin.}\,30^\circ}\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta\,.\,\sqrt{2},$$

$$\text{Sin.}\,\theta' = \text{Sin.}\,\theta.$$

2) Man dividire die zweyte Gleichung durch die erste; dies giebt, da $\text{Sin.}\,\theta' = 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'$, $\text{Sin.}\,\theta = 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta$,

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \frac{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta}{\sqrt{2}}.$$

Man quadrire sowohl diese, als die erste Gleichung in 1, und addire sie hierauf; dies giebt, da $\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'^2 + \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'^2 = 1$,

$$1 = \frac{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta^2}{2} + 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta^2.$$

Aus dieser Gleichung erhält man, wenn $1 - \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta^2$ für $\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta^2$ gesetzt wird,

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3) Daher ist

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta = \frac{\text{Cos.}\,60^\circ}{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta = \tfrac{1}{2}.$$

4) $\alpha = 120^\circ$, $\alpha' = 90^\circ$; also,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \text{Sin.}\,\varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5) $$y = \frac{r}{\sqrt{3}},\quad y' = \frac{r}{\sqrt{2}},\quad x = r.$$

6) $f = \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}$, $f' = r^2$.

7) Oberfläche des Körpers $= r^2 (6 + 2\sqrt{3})$.

8) Inhalt desselben $= \frac{5 r^3 \sqrt{2}}{3}$.

§ 134.

g) Berechnung des Körpers VII. § 125.

1) Hier ist $m = 3$, $n = 5$; $p = 2$, $q = 2$; $\varkappa = 60^\circ$, $\varkappa' = 108^\circ$; $M = 20$, $N = 12$; also,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta' = \frac{\text{Sin } 54^\circ}{\text{Sin. } 30^\circ} \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta$$

$$\text{Sin.} \theta' = \text{Sin.} \theta;$$

Verfährt man mit diesen beyden Gleichungen wie im vorigen §, so erhält man,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.$$

2) Also $\text{Cos.} \tfrac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}}$,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

3) $\alpha = 120^\circ$, $\alpha' = 72^\circ$; also,

$$\text{Sin.} \varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}}, \quad \text{Sin.} \varphi' = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.$$

4) $y = r \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}}$, $y' = r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$,

$$x = r \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

5) $f = \frac{r^2 \sqrt{3}}{16} (6 - 2\sqrt{5})$, $f' = \frac{r^2 \sqrt{5}}{8} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$.

6) Oberfläche des Körpers =

$$\frac{5r^2\sqrt{3}}{4}(6-2\sqrt{5})+\frac{3r^2\sqrt{5}}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$$

7) Inhalt desselben $= \frac{11\sqrt{5}+5}{6}r^3$.

§ 135.

h) Berechnung des Körpers VIII. § 125, für $n = 4$.

1) Hier ist $m = 3$, $n = 4$; $p = 3$, $q = 1$; $\varkappa = 60°$, $\varkappa' = 90°$; $M = 8$, $N = 2$. Man hat also,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin } 45°}{\text{Sin. } 30°}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta\cdot\sqrt{2},$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta' = \text{Sin.}\tfrac{3}{2}\theta;$$

und daher $\text{Sin.}\tfrac{3}{2}\theta = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{2}$,

oder, da $\text{Sin.}\tfrac{3}{2}\theta' = (4\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta'^2 - 1)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta$ (§ 129. 2),

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{2})}}{2},\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{2})}}{2}.$$

2) $$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{7}},\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{4-\sqrt{2}}{7}}.$$

3) $\alpha = 120°$, $\alpha' = 90°$; also,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \sqrt{\frac{16-4\sqrt{2}}{21}},\quad \text{Sin.}\,\varphi' = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{2}}{7}}.$$

4) $$y = r\sqrt{\frac{16-4\sqrt{2}}{21}},\ y' = r\sqrt{\frac{8-2\sqrt{2}}{7}},$$

$$x = 2r\sqrt{\frac{4-\sqrt{2}}{7}}.$$

5) $$f = \frac{r^2\sqrt{3}}{7}(4-\sqrt{2}),\ f' = \frac{4r^2}{7}(4-\sqrt{2}).$$

6) Oberfläche des Körp. $= \frac{8r^2}{7}(1+\sqrt{3})(4-\sqrt{2})$.

7) Inhalt desselben =

$$\frac{8r^3(4-\sqrt{2})}{21\sqrt{7}}[\sqrt{(5+4\sqrt{2})}+\sqrt{(2\sqrt{2}-1)}]$$

$$=\frac{16r^3}{21\sqrt{7}}\sqrt{(13+16\sqrt{2})}.$$

Die Reduktion des ersten Ausdruckes auf den zweyten geschiehet auf folgende Art: Man quadrire den in den Klammern [ ] eingeschlossenen Theil, so erhält man

$$4+6\sqrt{2}+2\sqrt{(11+6\sqrt{2})}=10+8\sqrt{2},$$

weil $\sqrt{(11+6\sqrt{2})}=3+\sqrt{2}$. Dieser Faktor ist also nichts anders als $\sqrt{(10+8\sqrt{2})}$. Die weitere Verwandlung bedarf keiner näheren Erklärung.

§ 136.

i) Berechnung des Körpers IX. § 125.

1) Hier ist $m=3$, $n=4$; $p=4$, $q=1$; $\varkappa=60°$, $\varkappa'=90°$; $M=32$, $N=6$. Man hat also,

$$\text{Sin}.\tfrac{1}{2}\theta'=\frac{\text{Sin}.45°}{\text{Sin}.30°}\text{Sin}.\tfrac{1}{2}\theta=\text{Sin}.\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{2};$$

$$\text{Sin}\tfrac{1}{2}\theta'=\text{Sin}.2\theta;$$

woraus man erhält,

$$\text{Sin}.2\theta=\text{Sin}.\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{2}.$$

2) Es ist aber $\text{Sin}.\theta=2\,\text{Sin}.\tfrac{1}{2}\theta\,\text{Cos}.\tfrac{1}{2}\theta$, $\text{Cos}.\theta=2\,\text{Cos}.\tfrac{1}{2}\theta^2-1$, und daher,

$$\text{Sin}\,2\theta=2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\theta\,\text{Cos}.\tfrac{1}{2}\theta\,(2\,\text{Cos}.\tfrac{1}{2}\theta^2-1).$$

Wird dieser Werth in der letzten Gleichung in 1 substituirt, und hierauf durch $4\,\text{Sin}.\tfrac{1}{2}\theta$ dividirt, so erhält man die Gleichung vom dritten Grade,

$$\text{Cos}.\tfrac{1}{2}\theta^3-\tfrac{1}{2}\text{Cos}.\tfrac{1}{2}\theta=\frac{\sqrt{2}}{4};$$

oder, wenn man Cos. $\frac{1}{2}\theta = \frac{u}{\sqrt{2}}$ setzt, diese,

$$u^3 - u = 1.$$

Die Auflösung dieser Gleichung vermittelst der Cardanischen Formel giebt:

$$u = \sqrt[3]{\frac{9 + 2\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - 2\sqrt{69}}{18}}$$

welches demnach der einzige reelle Werth des u ist.

3) Aus diesem Werthe des u läßt sich auf die gewöhnliche, nun schon hinlänglich bekannte Weise, alles Uebrige finden, und durch bloß algebraische Ausdrücke bestimmen; die Formeln werden aber sehr verwickelt, und lassen keine bedeutende Abkürzungen zu; dies ist der Grund, warum sie hier übergangen werden.

§ 137.

k) Berechnung des Körpers K. § 125.

Hier ist $m = 3$, $n = 5$; $p = 4$, $q = 1$; $\varkappa = 60^\circ$, $k' = 108^\circ$; $M = 80$, $N = 12$. Man hat also,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin.}\, 54^\circ}{\text{Sin.}\, 30^\circ}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\theta' = \text{Sin.}\, 2\,\theta.$$

Hieraus erhält man, wenn wie im vorigen § verfahren wird, die Gleichung vom dritten Grade,

$$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\theta^3 - \tfrac{1}{2}\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{8}.$$

woraus man vermittelst der Cardanischen Formel einen reellen Werth von Cos. $\frac{1}{2}\theta$ erhält. Das Uebrige wie gewöhnlich.

Es läßt sich also auch dieser Körper durch bloß algebraische Ausdrücke berechnen.

§ 138.

l) Berechnung des Körpers XI. § 125.

1) Hier ist $m = 4$, $n = 6$; $p = 1$, $q = 2$; $\varkappa = 90°$, $\varkappa' = 120°$; $M = 6$, $N = 8$. Man hat also,

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin. } 60°}{\text{Sin. } 45°}\,\text{Sin } \tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta.$$

$$\text{Sin. } \theta' = \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta.$$

Die Division der zweyten Gleichung durch die erste giebt:

$2\,\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; also,

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

2) $\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos. } 30°}{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'} = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\eta = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

3) $\alpha = 90°$, $\alpha' = 60°$; also,

$$\text{Sin. } \varphi = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\eta}{\text{Sin. } 45°} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \; \text{Sin. } \varphi' = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\eta}{\text{Sin. } 30°} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

4) $y = \frac{r}{\sqrt{5}}$, $y' = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $x = \frac{2r}{\sqrt{10}}$.

5) $f = \frac{2r^2}{5}$, $f' = \frac{3r^2\sqrt{3}}{6}$.

6) Oberfläche des Körp. $= \frac{12r^2}{5}(1 + 2\sqrt{3})$.

7) Inhalt desselben $= \frac{32r^3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}$.

§ 139.

m) Berechnung des Körpers XIII. § 126.

1) Hier ist $m = 5$, $n = 6$; $p = 1$, $q = 2$; $\varkappa = 108°$, $\varkappa' = 120°$; $M = 12$, $N = 20$. Man hat also,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin.}\ 60^\circ}{\text{Sin.}\ 54^\circ}\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{3}.(\sqrt{5}-1)}{2}\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta.$$

$$\text{Sin.}\ \theta' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta.$$

Die Division der zweyten Gleichung durch die erste giebt,

$2\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{2}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{3}}$, woraus man erhält,

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{3}},\quad \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{(42-2\sqrt{5})}}{4\sqrt{3}}.$$

2) $$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\ 30^\circ}{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta'} = \frac{6}{\sqrt{(42-2\sqrt{5})}}.$$

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sqrt{(6-2\sqrt{5})}}{\sqrt{(42-2\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{29-9\sqrt{5}}{218}}.$$

3) $\alpha = 72^\circ$, $\alpha' = 60^\circ$; also,

$$\text{Sin.}\ \varphi = \frac{2\sqrt{(25-4\sqrt{5})}}{\sqrt{545}},\quad \text{Sin.}\ \varphi' = \frac{2\sqrt{(29-9\sqrt{5})}}{\sqrt{218}};$$

4) Also,

$$y = \frac{2r\sqrt{(25-4\sqrt{5})}}{\sqrt{545}},\quad y' = \frac{2r\sqrt{(29-9\sqrt{5})}}{\sqrt{218}},$$

$$x = \frac{2r\sqrt{(29-9\sqrt{5})}}{\sqrt{218}}.$$

5) $$f = r^2\ \frac{29-9\sqrt{5}}{218}\sqrt{(25+10\sqrt{5})},$$

$$f' = 6r^2\ \frac{29-9\sqrt{5}}{218}.\sqrt{3}.$$

6) Oberfläche des Körpers =

$$\frac{29-9\sqrt{5}}{109}\ r^2\ [6\sqrt{(25+10\sqrt{5})} + 60\sqrt{3}].$$

7) Inhalt desselben =
$$\frac{58-18\sqrt{5}}{109\sqrt{109}}[\sqrt{(2185+970\sqrt{5})}+10\sqrt{(153+54\sqrt{5})}].$$

X. Körper, welche von regulären Figuren dreyerley Art begränzt werden.

---

§ 140.

Aufg. Ein Körper mit gleichen oder symmetrischen Winkeln wird von drey Arten von regulären Vielecken begränzt; die Vielecke an sich, nebst der Anzahl derer von jeder Art, welche zur Bildung eines körperlichen Winkels erfordert werden, sind gegeben; man soll für diesen Körper die Anzahl der Ecken und Kanten, wie auch die Anzahl der Gränzflächen von jeder Art finden.

Aufl. 1) Der Körper werde von leck, meck, und neck begränzt; jeder körperliche Winkel werde von p Winkeln des ersten, q Winkeln des zweyten, und r Winkeln des dritten Vielecks gebildet.

2) Die Winkel der Vielecke sind: $\frac{2l-4}{l}90^\circ$, $\frac{2m-4}{m}90^\circ$, $\frac{2n-4}{n}90^\circ$. Die Summe der Winkel, von welchen jeder körperliche Winkel eingeschlossen wird, ist demnach = $p\frac{2l-4}{l}90^\circ+q\frac{2m-4}{m}90^\circ+r\frac{2n-4}{n}90^\circ$.

3) Es sey nun E die Anzahl der Ecken des Körpers; so muß man, um die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche desselben zu finden, den hier gefundenen Ausdruck mit E multipliciren. Die Summe der Winkel ist aber auch $= (4E - 8)\, 90^\circ$ (§ 89); man hat also die Gleichung,

$$\left[p\,\frac{2l-4}{l}\,90^\circ + q\,\frac{2m-4}{m}\,90^\circ + r\,\frac{2n-4}{n}\,90^\circ\right]E = (4E-8)\,90^\circ;$$

woraus man, wenn

$$2pmn + 2qln + 2rlm - lmn\,(p + q + r - 2) = A$$

gesetzt wird,

$$E = \frac{4\,lmn}{A}$$

erhält.

4) Die Anzahl der Winkel von jeder Art auf der Oberfläche des Körpers ist pE, qE, rE; und da l Winkel von der ersten, m Winkel von der zweyten, und n Winkel von der dritten Art ein Vieleck geben, so geben die Ausdrücke $\frac{pE}{l}$, $\frac{qE}{m}$, $\frac{rE}{n}$, die Anzahl der Vielecke von jeder Art.

5) Bezeichnet also L die Anzahl der lecke, M die Anzahl der mecke, und N die Anzahl der necke, so ist,

$$L = \frac{4\,pmn}{A},\quad M = \frac{4\,qln}{A},\quad N = \frac{4\,rlm}{A}.$$

6) Die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche des Körpers ist $= pE + qE + rE$; und daher, wenn K die Anzahl der Kanten bezeichnet, (§ 81)

$$K = \frac{p + q + r}{2}\,E.$$

§ 141.

Aufg. Man soll die Bedingungen angeben, unter

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \frac{\text{Sin.}\,72^\circ}{\text{Sin.}\,30^\circ}\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta\,.\,\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{2},$$

$$\text{Sin.}\,\theta' = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta,$$

und daher,

$$\text{Sin.}\,\theta' = \frac{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}} = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'\,.\,\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

Hieraus erhält man, da $\text{Sin.}\,\theta' = 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'$,

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40}},\quad \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta' = \sqrt{\frac{35+\sqrt{5}}{40}}.$$

2) $$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta = \frac{\text{Cos.}\,18^\circ}{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\theta'} = \sqrt{\frac{50+10\sqrt{5}}{70+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{85+15\sqrt{5}}{122}}$$

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta = \sqrt{\frac{37-15\sqrt{5}}{122}}.$$

3) $\alpha' = 120^\circ$, $\alpha'' = 36^\circ$; also,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta}{\text{Sin.}\,60^\circ} = \sqrt{\frac{74-30\sqrt{5}}{183}}.$$

$$\text{Sin.}\,\varphi' = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\eta}{\text{Sin.}\,18^\circ} = \sqrt{\frac{72-16\sqrt{5}}{61}}.$$

4) $$y = r\sqrt{\frac{74-30\sqrt{5}}{183}},\quad y' = r\sqrt{\frac{72-16\sqrt{5}}{61}},$$

$$x = 2\,r\sqrt{\frac{37-15\sqrt{5}}{122}}.$$

5) $$f = \frac{r^2\sqrt{3}}{122}\,(37-15\sqrt{5}),\quad f' = 5r^2\sqrt{\frac{2617-1117\sqrt{5}}{61}}.$$

Hieraus erhält man nun ferner,

6) Die Oberfläche des Körpers $= 20\,f + 12\,f'$.

7) Der Inhalt des Körpers =

$$\frac{1}{3\sqrt{61}}\left[20\,f\sqrt{\frac{109+30\sqrt{5}}{3}} + 12\,f'\sqrt{\frac{16\sqrt{5}-11}{61}}\right].$$

§ 133.

f) Berechnung des Körpers VI. § 125.

1) Hier ist m = 3, n = 4; p = 2, q = 2; $\varkappa = 60^\circ$, $\varkappa' = 90^\circ$; M = 8, N = 6; also,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta' = \frac{\text{Sin.}\ 45^\circ}{\text{Sin.}\ 30^\circ}\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta \cdot \sqrt{2},$$

$$\text{Sin.}\ \theta' = \text{Sin.}\ \theta.$$

2) Man dividire die zweyte Gleichung durch die erste; dies giebt, da $\text{Sin.}\ \theta' = 2\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta'\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta'$, $\text{Sin.}\ \theta = 2\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta$,

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta' = \frac{\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta}{\sqrt{2}}.$$

Man quadrire sowohl diese, als die erste Gleichung in 1, und addire sie hierauf; dies giebt, da $\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta'^2 + \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta'^2 = 1$,

$$1 = \frac{\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta^2}{2} + 2\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta^2.$$

Aus dieser Gleichung erhält man, wenn $1 - \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta^2$ für $\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta^2$ gesetzt wird,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3) Daher ist

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\eta = \frac{\text{Cos.}\ 60^\circ}{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\eta = \tfrac{1}{2}.$$

4) $\alpha = 120^\circ$, $\alpha' = 90^\circ$; also,

$$\text{Sin.}\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{Sin.}\ \varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5) $$y = \frac{r}{\sqrt{3}},\quad y' = \frac{r}{\sqrt{2}},\quad x = r.$$

6) $$f = \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}, \quad f' = r^2.$$

7) Oberfläche des Körpers $= r^2 (6 + 2\sqrt{3})$.

8) Inhalt desselben $= \dfrac{5 r^3 \sqrt{2}}{3}$.

§ 134.

g) Berechnung des Körpers VII. § 125.

1) Hier ist $m = 3$, $n = 5$; $p = 2$, $q = 2$; $\varkappa = 60^\circ$, $\varkappa' = 108^\circ$; $M = 20$, $N = 12$; also,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin}\ 54^\circ}{\text{Sin.}\ 30^\circ}\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta$$

$$\text{Sin.}\ \theta' = \text{Sin.}\ \theta;$$

Verfährt man mit diesen beyden Gleichungen wie im vorigen §, so erhält man,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

2) Also $\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}}$,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

3) $\alpha = 120^\circ$, $\alpha' = 72^\circ$; also,

$$\text{Sin.}\ \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \quad \text{Sin.}\ \varphi' = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

4) $$y = r\,\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \quad y' = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}},$$

$$x = r\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

5) $$f = \frac{r^2\sqrt{3}}{16}(6-2\sqrt{5}), \quad f' = \frac{r^2\sqrt{5}}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$$

6) Oberfläche des Körpers =

$$\frac{5r^2\sqrt{3}}{4}(6-2\sqrt{5})+\frac{3r^2\sqrt{5}}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$$

7) Inhalt desselben $= \frac{11\sqrt{5}-5}{6} r^3.$

§ 135.

h) Berechnung des Körpers VIII. § 125, für $n=4$.

1) Hier ist $m=3$, $n=4$; $p=3$, $q=1$; $\varkappa=60^\circ$, $\varkappa'=90^\circ$; $M=8$, $N=2$. Man hat also,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin } 45^\circ}{\text{Sin. } 30^\circ}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta\cdot\sqrt{2},$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta' = \text{Sin.}\tfrac{3}{2}\theta;$$

und daher

$$\text{Sin.}\tfrac{3}{2}\theta = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{2},$$

oder, da $\text{Sin.}\tfrac{3}{2}\theta' = (4\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta^2 - 1)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta$ (§ 129. 2),

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{2})}}{2},\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{2})}}{2}.$$

2) $$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{7}},\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{4-\sqrt{2}}{7}}.$$

3) $\alpha = 120^\circ$, $\alpha' = 90^\circ$; also,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \sqrt{\frac{16-4\sqrt{2}}{21}},\quad \text{Sin.}\,\varphi' = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{2}}{7}}.$$

4) $$y = r\sqrt{\frac{16-4\sqrt{2}}{21}},\ y' = r\sqrt{\frac{8-2\sqrt{2}}{7}},$$

$$x = 2r\sqrt{\frac{4-\sqrt{2}}{7}}.$$

5) $$f = \frac{r^2\sqrt{3}}{7}(4-\sqrt{2}),\ f' = \frac{4r^2}{7}(4-\sqrt{2}).$$

6) Oberfläche des Körp. $= \frac{8r^2}{7}(1+\sqrt{3})(4-\sqrt{2}).$

7) Inhalt desselben =

$$\frac{8 r^3 (4 - \sqrt{2})}{21 \sqrt{7}} [\sqrt{(5 + 4\sqrt{2})} + \sqrt{(2\sqrt{2} - 1)}]$$

$$= \frac{16 r^3}{21 \sqrt{7}} \sqrt{(13 + 16\sqrt{2})}.$$

Die Reduktion des ersten Ausdruckes auf den zweyten geschieht auf folgende Art: Man quadrire den in den Klammern [ ] eingeschlossenen Theil, so erhält man

$$4 + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{(11 + 6\sqrt{2})} = 10 + 8\sqrt{2},$$

weil $\sqrt{(11 + 6\sqrt{2})} = 3 + \sqrt{2}$. Dieser Faktor ist also nichts anders als $\sqrt{(10 + 8\sqrt{2})}$. Die weitere Verwandlung bedarf keiner näheren Erklärung.

§ 136.

i) Berechnung des Körpers IX. § 125.

1) Hier ist $m = 3$, $n = 4$; $p = 4$, $q = 1$; $\varkappa = 60°$, $\varkappa' = 90°$; $M = 32$, $N = 6$. Man hat also,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta' = \frac{\text{Sin. } 45°}{\text{Sin. } 30°} \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta . \sqrt{2};$$

$$\text{Sin} \tfrac{1}{2} \theta' = \text{Sin.} 2 \theta;$$

woraus man erhält,

$$\text{Sin.} 2 \theta = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta . \sqrt{2}.$$

2) Es ist aber $\text{Sin.} \theta = 2 \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta \text{Cos.} \tfrac{1}{2} \theta$, $\text{Cos.} \theta = 2 \text{Cos.} \tfrac{1}{2} \theta^2 - 1$, und daher,

$$\text{Sin} 2 \theta = 2 \text{Sin} \tfrac{1}{2} \theta \text{Cos.} \tfrac{1}{2} \theta (2 \text{Cos.} \tfrac{1}{2} \theta^2 - 1).$$

Wird dieser Werth in der letzten Gleichung in 1 substituirt, und hierauf durch 4 Sin. $\tfrac{1}{2} \theta$ dividirt, so erhält man die Gleichung vom dritten Grade,

$$\text{Cos.} \tfrac{1}{2} \theta^3 - \tfrac{1}{2} \text{Cos.} \tfrac{1}{2} \theta = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

oder, wenn man $\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\theta = \frac{u}{\sqrt{2}}$ setzt, diese,

$$u^3 - u = 1.$$

Die Auflösung dieser Gleichung vermittelst der Cardanischen Formel giebt:

$$u = \sqrt[3]{\frac{9 + 2\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - 2\sqrt{69}}{18}}$$

welches demnach der einzige reelle Werth des u ist.

3) Aus diesem Werthe des u läßt sich auf die gewöhnliche, nun schon hinlänglich bekannte Weise, alles Uebrige finden, und durch bloß algebraische Ausdrücke bestimmen; die Formeln werden aber sehr verwickelt, und lassen keine bedeutende Abkürzungen zu; dies ist der Grund, warum sie hier übergangen werden.

§ 137.

k) Berechnung des Körpers X. § 125.

Hier ist $m = 3$, $n = 5$; $p = 4$, $q = 1$; $\varkappa = 60^\circ$, $k' = 108^\circ$; $M = 80$, $N = 12$. Man hat also,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin.}\ 54^\circ}{\text{Sin.}\ 30^\circ}\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \text{Sin.}\ 2\theta.$$

Hieraus erhält man, wenn wie im vorigen § verfahren wird, die Gleichung vom dritten Grade,

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\theta^3 - \tfrac{1}{2}\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{8},$$

woraus man vermittelst der Cardanischen Formel einen reellen Werth von $\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\theta$ erhält. Das Uebrige wie gewöhnlich.

Es läßt sich also auch dieser Körper durch bloß algebraische Ausdrücke berechnen.

§ 138.

l) Berechnung des Körpers XI. § 125.

1) Hier ist $m = 4$, $n = 6$; $p = 1$, $q = 2$; $\alpha = 90°$, $\alpha' = 120°$; $M = 6$, $N = 8$. Man hat also,

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin. } 60°}{\text{Sin. } 45°} \text{Sin } \tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta.$$

$$\text{Sin. } \theta' = \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta.$$

Die Division der zweyten Gleichung durch die erste giebt:

$2 \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; also,

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

2) $\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos. } 30°}{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'} = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\eta = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

3) $\alpha = 90°$, $\alpha' = 60°$; also,

$$\text{Sin. } \varphi = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\eta}{\text{Sin. } 45°} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \text{Sin. } \varphi' = \frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\eta}{\text{Sin. } 30°} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

4) $y = \frac{r}{\sqrt{5}}$, $y' = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $x = \frac{2r}{\sqrt{10}}$.

5) $f = \frac{2r^2}{5}$, $f' = \frac{3r^2\sqrt{3}}{6}$.

6) Oberfläche des Körp. $= \frac{12r^2}{5}(1 + 2\sqrt{3})$.

7) Inhalt desselben $= \frac{32r^3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}$.

§ 139.

m) Berechnung des Körpers XIII. § 126.

1) Hier ist $m = 5$, $n = 6$; $p = 1$, $q = 2$; $\alpha = 108°$, $\alpha' = 120°$; $M = 12$, $N = 20$. Man hat also,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\text{Sin.}\ 60^\circ}{\text{Sin.}\ 54^\circ}\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{3}.(\sqrt{5}-1)}{2}\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta.$$

$$\text{Sin.}\ \theta' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta.$$

Die Division der zweyten Gleichung durch die erste giebt,

$2\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{2}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{3}}$, woraus man erhält,

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{3}},\quad \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{(42-2\sqrt{5})}}{4\sqrt{3}}.$$

2) $\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Cos.}\ 30^\circ}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\theta'} = \frac{6}{\sqrt{(42-2\sqrt{5})}}.$

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sqrt{(6-2\sqrt{5})}}{\sqrt{(42-2\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{29-9\sqrt{5}}{218}}.$$

3) $\alpha = 72^\circ$, $\alpha' = 60^\circ$; also,

$$\text{Sin.}\ \varphi = \frac{2\sqrt{(25-4\sqrt{5})}}{\sqrt{545}},\quad \text{Sin.}\ \varphi' = \frac{2\sqrt{(29-9\sqrt{5})}}{\sqrt{218}};$$

4) Also,

$$y = \frac{2r\sqrt{(25-4\sqrt{5})}}{\sqrt{545}},\quad y' = \frac{2r\sqrt{(29-9\sqrt{5})}}{\sqrt{218}},$$

$$x = \frac{2r\sqrt{(29-9\sqrt{5})}}{\sqrt{218}}.$$

5) $f = r^2\ \frac{29-9\sqrt{5}}{218}\sqrt{(25+10\sqrt{5})},$

$$f' = 6r^2\ \frac{29-9\sqrt{5}}{218}.\sqrt{3}.$$

6) Oberfläche des Körpers =

$$\frac{29-9\sqrt{5}}{109} r^2\ [6\sqrt{(25+10\sqrt{5})} + 60\sqrt{3}].$$

7) Inhalt desselben =

$$\frac{58 - 18\sqrt{5}}{109\sqrt{109}}[\sqrt{(2185 + 970\sqrt{5})} + 10\sqrt{(153 + 54\sqrt{5})}].$$

X. Körper, welche von regulären Figuren dreyerley Art begränzt werden.

---

§ 140.

Aufg. Ein Körper mit gleichen oder symmetrischen Winkeln wird von drey Arten von regulären Vielecken begränzt; die Vielecke an sich, nebst der Anzahl derer von jeder Art, welche zur Bildung eines körperlichen Winkels erfordert werden, sind gegeben; man soll für diesen Körper die Anzahl der Ecken und Kanten, wie auch die Anzahl der Gränzflächen von jeder Art finden.

Aufl. 1) Der Körper werde von lecke, mecke, und necke begränzt; jeder körperliche Winkel werde von p Winkeln des ersten, q Winkeln des zweyten, und r Winkeln des dritten Vielecks gebildet.

2) Die Winkel der Vielecke sind: $\frac{2l-4}{l}90^\circ$, $\frac{2m-4}{m}90^\circ$, $\frac{2n-4}{n}90^\circ$. Die Summe der Winkel, von welchen jeder körperliche Winkel eingeschlossen wird, ist demnach =
$p\frac{2l-4}{l}90^\circ + q\frac{2m-4}{m}90^\circ + r\frac{2n-4}{n}90^\circ$.

3) Es sey nun E die Anzahl der Ecken des Körpers; so muß man, um die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche desselben zu finden, den hier gefundenen Ausdruck mit E multipliciren. Die Summe der Winkel ist aber auch $= (4E - 8)\,90^\circ$ (§ 89); man hat also die Gleichung,

$$\left[p\frac{2l-4}{l}90^\circ + q\frac{2m-4}{m}90^\circ + r\frac{2n-4}{n}90^\circ\right]E = (4E-8)\,90^\circ;$$

woraus man, wenn

$$2pmn + 2qln + 2rlm - lmn\,(p+q+r-2) = A$$

gesetzt wird,

$$E = \frac{4\,lmn}{A}$$

erhält.

4) Die Anzahl der Winkel von jeder Art auf der Oberfläche des Körpers ist pE, qE, rE; und da l Winkel von der ersten, m Winkel von der zweyten, und n Winkel von der dritten Art ein Vieleck geben, so geben die Ausdrücke $\frac{pE}{l}$, $\frac{qE}{m}$, $\frac{rE}{n}$, die Anzahl der Vielecke von jeder Art.

5) Bezeichnet also L die Anzahl der lecke, M die Anzahl der mecke, und N die Anzahl der necke, so ist,

$$L = \frac{4\,pmn}{A},\quad M = \frac{4\,qln}{A},\quad N = \frac{4\,rlm}{A}.$$

6) Die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche des Körpers ist $= pE + qE + rE$; und daher, wenn K die Anzahl der Kanten bezeichnet, (§ 81)

$$K = \frac{p+q+r}{2}E.$$

§ 141.

Aufg. Man soll die Bedingungen angeben, unter

welchen ein Körper von dreyerley regulären Vielecken begränzt werden kann, wenn alle seine Winkel gleich oder symmetrisch seyn sollen.

Aufl. 1) Da der Körper von drey Arten von Vielecken begränzt werden soll, so muß auch jeder körperliche Winkel von eben so vielen Arten von Polygonwinkeln begränzt werden.

2 Die größten von den Vielecken, welche einen körperlichen Winkel begränzen, können nicht weniger als Fünfecke seyn, weil die beyden anderen Arten nicht weniger als Quadrate und Dreyecke seyn können.

3) Von den größten Vielecken kann sich nur eines in jedem körperlichen Winkel finden. Ist nämlich das größte Vieleck ein Fünfeck, so beträgt jeder seiner Winkel 108°, und ein solcher Winkel kann nicht mehr als einmal in jedem körperlichen Winkel vorhanden seyn; denn wären ihrer zwey vorhanden, so würde, da doch nicht weniger als ein Winkel von 90° und einer von 60° hinzukommen kann, die Summe der Winkel schon dadurch größer als 360° werden; um so weniger kann also ein Vieleck von mehr als 5 Seiten, wenn es das größte seyn soll, mehr als einmal in jedem körperlichen Winkel vorhanden seyn.

4) Die kleinsten von den Vielecken, welche einen körperlichen Winkel begränzen, können höchstens Vierecke seyn; denn wären es auch nur Fünfecke, und wäre auch nur ein solches in jedem körperlichen Winkel vorhanden, so könnte zu ihm nichts anders als ein Sechseck und ein Siebeneck hinzukommen, weil sonst die Summe der Winkel größer als 360° seyn würde; diese Verbindung eines Fünfecks, Sechsecks und Siebenecks zu einem körperlichen Winkel kann aber wegen § 122 Zus. nicht statt finden. Die kleinste Art von Vielecken, wel-

che einen körperlichen Winkel begränzen, kann also nur aus Dreyecken oder Vierecken bestehen.

5) Das kleinste von den Vielecken, welche einen körperlichen Winkel begränzen, kann in demselben höchstens zweymal vorhanden seyn: denn wenn es auch nur ein Dreyeck wäre, so würden drey Winkel desselben schon 180° ausmachen, und es müßten also die übrigen Winkel weniger als 180° betragen, welches unmöglich ist.

6) Das Vieleck der mittleren Art kann ebenfalls höchstens nur zweymal vorhanden seyn; denn ist es auch nur ein Quadrat, so würden drey Winkel desselben schon allein 270° betragen.

7) Sind nun zuerst die Vielecke der kleinsten Art, welche einen körperlichen Winkel einschließen, Dreyecke, so muß es unter den übrigen zwey gleiche Vielecke geben (§ 122 Zus.); und da dies bey den Vielecken der größten Art nicht statt finden kann (3), so muß es zwey gleiche Vielecke von der mittlern Art geben, und diese können nichts anders als Quadrate seyn.

8) Es können aber zwey Quadrate nur mit einem Dreyecke verbunden werden; denn für zwey Dreyecke wäre die Summe der Winkel schon 300°, und es würde also für die dritte Art nichts übrig bleiben. Ein Dreyeck und zwey Quadrate lassen aber für die dritte Art nichts anders als ein Fünfeck zu.

9) Es kann also einen Körper geben, worin jeder körperliche Winkel von einem Dreyecke, zwey Quadraten und einem Fünfecke begränzt wird; ob es wirklich einen solchen giebt, müssen die Formeln des vorigen §'s zeigen. Man setze also $l = 3$, $m = 4$, $n = 5$, $p = 1$, $q = 2$, $r = 1$; dies giebt, $A = 4$, und demnach,

$E = 60$, $L = 20$, $M = 30$, $N = 12$, $K = 120$.

Da hier für E, L, M, N, K, lauter endliche ganze und positive Zahlen gefunden worden, so ist der Körper möglich. Es giebt also nur einen Körper für die Voraussetzung, daß die Vielecke der kleinsten Art Dreyecke seyen.

10) Nimmt man ferner an, die Vielecke der kleinsten Art wären Quadrate; so ist erstlich klar, daß der körperliche Winkel nicht von zwey derselben begränzt werden kann; denn wenn auch nur ein Fünfeck und ein Sechseck hinzukömmt, so beträgt die Summe der Flächenwinkel schon mehr als 360°.

11) Es bleibt also nur die Voraussetzung übrig, daß die Vielecke der kleinsten Art Quadrate seyen, und daß jeder körperliche Winkel nur von einem derselben begränzt werde. Bey dieser Voraussetzung kann in jedem körperlichen Winkel nur ein Vieleck der mittlern Art vorhanden seyn; und dieses kann entweder ein Fünfeck, oder ein Sechseck, oder ein Siebeneck, oder ein Achteck seyn: höhere Vielecke können nicht zugelassen werden, weil sonst die Summe aller Flächenwinkel größer als 360° wäre, das Vieleck der dritten Art sey welches es wolle. Hiervon ist aber das Fünfeck und Siebeneck wegen § 122 Zus. ausgeschlossen; es bleibt also nur das Sechseck und Achteck übrig. Hiervon muß aber wieder das Achteck ausgeschlossen werden, weil sonst das Vieleck der größten Art kleiner als ein Achteck seyn müßte.

12) Zu einem Quadrate und einem Sechsecke kann, als Vieleck von der größten Art, nur ein 7, 8, 9, 10, oder 11eck hinzukommen. Hiervon sind aber das 7, 9, und 11eck, wegen § 122 Zus. ausgeschlossen. Es bleibt also nur das Achteck und Zeheneck übrig.

13) Setzt man zuerst $l = 4$, $m = 6$, $n = 8$, $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$, so erhält man $A = 16$, und

$E = 48$, $L = 12$, $M = 8$, $N = 6$, $K = 72$.

Setzt man aber $n = 10$, und behält die vorigen Werthe von l, m, bey, so findet man $A = 8$, und daher,

$E = 120$, $L = 30$, $M = 20$, $N = 12$, $K = 180$.

§ 142.

Es sind also nur drey Körper mit dreyerley regulären Figuren und gleichen oder symmetrischen körperlichen Winkeln möglich, und diese sind:

I. Ein Körper, welcher von 20 Dreyecken, 30 Quadraten und 12 Fünfecken begränzt wird. Er hat 60 Ecken und 120 Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von 60°, zwey von 90°, und einem von 108° begränzt. Das Netz zeigt Fig. 58; es wird zweymal gemacht, und das zweytemal werden die mit Diagonalen durchzogenen Quadrate weggelassen.

II. Ein Körper, welcher von 12 Quadraten, 8 Sechsecken und 6 Achtecken begränzt wird. Er hat 48 Ecken und 72 Kanten. Jeder körperliche Winkel wird von einem ebenen Winkel von 90°, einem von 120°, und einem von 135° eingeschlossen. Das Netz zeigt Fig. 59.

III. Ein Körper, welcher von 30 Quadraten, 20 Sechsecken und 12 Zehnecken begränzt wird. Er hat 120 Ecken und 180 Kanten. Jeder Winkel wird von einem Winkel von 90°, einem von 120°, und einem von 144° eingeschlossen. Das Netz zeigt Fig. 60; es wird zweymal gemacht, und das zweytemal werden die mit Diagonalen durchzogenen Quadrate weggelassen.

§ 143.

Aufg. Ein körperlicher Winkel, welcher von p Flächenwinkeln, jeder $= x$, von q Flächenwinkeln, jeder $= x'$, und von r Flächenwinkeln, jeder $= x''$, einge-

schlossen wird, ist innerhalb einer Kugel von einem gegebenen Halbmesser = r so gesetzt worden, daß seine Spitze die Kugelfläche berührt, und alle seine Schenkel einander gleich werden: man soll die jenen ebenen Winkeln $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, korrespondirenden sphärischen Winkel, wie auch die Größe der gleichen Schenkel finden.

Aufl. 1) Denkt man sich durch jeden Schenkel des körperlichen Winkels Bogen größter Kreise gelegt, so entstehen rings um den Endpunkt, p + q + r sphärische Winkel dreyerley Art, die durch θ, θ', θ'', bezeichnet werden sollen, so daß θ dem Winkel $\varkappa$, θ' dem Winkel $\varkappa'$, und θ'' dem Winkel $\varkappa''$ korrespondirt. Denkt man sich ferner die Endpunkte der gleichen Schenkel des körperlichen Winkels durch gerade Linien verbunden, so entstehen p + q + r ebene gleichschenkelige Dreyecke, denen eben so viele sphärische auf der Kugelfläche entsprechen.

2) Bezeichnet man die gleichen Schenkel der erwähnten sphärischen Dreyecke durch η, so ist nach § 57,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varkappa = \text{Cos.}\tfrac{1}{2}\eta\ \text{Sin}\tfrac{1}{2}\theta,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varkappa' = \text{Cos}\tfrac{1}{2}\eta\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta';$$
$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varkappa'' = \text{Cos.}\tfrac{1}{2}\eta\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta''.$$

3) Aus diesen Gleichungen erhält man durch die Eliminirung des Cos. $\tfrac{1}{2}\eta$ die folgenden;

$$\text{A}) \ldots \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varkappa\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta' = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varkappa'\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta,$$
$$\text{B}) \ldots \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varkappa\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta'' = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varkappa''\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta.$$

4) Da ferner die Summe aller sphärischen Winkel rings um den Eckpunkt = 360° seyn muß, so hat man auch noch die Gleichung,

$$\text{C}) \ldots p\theta + q\theta' + r\theta'' = 360°.$$

5) Man hat also zwischen den Winkeln θ, θ', θ'', drey Glei-

Gleichungen, von deren Auflösung die Bestimmung derselben abhängt. Man erhält aber aus der Gleichung G,

$$\tfrac{1}{2} q \theta' + \tfrac{1}{2} r \theta'' = 180^\circ - \tfrac{1}{2} p \theta,$$

und dieses giebt,

$$\text{Sin.} (\tfrac{1}{2} q \theta' + \tfrac{1}{2} r \theta'') = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} p \theta,$$

oder,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} q \theta' \text{ Cos.} \tfrac{1}{2} r \theta'' + \text{Cos.} \tfrac{1}{2} q \theta'' \text{ Sin.} \tfrac{1}{2} r \theta'' = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} p \theta.$$

6) Hier müßte man nun, wenn man die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit auflösen wollte, die Sinusse und Kosinusse der vielfachen Bogen $\tfrac{1}{2} q \theta' = q \times \tfrac{1}{2} \theta'$, $\tfrac{1}{2} r \theta'' = r \times \tfrac{1}{2} \theta''$, $\tfrac{1}{2} p \theta = r \times \tfrac{1}{2} \theta$, durch die Sinusse ihrer einfachen $\tfrac{1}{2} \theta'$, $\tfrac{1}{2} \theta''$, $\tfrac{1}{2} \theta$, ausdrücken, und hierauf für Sin. $\tfrac{1}{2} \theta'$, Sin. $\tfrac{1}{2} \theta''$, ihre Werthe aus den Gleichungen A, B, substituiren. Man würde alsdann eine Gleichung erhalten, worin bloß Potenzen von Sin. $\tfrac{1}{2} \theta$ und bekannte Größen vorkommen, und es würde also bloß auf die Auflösung einer algebraischen Gleichung ankommen. So aufgelöst gehört die Aufgabe in die Goniometrie, wie schon § 126. 5 bey einer ähnlichen Gelegenheit bemerkt worden; hier wird es hinreichen, die Anwendung nur auf einige besondere Fälle zu machen.

7) Ist einer von den Winkeln θ, θ', θ'', gefunden, so erhält man auch η aus einer von den drey Gleichungen in 2; diese geben nämlich,

$$\text{Cos.} \tfrac{1}{2} \eta = \frac{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \varkappa}{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta}, \quad \text{Cos.} \tfrac{1}{2} \eta = \frac{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \varkappa'}{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta'},$$

$$\text{Cos.} \tfrac{1}{2} \eta = \frac{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \varkappa''}{\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta''}.$$

8) Ist η gefunden, so hat man auch die Schenkel des körperlichen Winkels; wird nämlich dieser $= x$ gesetzt, so ist,

$$x = 2 r \text{ Sin.} \tfrac{1}{2} \eta.$$

§ 144.

Aufg. Der Halbmesser einer Kugel, in welcher die in § 142 aufgeführten Körper beschrieben sind, ist gegeben: man soll allgemeine Ausdrücke für die Grösse ihrer Kanten, ihrer Gränzflächen, ihrer Oberfläche, ihres kubischen Inhalts, und für den Halbmesser des um jede Gränzfläche beschriebenen Kreises finden.

Aufl. 1) Wenn das, was im vorigen § von den in der Kugel gesetzten körperlichen Winkeln gesagt worden, auf die Ecken des zu berechnenden Körpers angewendet wird, und die Buchstaben $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, θ, θ', θ'', die ihnen daselbst beygelegten Bedeutungen behalten; so hat man die drey letzteren Winkel aus den drey ersteren vermittelst der Gleichungen,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa'\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta'' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa''\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}q\theta'\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}r\theta'' + \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}q\theta'\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}r\theta'' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}p\theta.$$

2) Ist einer von den Winkeln θ, θ', θ'', gefunden worden, so hat man auch η, vermittelst einer von den drey Gleichungen, (§ 143. 7)

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa}{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta},\quad \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa'}{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta'},$$

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa''}{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta''}.$$

3) Die Kante des Körpers sey $= x$, (sie ist nichts anders als das, was im vorigen § der Schenkel des körperlichen Winkels war), so hat man,

$$x = 2r\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\eta.$$

4) Ein Perpendikel aus dem Mittelpunkte der Kugel auf eines der, den Körper begränzenden, Vielecke herabgelassen, gehet durch den Mittelpunkt desselben, und trifft verlängert den

Pol des um ihn beschriebenen Kreises. Die Bogen zwischen diesem Pole und den Ecken des geradlinigen, oder, welches das Nämliche ist, den Ecken des sphärischen Vielecks, sollen respektive für das leck, meck, und neck, durch φ, φ', φ'', bezeichnet werden, und die Winkel, welche jede zwey zunächst liegenden rings um den Pol einschliessen, durch α, α', α'', so hat man, $\alpha = \frac{360^\circ}{l}$, $\alpha' = \frac{360^\circ}{m}$, $\alpha'' = \frac{360^\circ}{n}$,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha}, \quad \text{Sin.}\,\varphi' = \frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha'},$$

$$\text{Sin.}\,\varphi'' = \frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\eta}{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha''}\ (\S\ 57.\ 4).$$

5) Die Halbmesser der um das leck, meck und neck beschriebenen Kreise sind die Sinusse der Bogen φ, φ', φ''. Bezeichnet man also diese Halbmesser durch y, y', y'', so hat man,

$$y = r\,\text{Sin.}\,\varphi, \quad y' = r\,\text{Sin.}\,\varphi', \quad y'' = r\,\text{Sin.}\,\varphi''.$$

6) Bezeichnet man ferner den respektiven Flächeninhalt des lecks, mecks und necks durch f, f', f'', so hat man,

$$f = \tfrac{1}{2} l x \sqrt{(y^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}, \quad f' = \tfrac{1}{2} m x \sqrt{(y'^2 - \tfrac{1}{4}x^2)},$$
$$f'' = \tfrac{1}{2} n x \sqrt{(y''^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}.$$

7) Hieraus erhält man ferner die Oberfläche des Körpers $= Lf + Mf' + Nf''$.

8) Den kubischen Inhalt desselben $=$
$$\tfrac{1}{3} Lf \sqrt{(r^2 - y^2)} + \tfrac{1}{3} Mf' \sqrt{(r^2 - y'^2)} + \tfrac{1}{3} Nf'' \sqrt{(r^2 - y''^2)}.$$

Es bleibt nun nur noch übrig, diese Formeln auf die Berechnung der Körper § 142 anzuwenden.

§ 145.

a) Berechnung des Körpers I. § 144.

1) Für diesen Körper ist $l = 3$, $m = 4$, $n = 5$; $p = 1$, $q = 2$, $r = 1$; $\varkappa = 60°$, $\varkappa' = 90°$, $\varkappa'' = 108°$; $L = 20$, $M = 30$, $N = 12$. Man hat also aus 1 § 144 die folgenden drey Gleichungen:

$$\text{Sin. } 30° \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta' = \text{Sin. } 45° \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta,$$
$$\text{Sin. } 30° \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'' = \text{Sin. } 54° \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta,$$
$$\text{Sin. } \theta' \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\theta'' + \text{Cos. } \theta' \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'' = \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta.$$

2) Aus den beyden ersten erhält man,

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta' = \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta . \sqrt{2}, \quad \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'' = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta.$$

Der dritten Gleichung kann man diese Form geben,

$$2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta' \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\theta' \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\theta'' + (1 - 2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'^2) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta''$$
$$= \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta,$$

welche sich, wenn für Sin. $\tfrac{1}{2}\theta'$, Sin. $\tfrac{1}{2}\theta''$, ihre so eben gefundenen Werthe substituirt, und durch Sin. $\tfrac{1}{2}\theta$ dividirt wird, in die folgende verwandelt:

$$2\sqrt{2} . \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\theta' \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\theta'' = (1+\sqrt{5}) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

3) Man quadrire, was sich auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens befindet, und setze $1 - \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'^2$, $1 - \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta''^2$ für Cos. $\tfrac{1}{2}\theta'^2$, Cos. $\tfrac{1}{2}\theta''^2$, hierdurch entstehet die Gleichung,

$$8(1-\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'^2)(1-\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta''^2) = (6+2\sqrt{5}) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta^4 +$$
$$(\sqrt{5}-1) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta^2 + \frac{7-3\sqrt{5}}{8};$$

oder, wenn man für Sin. $\tfrac{1}{2}\theta'$, Sin. $\tfrac{1}{2}\theta''$ ihre Werthe aus 2

setzt, und das, was sich aufhebt, auf beyden Seiten weggelassen wird, die Gleichung vom zweyten Grade,

$$8-(19+\sqrt{5})\ \text{Sin}\tfrac{1}{2}\theta^2 = (\sqrt{5}-1)\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta^2 + \frac{7-3\sqrt{5}}{8};$$

und diese giebt,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{249-15\sqrt{5}}{608}}.$$

4) Hieraus erhält man nun,

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varkappa}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta} = \sqrt{\frac{152}{249-15\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{37848-1880\sqrt{5}}{60876}},$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{23028+1880\sqrt{5}}{60876}} = \sqrt{\frac{5757-470\sqrt{5}}{15219}}.$$

5) Setzt man den für Sin. ½ η gefundenen Ausdruck, der Kürze wegen, = a, so ist (§ 144. 5)

$$\text{Sin.}\,\varphi = 2a,\ \text{Sin.}\,\varphi' = a\sqrt{2},\ \text{Sin.}\,\varphi'' = a\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}.$$

6) $y = 2ar,\quad y' = ar\sqrt{2},\quad y'' = ar\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}},$

$$x = 2ar.$$

7) $f = 3a^2r^2\sqrt{3},\quad f' = 4a^2r^2,$

$$f'' = a^2r^2\sqrt{(25+10\sqrt{5})}.$$

8) Oberfläche des Körpers =

$$12a^2r^2[10+5\sqrt{3}+\sqrt{(25+10\sqrt{5})}].$$

9) Inhalt desselben =

$$\frac{20}{3}fr\sqrt{(1-4a^2)}+10f'r\sqrt{(1-2a^2)}+4f''r\sqrt{\left[1-\frac{a^2(10+2\sqrt{5})}{5}\right]}.$$

§ 146.

b) Berechnung des Körpers II. § 142.

1) Für diesen Körper ist $l = 4$, $m = 6$, $n = 8$; $p = q = r = 1$; $x = 90°$, $x' = 120°$, $x'' = 135°$; $L = 12$, $M = 8$, $N = 6$. Man hat also, da

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} x' = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} x'' = \text{Sin.}\, 67° \, 30' = \text{Cos.}\, 22° \, 30' = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2},$$

die folgenden drey Gleichungen (§ 144. 1):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sin}\, \tfrac{1}{2} \theta'' = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta,$$

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta' \, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} \theta'' + \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} \theta' \, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta'' = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta.$$

2) Aus den ersten beyden Gleichungen erhält man

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta' = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta, \quad \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta'' = \frac{\sqrt{(4+2\sqrt{2})}}{2} \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta,$$

oder, wenn man, der Kürze wegen, $\frac{\sqrt{6}}{2} = e$, $\frac{\sqrt{(4+2\sqrt{2})}}{2} = e'$ setzt,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta' = e \, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta, \quad \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta'' = e' \, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta,$$

$$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} \theta' = \sqrt{(1 - e^2 \, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta^2)}, \quad \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} \theta'' = \sqrt{(1 - e'^2 \, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta^2)}.$$

Werden diese Werthe in der dritten Gleichung in 1 substituirt, und durch Sin. $\tfrac{1}{2} \theta$ dividirt, so erhält man,

$$e \sqrt{(1 - e'^2 \, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta^2)} + e' \sqrt{(1 - e^2 \, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta^2)} = 1.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta = \sqrt{\left[1 - \frac{(e^2 + e'^2 - 1)^2}{4e^2 e'^2}\right]}.$$

Setzt man nun wieder für e, e', ihre Werthe, so erhält man nach der gehörigen Reduktion,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\theta = \sqrt{\frac{14 - \sqrt{2}}{24}}.$$

3) Ferner,

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\eta = \sqrt{\frac{84 + 6\sqrt{2}}{97}}, \quad \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\eta = \sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{2}}{97}}.$$

4) Da $\alpha = 90^\circ$, $\alpha' = 60^\circ$, $\alpha'' = 45^\circ$, so ist,

$$\text{Sin.}\ \varphi = \sqrt{\frac{26 - 12\sqrt{2}}{97}}, \quad \text{Sin.}\ \varphi' = 2\sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{2}}{97}},$$

$$\text{Sin.}\ \varphi'' = \sqrt{\frac{28 + 2\sqrt{2}}{97}}.$$

5) Man hat also,

$$y = r\sqrt{\frac{26 - 12\sqrt{2}}{97}}, \quad y' = 2r\sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{2}}{97}},$$

$$y'' = r\sqrt{\frac{28 + 2\sqrt{2}}{97}}, \quad x = 2r\sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{2}}{97}}.$$

6)
$$f = \frac{52 - 24\sqrt{2}}{97}\,r^2, \quad f' = \frac{13 - 6\sqrt{2}}{97}\,6r^2\sqrt{3},$$

$$f'' = 8\,\frac{\sqrt{(99 + 14\sqrt{2})}}{97}\,r^2 = \frac{8 + 56\sqrt{2}}{97}\,r^2$$

7) Die Oberfläche des Körpers =

$$12f + 8f' + 6f''.$$

8) Inhalt desselben =

$$4fr\sqrt{\frac{71 + 12\sqrt{2}}{97}} + \frac{8}{3}\,f'r\sqrt{\frac{45 + 24\sqrt{2}}{97}} + 2f''r\sqrt{\frac{69 - 2\sqrt{2}}{97}}.$$

§ 147.

c) Berechnung des Körpers III. § 142.

1) Für diesen Körper ist $l = 4$, $m = 6$, $n = 10$; $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$; $\varkappa = 90^\circ$, $\varkappa' = 120^\circ$, $\varkappa'' = 144^\circ$; $L = 30$, $M = 20$, $N = 12$. Man hat also, wenn für $\text{Sin.} \frac{1}{2} \varkappa$, $\text{Sin.} \frac{1}{2} \varkappa'$, $\text{Sin.} \frac{1}{2} \varkappa''$, in § 144. 1, ihre Werthe gesetzt werden, die folgenden drey Gleichungen:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta'' = \frac{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{4} \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta,$$

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta' \text{Cos.} \tfrac{1}{2} \theta'' + \text{Cos.} \tfrac{1}{2} \theta' \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta'' = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta.$$

2) Wenn man, der Kürze wegen, $\frac{\sqrt{6}}{2} = e$, $\frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})}}{2} = e'$ setzt, so findet man aus den beyden ersten Gleichungen,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta' = e \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta, \quad \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta'' = e' \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta,$$

$$\text{Cos} \tfrac{1}{2} \theta' = \sqrt{(1 - e^2 \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta^2)}, \quad \text{Cos.} \tfrac{1}{2} \theta'' = \sqrt{(1 - e'^2 \text{Sin} \tfrac{1}{2} \theta^2)}.$$

Werden diese Werthe in der dritten Gleichung substituirt und durch $\text{Sin.} \frac{1}{2} \theta$ dividirt, so erhält man,

$$e \sqrt{(1 - e'^2 \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta^2)} + e' \sqrt{(1 - e^2 \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta^2)} = 1,$$

und hieraus,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta = \sqrt{\left[1 - \frac{(e^2 + e'^2 - 1)^2}{4 e^2 e'^2}\right]};$$

und wenn wieder für e, e', ihre Werthe gesetzt werden,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{35 - 2\sqrt{5}}{60}}.$$

3) Also,

$$\text{Cos.} \tfrac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{210 + 12\sqrt{5}}{241}}, \quad \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}}.$$

4) $\alpha = 90^\circ$, $\alpha' = 60^\circ$, $\alpha'' = 36^\circ$; also,

$$\mathrm{Sin.}\ \varphi = \sqrt{\frac{62 - 24\sqrt{5}}{241}},\quad \mathrm{Sin.}\ \varphi' = 2\sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}},$$

$$\mathrm{Sin.}\ \varphi'' = \sqrt{\frac{66 - 10\sqrt{5}}{241}}.$$

5) Demnach ist,

$$y = r\sqrt{\frac{62 - 24\sqrt{5}}{241}},\quad y' = 2r\sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}},$$

$$y'' = r\sqrt{\frac{66 - 10\sqrt{5}}{241}},\quad x = 2r\sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}}.$$

6) $$f = \frac{(31 - 12\sqrt{5})}{241} 4r^2,\quad f' = \frac{31 - 12\sqrt{5}}{241} 6r^2\sqrt{3},$$

$$f'' = \frac{10r^2}{241}\sqrt{(965 - 358\sqrt{5})}.$$

7) Die Oberfläche des Körpers $= 30\,f + 20\,f' + 12\,f''$.

8) Der Inhalt desselben =

$$10\,fr\sqrt{\frac{179 + 24\sqrt{5}}{241}} + \frac{20\,f'r}{3}\sqrt{\frac{117 + 48\sqrt{5}}{241}}$$

$$+ 4\,f''r\sqrt{\frac{175 + 10\sqrt{5}}{241}}.$$

schlossen wird, ist innerhalb einer Kugel von einem gegebenen Halbmesser $= r$ so gesetzt worden, daß seine Spitze die Kugelfläche berührt, und alle seine Schenkel einander gleich werden: man soll die jenen ebenen Winkeln $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, korrespondirenden sphärischen Winkel, wie auch die Größe der gleichen Schenkel finden.

Aufl. 1) Denkt man sich durch jeden Schenkel des körperlichen Winkels Bogen größter Kreise gelegt, so entstehen rings um den Endpunkt, $p + q + r$ sphärische Winkel dreyerley Art, die durch θ, θ', θ'', bezeichnet werden sollen, so daß θ dem Winkel $\varkappa$, θ' dem Winkel $\varkappa'$, und θ'' dem Winkel $\varkappa''$ korrespondirt. Denkt man sich ferner die Endpunkte der gleichen Schenkel des körperlichen Winkels durch gerade Linien verbunden, so entstehen $p + q + r$ ebene gleichschenkelige Dreyecke, denen eben so viele sphärische auf der Kugelfläche entsprechen.

2) Bezeichnet man die gleichen Schenkel der erwähnten sphärischen Dreyecke durch η, so ist nach § 57,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \varkappa = \text{Cos.} \tfrac{1}{2} \eta \text{ Sin} \tfrac{1}{2} \theta, \quad \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \varkappa' = \text{Cos} \tfrac{1}{2} \eta \text{ Sin.} \tfrac{1}{2} \theta',$$
$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} \varkappa'' = \text{Cos.} \tfrac{1}{2} \eta \text{ Sin.} \tfrac{1}{2} \theta''.$$

3) Aus diesen Gleichungen erhält man durch die Eliminirung des $\text{Cos.} \tfrac{1}{2} \eta$ die folgenden;

$$\text{A)} \ldots \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \varkappa \text{ Sin.} \tfrac{1}{2} \theta' = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \varkappa' \text{ Sin.} \tfrac{1}{2} \theta,$$
$$\text{B)} \ldots \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \varkappa \text{ Sin.} \tfrac{1}{2} \theta'' = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} \varkappa'' \text{ Sin.} \tfrac{1}{2} \theta.$$

4) Da ferner die Summe aller sphärischen Winkel rings um den Eckpunkt $= 360°$ seyn muß, so hat man auch noch die Gleichung,

$$\text{C)} \ldots p\theta + q\theta' + r\theta'' = 360°.$$

5) Man hat also zwischen den Winkeln θ, θ', θ'', drey

Glei-

Gleichungen, von deren Auflösung die Bestimmung derselben abhängt. Man erhält aber aus der Gleichung G,

$$\tfrac{1}{2}q\theta' + \tfrac{1}{2}r\theta'' = 180^\circ - \tfrac{1}{2}p\theta,$$

und dieses giebt,

$$\text{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}q\theta' + \tfrac{1}{2}r\theta'') = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}p\theta,$$

oder,

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}q\theta'\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}r\theta'' + \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}q\theta''\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}r\theta'' = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}p\theta.$$

6) Hier müßte man nun, wenn man die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit auflösen wollte, die Sinusse und Kosinusse der vielfachen Bogen $\tfrac{1}{2}q\theta' = q \times \tfrac{1}{2}\theta'$, $\tfrac{1}{2}r\theta'' = r \times \tfrac{1}{2}\theta''$, $\tfrac{1}{2}p\theta = r \times \tfrac{1}{2}\theta$, durch die Sinusse ihrer einfachen $\tfrac{1}{2}\theta'$, $\tfrac{1}{2}\theta''$, $\tfrac{1}{2}\theta$, ausdrücken, und hierauf für Sin. $\tfrac{1}{2}\theta'$, Sin. $\tfrac{1}{2}\theta''$, ihre Werthe aus den Gleichungen A, B, substituiren. Man würde alsdann eine Gleichung erhalten, worin bloß Potenzen von Sin. $\tfrac{1}{2}\theta$ und bekannte Größen vorkommen, und es würde also bloß auf die Auflösung einer algebraischen Gleichung ankommen. So aufgelöst gehört die Aufgabe in die Goniometrie, wie schon § 126. 5 bey einer ähnlichen Gelegenheit bemerkt worden; hier wird es hinreichen, die Anwendung nur auf einige besondere Fälle zu machen.

7) Ist einer von den Winkeln θ, θ', θ'', gefunden, so erhält man auch η aus einer von den drey Gleichungen in 2; diese geben nämlich,

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x}{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\theta},\quad \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x'}{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\theta'},$$

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x''}{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\theta''}.$$

8) Ist η gefunden, so hat man auch die Schenkel des körperlichen Winkels; wird nämlich dieser $= x$ gesetzt, so ist,

$$x = 2r\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\eta.$$

§ 144.

Aufg. Der Halbmesser einer Kugel, in welcher die in § 142 aufgeführten Körper beschrieben sind, ist gegeben: man soll allgemeine Ausdrücke für die Größe ihrer Kanten, ihrer Gränzflächen, ihrer Oberfläche, ihres kubischen Inhalts, und für den Halbmesser des um jede Gränzfläche beschriebenen Kreises finden.

Aufl. 1) Wenn das, was im vorigen § von den in der Kugel gesetzten körperlichen Winkeln gesagt worden, auf die Ecken des zu berechnenden Körpers angewendet wird, und die Buchstaben $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, θ, θ', θ'', die ihnen daselbst beygelegten Bedeutungen behalten; so hat man die drey letzteren Winkel aus den drey ersteren vermittelst der Gleichungen,

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa'\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta'' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa''\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}q\theta'\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}r\theta'' + \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}q\theta'\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}r\theta'' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}p\theta.$$

2) Ist einer von den Winkeln θ, θ', θ'', gefunden worden, so hat man auch η, vermittelst einer von den drey Gleichungen, (§ 143. 7)

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa}{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta},\quad \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa'}{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta'},$$

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\varkappa''}{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\theta''}.$$

3) Die Kante des Körpers sey $= x$, (sie ist nichts anders als das, was im vorigen § der Schenkel des körperlichen Winkels war), so hat man,

$$x = 2r\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\eta.$$

4) Ein Perpendikel aus dem Mittelpunkte der Kugel auf eines der, den Körper begränzenden, Vielecke herabgelassen, gehet durch den Mittelpunkt desselben, und trifft verlängert den

Pol des um ihn beschriebenen Kreises. Die Bogen zwischen diesem Pole und den Ecken des geradlinigen, oder, welches das Nämliche ist, den Ecken des sphärischen Vielecks, sollen respektive für das leck, meck, und neck, durch φ, φ', φ'', bezeichnet werden, und die Winkel, welche jede zwey zunächst liegenden rings um den Pol einschließen, durch α, α', α'', so hat man, $\alpha = \frac{360^\circ}{l}$, $\alpha' = \frac{360^\circ}{m}$, $\alpha'' = \frac{360^\circ}{n}$,

$$\text{Sin. } \varphi = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2} \eta}{\text{Sin. } \frac{1}{2} \alpha}, \quad \text{Sin. } \varphi' = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2} \eta}{\text{Sin. } \frac{1}{2} \alpha'},$$

$$\text{Sin. } \varphi'' = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2} \eta}{\text{Sin. } \frac{1}{2} \alpha''} \text{ (§ 57. 4).}$$

5) Die Halbmesser der um das leck, meck und neck beschriebenen Kreise sind die Sinusse der Bogen φ, φ', φ''. Bezeichnet man also diese Halbmesser durch y, y', y'', so hat man,

$$y = r \text{ Sin. } \varphi, \quad y' = r \text{ Sin. } \varphi', \quad y'' = r \text{ Sin. } \varphi''.$$

6) Bezeichnet man ferner den respektiven Flächeninhalt des lecks, mecks und necks durch f, f′, f″, so hat man,

$$f = \tfrac{1}{2} lx \sqrt{(y^2 - \tfrac{1}{4} x^2)}, \quad f' = \tfrac{1}{2} mx \sqrt{(y'^2 - \tfrac{1}{4} x^2)},$$
$$f'' = \tfrac{1}{2} nx \sqrt{(y''^2 - \tfrac{1}{4} x^2)}.$$

7) Hieraus erhält man ferner die Oberfläche des Körpers $= Lf + Mf' + Nf''$.

8) Den kubischen Inhalt desselben $=$
$$\tfrac{1}{3} Lf \sqrt{(r^2 - y^2)} + \tfrac{1}{3} Mf' \sqrt{(r^2 - y'^2)} + \tfrac{1}{3} Nf'' \sqrt{(r^2 - y''^2)}.$$

Es bleibt nun nur noch übrig, diese Formeln auf die Berechnung der Körper § 142 anzuwenden.

§ 145.

a) Berechnung des Körpers I. § 144.

1) Für diesen Körper ist $l = 3$, $m = 4$, $n = 5$; $p = 1$, $q = 2$, $r = 1$; $\varkappa = 60^\circ$, $\varkappa' = 90^\circ$, $\varkappa'' = 108^\circ$; $L = 20$, $M = 30$, $N = 12$. Man hat also aus 1 § 144 die folgenden drey Gleichungen:

$$\text{Sin. } 30^\circ \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta' = \text{Sin. } 45^\circ \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta,$$
$$\text{Sin. } 36^\circ \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'' = \text{Sin. } 54^\circ \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta,$$
$$\text{Sin. } \theta' \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\theta'' + \text{Cos. } \theta' \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'' = \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta.$$

2) Aus den beyden ersten erhält man,

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta' = \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta \,.\, \sqrt{2}, \quad \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'' = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta.$$

Der dritten Gleichung kann man diese Form geben,

$$2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta' \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\theta' \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\theta'' + (1 - 2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'^2) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'' = \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta,$$

welche sich, wenn für $\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'$, $\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta''$, ihre so eben gefundenen Werthe substituirt, und durch $\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta$ dividirt wird, in die folgende verwandelt:

$$2\sqrt{2} \,.\, \text{Cos. } \tfrac{1}{2}\theta' \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\theta'' = (1+\sqrt{5}) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

3) Man quadrire, was sich auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens befindet, und setze $1 - \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'^2$, $1 - \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta''^2$ für $\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\theta'^2$, $\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\theta''^2$, hierdurch entstehet die Gleichung,

$$8(1 - \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'^2)(1 - \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta''^2) = (6 + 2\sqrt{5}) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta^4 + (\sqrt{5} - 1) \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\theta^2 + \frac{7 - 3\sqrt{5}}{8};$$

oder, wenn man für $\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta'$, $\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\theta''$ ihre Werthe aus 2

setzt, und das, was sich aufhebt, auf beyden Seiten weggelassen wird, die Gleichung vom zweyten Grade,

$$8-(19+\sqrt{5})\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\theta^2 = (\sqrt{5}-1)\,\mathrm{Sin}.\,\tfrac{1}{2}\theta^2 + \frac{7-3\sqrt{5}}{8};$$

und diese giebt,

$$\mathrm{Sin}.\,\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{249-15\sqrt{5}}{608}}.$$

4) Hieraus erhält man nun,

$$\mathrm{Cos}.\,\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\mathrm{Sin}.\,\tfrac{1}{2}x}{\mathrm{Sin}.\,\tfrac{1}{2}\theta} = \sqrt{\frac{152}{249-15\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{37848-1880\sqrt{5}}{60876}},$$

$$\mathrm{Sin}.\,\tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{23028+1880\sqrt{5}}{60876}} = \sqrt{\frac{5757-470\sqrt{5}}{15219}}.$$

5) Setzt man den für $\mathrm{Sin}.\,\tfrac{1}{2}\eta$ gefundenen Ausdruck, der Kürze wegen, $= a$, so ist (§ 144. 5)

$$\mathrm{Sin}.\,\varphi = 2a,\quad \mathrm{Sin}.\,\varphi' = a\sqrt{2},\quad \mathrm{Sin}.\,\varphi'' = a\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}.$$

6) $y = 2ar,\quad y' = ar\sqrt{2},\quad y'' = ar\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}},$

$$x = 2ar.$$

7) $f = 3a^2r^2\sqrt{3},\quad f' = 4a^2r^2,$

$$f'' = a^2r^2\sqrt{(25+10\sqrt{5})}.$$

8) Oberfläche des Körpers $=$

$$12a^2r^2\,[10+5\sqrt{3}+\sqrt{(25+10\sqrt{5})}].$$

9) Inhalt desselben $=$

$$\frac{20}{3}fr\sqrt{(1-4a^2)}+10f'r\sqrt{(1-2a^2)}+4f''r\sqrt{\left[1-\frac{a^2(10+2\sqrt{5})}{5}\right]}.$$

§ 146.

b) Berechnung des Körpers II. § 142.

1) Für diesen Körper ist $l = 4$, $m = 6$, $n = 8$; $p = q = r = 1$; $x = 90^\circ$, $x' = 120^\circ$, $x'' = 135^\circ$; $L = 12$, $M = 8$, $N = 6$. Man hat also, da

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} x' = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} x'' = \text{Sin.}\, 67^\circ\, 30' = \text{Cos.}\, 22^\circ\, 30' = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2},$$

die folgenden drey Gleichungen (§ 144. 1):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta' = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, \text{Sin}\, \tfrac{1}{2} \theta'' = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta,$$

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta'\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} \theta'' + \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} \theta'\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta'' = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta.$$

2) Aus den ersten beyden Gleichungen erhält man

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta' = \frac{\sqrt{6}}{2}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta, \quad \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta'' = \frac{\sqrt{(4+2\sqrt{2})}}{2}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta,$$

oder, wenn man, der Kürze wegen, $\frac{\sqrt{6}}{2} = e$, $\frac{\sqrt{(4+2\sqrt{2})}}{2} = e'$ setzt,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta' = e\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta, \quad \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta'' = e'\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta,$$

$$\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} \theta' = \sqrt{(1 - e^2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta^2)}, \quad \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} \theta'' = \sqrt{(1 - e'^2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta^2)}.$$

Werden diese Werthe in der dritten Gleichung in 1 substituirt, und durch Sin. $\tfrac{1}{2} \theta$ dividirt, so erhält man,

$$e\sqrt{(1 - e'^2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta^2)} + e'\sqrt{(1 - e^2\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} \theta^2)} = 1.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt,

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} \rho = \sqrt{\left[1 - \frac{(e^2 + e'^2 - 1)^2}{4 e^2 e'^2}\right]}.$$

Setzt man nun wieder für e, e′, ihre Werthe, so erhält man nach der gehörigen Reduktion,

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} \rho = \sqrt{\frac{14 - \sqrt{2}}{24}}.$$

3) Ferner,

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{84 + 6\sqrt{2}}{97}}, \quad \text{Sin. } \tfrac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{2}}{97}}.$$

4) Da $\alpha = 90^\circ$, $\alpha' = 60^\circ$, $\alpha'' = 45^\circ$, so ist,

$$\text{Sin. } \varphi = \sqrt{\frac{26 - 12\sqrt{2}}{97}}, \quad \text{Sin. } \varphi' = 2\sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{2}}{97}},$$

$$\text{Sin. } \varphi'' = \sqrt{\frac{28 + 2\sqrt{2}}{97}}.$$

5) Man hat also,

$$y = r\sqrt{\frac{26 - 12\sqrt{2}}{97}}, \quad y' = 2r\sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{2}}{97}},$$

$$y'' = r\sqrt{\frac{28 + 2\sqrt{2}}{97}}, \quad x = 2r\sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{2}}{97}}.$$

6) $$f = \frac{52 - 24\sqrt{2}}{97} r^2, \quad f' = \frac{13 - 6\sqrt{2}}{97} 6r^2\sqrt{3},$$

$$f'' = 8\frac{\sqrt{(99 + 14\sqrt{2})}}{97} r^2 = \frac{8 + 56\sqrt{2}}{97} r^2$$

7) Die Oberfläche des Körpers =

$$12f + 8f' + 6f''.$$

8) Inhalt desselben =

$$4fr\sqrt{\frac{71 + 12\sqrt{2}}{97}} + \frac{8}{3} f'r\sqrt{\frac{45 + 24\sqrt{2}}{97}} + 2f''r\sqrt{\frac{69 - 2\sqrt{2}}{97}}.$$

§ 147.

e) Berechnung des Körpers III. § 142.

1) Für diesen Körper ist $l = 4$, $m = 6$, $n = 10$; $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$; $\varkappa = 90^\circ$, $\varkappa' = 120^\circ$, $\varkappa'' = 144^\circ$; $L = 30$, $M = 20$, $N = 12$. Man hat also, wenn für Sin. $\frac{1}{2}\varkappa$, Sin. $\frac{1}{2}\varkappa'$, Sin. $\frac{1}{2}\varkappa''$, in § 144. 1, ihre Werthe gesetzt werden, die folgenden drey Gleichungen:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta'' = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4} \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta' \text{Cos.} \tfrac{1}{2}\theta'' + \text{Cos.} \tfrac{1}{2}\theta' \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta'' = \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta.$$

2) Wenn man, der Kürze wegen, $\frac{\sqrt{6}}{2} = e$, $\frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})}}{2} = e'$ setzt, so findet man aus den beyden ersten Gleichungen,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta' = e \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta, \quad \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta'' = e' \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta,$$
$$\text{Cos} \tfrac{1}{2}\theta' = \sqrt{(1 - e^2 \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta^2)}, \quad \text{Cos.} \tfrac{1}{2}\theta'' = \sqrt{(1 - e'^2 \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta^2)}.$$

Werden diese Werthe in der dritten Gleichung substituirt und durch Sin. $\frac{1}{2}\theta$ dividirt, so erhält man,

$$e\sqrt{(1 - e'^2 \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta^2)} + e'\sqrt{(1 - e^2 \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta^2)} = 1,$$

und hieraus,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\left[1 - \frac{(e^2 + e'^2 - 1)^2}{4 e^2 e'^2}\right]};$$

und wenn wieder für e, e', ihre Werthe gesetzt werden,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{35 - 2\sqrt{5}}{60}}.$$

3) Also,

$$\text{Cos.} \tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{210 + 12\sqrt{5}}{241}}, \quad \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}}.$$

4) $\alpha = 90^\circ$, $\alpha' = 60^\circ$, $\alpha'' = 36^\circ$; also,

$$\text{Sin. } \varphi = \sqrt{\frac{62 - 24\sqrt{5}}{241}}, \quad \text{Sin. } \varphi' = 2\sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}},$$

$$\text{Sin. } \varphi'' = \sqrt{\frac{66 - 10\sqrt{5}}{241}}.$$

5) Demnach ist,

$$y = r\sqrt{\frac{62 - 24\sqrt{5}}{241}}, \quad y' = 2r\sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}},$$

$$y'' = r\sqrt{\frac{66 - 10\sqrt{5}}{241}}, \quad x = 2r\sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}}.$$

6) $$f = \frac{(31 - 12\sqrt{5})}{241} 4r^2, \quad f' = \frac{31 - 12\sqrt{5}}{241} 6r^2\sqrt{3},$$

$$f'' = \frac{10r^2}{241}\sqrt{(965 - 358\sqrt{5})}.$$

7) Die Oberfläche des Körpers $= 30f + 20f' + 12f''$.

8) Der Inhalt desselben =

$$10fr\sqrt{\frac{179 + 24\sqrt{5}}{241}} + \frac{20f'r}{3}\sqrt{\frac{117 + 48\sqrt{5}}{241}}$$

$$+ 4f''r\sqrt{\frac{175 + 10\sqrt{5}}{241}}.$$

XI. Körper, welche von lauter Rhomben begränzt werden.

---

§ 148.

In den drey vorhergehenden Abschnitten haben wir uns mit der Berechnung solcher Körper beschäftigt, welche von lauter regulären Figuren begränzt werden, und zwar: 1) mit den eigentlich sogenannten regulären Körpern, d. h. solchen, welche nur von regulären Figuren einer Art eingeschlossen werden; hierauf 2) mit denen, welche von zweyerley regulären Figuren, und endlich 3) mit denen, welche von dreyerley regulären Figuren eingeschlossen werden. Wir haben gesehen, daß es, wenn die Prismen und die Körper § 125 VIII. nicht mit gerechnet werden, in allem nur 18 so begränzte Körper gebe, nämlich, 5 von der ersten Art, 10 von der zweyten, und 3 von der dritten Art. Jetzt wende ich mich zur Untersuchung und Berechnung solcher Körper, welche von lauter Rhomben eingeschlossen werden, zu welcher Klasse das in § 96 und § 97 betrachtete Rhomboeder gehört; und zwar werde ich mich, um diesen Untersuchungen nicht mehr Platz einzuräumen, als ihnen in Hinsicht auf ihre Wichtigkeit zukommt, bloß auf diejenigen einschränken, welche von lauter gleichen und ähnlichen Rhomben eingeschlossen, und deren körperliche Winkel von bloß stumpfen, oder bloß spitzen Winkeln gebildet werden. Diese Körper lassen sich aber nicht mehr, wie die von regulären Figuren begränzten, innerhalb einer Kugel so setzen, daß alle ihre Ecken in der Fläche derselben zu liegen kommen, weil es keinen Punkt geben kann, der von den vier Winkelspitzen eines Rhomben gleich weit entfernt wäre. In-

dessen lassen sich, wie sogleich gezeigt werden soll, innerhalb dieser Körper solche Kugeln beschreiben, deren Oberflächen die rhombischen Flächen des Körpers berühren, durch deren Halbmesser alsdann sowohl die Kanten, als die Oberfläche und der Inhalt dieser Körper ausgedrückt werden können.

§ 149.

Aufg. Man soll alle mögliche Fälle angeben, in welchen ein Körper von lauter gleichen und ähnlichen Rhomben eingeschlossen werden kann, jedoch unter der Einschränkung, daß zur Bildung einer Ecke nur einerley Winkel gebraucht werden, nämlich entweder die spitzen, oder die stumpfen Winkel der Rhomben.

Aufl. 1) Da nicht mehr als drey stumpfe Winkel zur Bildung einer Ecke mit einander verbunden werden können, so kann man hiervon ausgehen, um die verschiedenen möglichen Fälle zu bestimmen. Es seyen ABCD, ADEF, ABGF, (Fig. 61) drey rhombische Gränzflächen, welche bey A mit ihren stumpfen Winkeln, BAD, DAF, FAB, zusammen stoßen. Die Punkte B, C, D, E, F, G, bezeichnen alsdann eben so viele Spitzen anderer körperlichen Winkel, von denen die bey C, E, G, dem bey A gleich und ähnlich sind; die übrigen B, D, F, aber aus spitzen Winkeln zusammen gesetzt werden müssen.

2) Es können aber bey B zu den beyden spitzen Winkeln ABC, ABG, nicht weniger als zwey andere gleiche Winkel kommen. Man setze daher zuerst an B die beyden Rhomben IBGH, IBCK, an, so daß um diesen Punkt die vier gleichen spitzen Winkel ABG, ABC, CBI, IBG, liegen.

3) Denkt man sich nun die größeren Diagonalen der Rhomben BF, FD, DB, gezogen, so entstehet eine gleichseitige Pyramide, deren Grundfläche das gleichseitige Dreyeck BDF und

deren Spitze A ist. Denkt man sich ferner die kleinern Diagonalen AG, GI, IC, CA, gezogen, so entstehet eine andere gleichseitige Pyramide, die ihre Spitze in B hat, und deren Grundfläche das Quadrat AGIC ist. Beyde Pyramiden gehören also zu denen § 110.

4) Es bezeichne ψ die Neigungswinkel der Rhomben BADC, BAFG, also auch den von jeden zwey anderen an einander stoßenden Gränzflächen; ferner γ den spitzen Winkel der Rhomben.

5) Man hat alsdann aus § 110. 5 für die dreyeckige Pyramide ABDF, $n = 3$, $\theta = \psi$, $\mu = 180^\circ - \gamma$, und daher,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\psi = \frac{\text{Sin. } 30^\circ}{\text{Cos. } (90^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma)} = \frac{1}{2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\gamma}.$$

Für die vierseitige Pyramide BAGIC, ist $n = 4$, $\theta = \psi$, $\mu = \gamma$, und daher,

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\psi = \frac{\text{Sin. } 45^\circ}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \text{Cos. } \tfrac{1}{2}\gamma}.$$

6) Setzt man diese beyden Werthe von Sin. $\tfrac{1}{2}\psi$ einander gleich, so erhält man,

$$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \text{Cos. } \tfrac{1}{2}\gamma} = \frac{1}{2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\gamma};$$

mithin,

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ also } \gamma = 70^\circ\, 31'\, 44'';$$

und hieraus ferner, da

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{Tang. } \tfrac{1}{2}\gamma}{\text{Sec. } \tfrac{1}{2}\gamma} = \frac{\text{Tang. } \tfrac{1}{2}\gamma}{\sqrt{(1 + \text{Tang. } \tfrac{1}{2}\gamma^2)}},$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ also } \psi = 120^\circ.$$

7) Für diese Zusammensetzung ist demnach der spitze Win-

kel des Rhomben = 70° 31′ 44″, also der stumpfe = 109° 28′ 16″, und der Neigungswinkel der Gränzflächen = 120°.

8) Jetzt will ich annehmen, der körperliche Winkel bey B werde von fünf spitzen Winkeln der Rhomben gebildet; alsdann hat man anstatt der vierseitigen Pyramide in 5 eine fünfseitige. Für diese ist nun im § 110, n = 5, $\phi = \psi$, $\mu = \gamma$; also,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\psi = \frac{\text{Sin.}\, 54^\circ}{\text{Cos.}\, \frac{1}{2}\gamma} = \frac{1+\sqrt{5}}{4\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\gamma}.$$

Da nun für die dreyseitige Pyramide, (5)

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\psi = \frac{1}{2\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}\gamma},$$

so hat man,

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\gamma} = \frac{1}{2\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}\gamma},$$

und folglich,

$$\text{Tang.}\, \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{Tang.}\, \gamma = \frac{2\, \text{Tang.}\, \frac{1}{2}\gamma}{1 - \text{Tang.}\, \frac{1}{2}\gamma^2} = 2.$$

Hieraus erhält man den spitzen Winkel des Rhomben = 63° 26′ 6″, und daher den stumpfen = 116° 33′ 54″

9) Aus $\text{Tang.}\, \frac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ findet man

$$\frac{1}{\text{Sin.}\, \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{2},$$

und hieraus ferner,

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\psi = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4} = \text{Sin.}\, 72^\circ.$$

Demnach ist ψ oder der Neigungswinkel der Gränzflächen $= 144°$.

10) Nimmt man an, daß sich um B sechs spitze Winkel befinden, so ist für die hieraus entstehende sechsseitige Pyramide

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi = \frac{\text{Sin.}\,60°}{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma}.$$

Wird diese Gleichung mit der, $\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi = \frac{1}{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma}$ verbunden, so erhält man $\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, und hieraus $\gamma = 60°$. Alsdann ist aber der stumpfe Winkel des Rhomben $= 120°$. Da nun drey solche Winkel keine Ecke bilden können: so ist dieser Fall nicht zulässig.

11) Im Allgemeinen hat man für die nseitige Pyramide

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi = \frac{\text{Sin.}\,\frac{(n-2)}{n}\,90°}{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma}.$$

Da nun auch $\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi = \frac{1}{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma}$, so hat man,

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma = \frac{1}{2\,\text{Sin.}\,\frac{(n-2)\,90°}{n}}.$$

Hieraus ergiebt sich, daß für ein größeres n der spitze Winkel des Rhomben kleiner, und folglich der stumpfe Winkel größer wird. Da nun schon für $n = 6$ der stumpfe Winkel zu groß ist, so ist er es um so mehr für $n > 6$.

12) Es giebt also nur zweyerley Rhomben, von denen ein Körper unter den, in der Aufgabe angegebenen Bedingungen, eingeschlossen werden kann. Die folgende Aufgabe wird uns die hieraus entstehenden zwey Körper näher kennen lehren.

*

§ 150.

Aufg. Die Anzahl der Gränzflächen, Kanten und Ecken von jeder Art, für die beyden Körper des vorigen §'s zu finden.

Aufl. 1) Da ein Rhombus zwey stumpfe und zwey spitze Winkel hat; so ist die Anzahl der stumpfen Winkel auf der Oberfläche eines von Rhomben begränzten Körpers gerade so groß als die Anzahl der spitzen Winkel. Bezeichnet demnach E' die Anzahl der Ecken, welche von den stumpfen Winkeln, und E'' die Anzahl der Ecken, welche von den spitzen Winkeln gebildet werden; so muß für den ersten Körper des vorigen §'s, $3E' = 4E''$, und für den zweyten Körper $3E' = 5E''$ seyn.

2) Es bezeichne nun E die sämmtliche Anzahl der Ecken; so ist auch $E' + E'' = E$. Man hat demnach für den ersten Körper die beyden Gleichungen:

$$E' + E'' = E, \quad 3E' = 4E'';$$

woraus man $E' = \frac{4}{7}E$, $E'' = \frac{3}{7}E$ erhält. Hieraus folgt, daß sowohl die Anzahl der stumpfen, als der spitzen Winkel $= \frac{12}{7}E$ ist.

3) Da nun die Summe eines spitzen und eines stumpfen Winkels eines Rhomben = 2 Rechten, und die Summe aller Winkel auf der Oberfläche des Körpers $= 4E - 8$ Rechten (§ 89); so hat man die Gleichung:

$$\frac{24}{7}E = 4E - 8$$

woraus man $E = 14$ erhält. Demnach ist $E' = \frac{4}{7}E = 8$, $E'' = \frac{3}{7}E = 6$; ferner die Anzahl der stumpfen, oder der spitzen Winkel $= \frac{12}{7}E = 24$. Da nun jeder Rhombus 2 stumpfe und 2 spitze Winkel enthält; so ist die Anzahl dieser

Rhomben $= \frac{24}{2} = 12$, und daher die Anzahl der Kanten $=$ $\frac{12 \cdot 4}{2} = 24$.

4) Für den zweyten Körper hat man die beyden Gleichungen,

$$E' + E'' = E, \quad 3E' = 5E'',$$

woraus man $E' = \frac{5}{8}E$, $E'' = \frac{3}{8}E$ erhält. Hiernach ist sowohl die Anzahl der stumpfen, als die der spitzen Winkel $= \frac{15}{8}E$. Man hat also die Gleichung

$$\frac{30}{8}E = 4E - 8,$$

und diese giebt $E = 32$, $E' = \frac{5}{8}E = 20$, $E'' = \frac{3}{8}E = 12$. Demnach ist die Anzahl der stumpfen, oder der spitzen Winkel $= \frac{15}{8}E = 60$; die Anzahl der Rhomben $= \frac{60}{2} = 30$, und daher die Anzahl der Kanten $= \frac{30 \cdot 4}{2} = 60$.

§ 151.

Aus § 149, 150, ergeben sich nun die folgenden zwey Körper:

I. Ein Körper, welcher von 12 gleichen und ähnlichen Rhomben begränzt wird. Er hat 24 Kanten und 14 Ecken, deren 8 von drey stumpfen, und 6 von vier spitzen Winkeln des Rhomben gebildet werden. Der spitze Winkel eines jeden Rhomben ist $= 70^\circ\ 31'\ 44''$, der stumpfe $= 109^\circ\ 28'\ 16''$, der Neigungswinkel seiner Flächen $= 120^\circ$. Man kann diesen Körper ein Rhomboidal-Dodekaeder nennen. (M. s. Fig. 62.)

II. Ein

II. Ein Körper, welcher von 30 gleichen und ähnlichen Rhomben begränzt wird. Er hat 60 Kanten und 32 Ecken, deren 20 von drey stumpfen, und 12 von fünf spitzen Winkeln der Rhomben gebildet werden. Der spitze Winkel eines jeden dieser Rhomben ist = 63° 26′ 6″, der stumpfe = 116° 33′ 54″, der Neigungswinkel derselben = 144°. Man kann ihn ein Rhomboidal-Triakontaeder nennen. (Fig. 63 zeigt diesen Körper zur Hälfte.)

§ 152.

Aufg. Aus den Mittelpunkten zweyer an einander gränzenden, zu einem der im vorigen § erwähnten Körpern gehörigen Rhomben, sind Perpendikel auf den Ebenen derselben errichtet: man soll den Punkt bestimmen, wo sich, wenn es möglich ist, diese Perpendikel schneiden.

Aufl. 1) Es seyen ABCD, CDEF (Fig. 64) zwey in CD an einander gränzende Rhomben; AC, BD, und CE, DF, ihre Diagonalen, also m, p, ihre Mittelpunkte. Aus m ist mq auf ABCD, und aus p, pq auf CDEF perpendikulär errichtet: man soll den Punkt q finden, wo diese Perpendikel, wenn es möglich ist, zusammen stoßen.

2) Daß sie aber zusammen stoßen müssen, kann so bewiesen werden. Man ziehe aus m und p auf CD die Perpendikel mn, pn, welche sich nothwendig in einem Punkte dieser Linie vereinigen werden, weil die Rhomben ähnlich und gleich sind. Demnach liegen die Linien mn, pn, in einer auf CD perpendikulären Ebene mnp, und in dieser Ebene liegen auch die Perpendikel mM, pP; denn da mM auf ABCD, und pP auf CDEF, folglich auch die Ebene Mmn auf ABCD, und die Ebene Ppn auf CDEF perpendikulär ist, so ist auch die Linie CD, sowohl auf der Ebene Mmn, als auf der Ebene Ppn perpendikulär, und daher machen diese beyden Ebenen nur eine

einzige aus, welche keine andere als die Ebene pmn ist. Da ferner die Winkel Mmn, Ppn, mnp, zusammen weniger als 4 Rechte betragen, so müssen die Linien mM, pP, hinlänglich verlängert in einen Punkt q zusammen treffen.

3) In den Dreyecken mnq, pnq, ist mn = np, nq gemeinschaftlich und der Winkel mnq = npq = R, also mq = pq, mnq = pnq = $\frac{1}{2}\psi$, wenn ψ den Neigungswinkel der Rhomben bezeichnet.

4) Es sey der spitze Winkel des Rhomben = y, die Sei-te desselben = a; alsdann ist mn = $\frac{1}{2}$ a Sin. y. Man hat also in dem rechtwinkligen Dreyecke qmn, mq = mn . Tang. $\frac{1}{2}\psi$ = $\frac{1}{2}$ a Sin. y Tang. $\frac{1}{2}\psi$.

5) Setzt man daher mq = pq = x, so ist,

$$x = \tfrac{1}{2} a \text{ Sin. } y \text{ Tang. } \tfrac{1}{2}\psi.$$

Aus dieser Formel läßt sich der Werth von x, und somit auch der Punkt q finden; denn man darf nur aus dem Mittelpunkte eines der beyden Rhomben ein Perpendikel errichten, und dasselbe so groß machen, als der gefundene Werth angiebt.

6) Wendet man diese Formel auf das Rhomboidal-Dodekaeder an, so hat man aus § 149. 6, Tang. $\frac{1}{2} y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, Sin. $\frac{1}{2}\psi = \frac{\sqrt{5}}{2}$, und hieraus ferner durch eine leichte Rechnung, Sin. $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, Tang. $\frac{1}{2}\psi = \sqrt{3}$, und daher für diesen Körper,

$$x = a\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

7) Für das Rhomboidal-Triakontaeder hat man aus § 149. 8, Tang. $y = 2$, und aus § 149. 9, Sin. $\frac{1}{2}\psi = \frac{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{4}$. Hieraus erhält man Sin. $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$, Tang. $\frac{1}{2}\psi = \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$ und daher,

$$x = a\sqrt{(1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5})}.$$

Zus. Da für jede zwey an einander gränzende Rhomben eines und desselben Körpers, wegen der Gleichheit der Neigungswinkel seiner Gränzflächen, und der Gleichheit und Aehnlichkeit dieser letzteren, das x einerley Werth erhält, so folgt, daß sich alle aus den Mittelpunkten der Gränzflächen errichteten Perpendikel in einem einzigen Punkt vereinigen, welcher von allen Gränzflächen gleich weit entfernt ist, und welcher daher der Mittelpunkt einer in dem Körper beschriebenen Kugel ist. Bezeichnet man daher den Halbmesser der eingeschriebenen Kugel durch r, so hat man für das Dodekaeder $r = a\sqrt{\tfrac{2}{3}}$, und für das Triakontaeder $r = a\sqrt{(1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5})}$.

§ 153.

Aufg. Die Kante, den Inhalt einer jeden Gränzfläche, die Oberfläche und den kubischen Inhalt, sowohl des rhombischen Dodekaeders als des Triakontaeders, durch den Halbmesser der eingeschriebenen Kugel auszudrücken.

Aufl. 1) Für das Dodekaeder. Für diesen Körper ist die Kante $a = \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (§ 152 Zus.). Hieraus erhält man den Inhalt einer jeden Gränzfläche $= a^2 \,\text{Sin.}\, y = r^2\sqrt{2}$, (§ 152. 6), und daher die Oberfläche des Körpers $= 12r^2\sqrt{2}$. Denkt man sich ferner den ganzen Körper in lauter Pyramiden getheilt, deren jede eines der Rhomben zur Grundfläche, den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze, und den Halbmesser derselben zur Höhe hat: so ist der Inhalt einer jeden solchen Pyramide $= \tfrac{1}{3}r^3\sqrt{2}$, und folglich der Inhalt des ganzen Körpers $= 4r^3\sqrt{2}$.

2) Für das Triakontaeder. Hier ist die Kante

$a = \frac{r}{\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}} = r\sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}$; der Flächeninhalt eines jeden Rhomben $= a^2 \text{ Sin. } \gamma = 2r^2(\sqrt{5} - 2)$; die Oberfläche des Körpers $= 60r^2(\sqrt{5} - 2)$; der kubische Inhalt desselben $= 20r^3(\sqrt{5} - 2)$.

XII. Polyedrometrische Aufgaben.

§ 154.

Hülfssatz.

Aufg. ABCDE..., abcde..., (Fig. 65.), seyen zwey beliebige Vielecke, welche einen Winkel A gemeinschaftlich haben, und deren Seiten nach ihrer Folge, so wie sie die korrespondirenden grossen und kleinen Buchstaben angeben, einander parallel sind; aus den Punkten c, d, e ꝛc. sind nach den gleichnamigen Winkelpunkten C, D, E, ꝛc. die Linien cC, dD, eE, ꝛc. gezogen; ferner aus den nämlichen Punkten, die Linie cc′ der bB, dd′ der cC, ee′ der dD, ꝛc. parallel. Ist nun n die Anzahl der Seiten eines jeden der beyden Vielecke, so entstehen hierdurch n — 2 Parallelogramme, Bbcc′, Ccdd′, Ddee′, Eeff′, u. s. w., und eben so viele Dreyecke, Ccc′, Ddd′, Eee′, Fff′ u. s. w. Es wird nun gefordert, den Inhalt eines jeden von diesen Parallelogrammen und Dreyecken durch die Seiten und Winkel der Vielecke auszudrücken.

Aufl. Man bezeichne die Seiten AB, BC, CD, DE, ꝛc.

des Vieleckes ABCDE.... durch a, b, c, d, ꝛc. und die Seiten Ab, bc, cd, de, ꝛc. des Vieleckes $abcde$... durch a', b', c', d', ꝛc.; ferner die äußeren Winkel, welche in dem einen Vielecke so groß sind als in dem anderen, durch die an denselben befindlichen Buchstaben B, C, D, E, ꝛc., wie bey den Polygonometrischen Aufgaben im ersten Theile dieses Werkes geschehen ist. Läßt man nun von dem Punkte A auf die Seiten BC, CD, DE, ꝛc., die Perpendikel Aq, Aq', Aq'', ꝛc. herab, welche die Seiten bc, cd, de ꝛc., oder ihre Verlängerungen, in den Punkten p, p', p'', treffen, so ist, wie am angeführten Orte, § 85. gelehrt worden,

$$Aq = a \,\text{Sin.}\, B,$$
$$Ap = a' \,\text{Sin.}\, B,$$

$$Aq' = b \,\text{Sin.}\, C + a \,\text{Sin.}\, (C + B),$$
$$Ap' = b' \,\text{Sin.}\, C + a' \,\text{Sin.}\, (C + B),$$

$$Aq'' = c \,\text{Sin.}\, D + b \,\text{Sin.}\, (D + C) + a \,\text{Sin.}\, (D + C + B),$$
$$Ap'' = c' \,\text{Sin.}\, D + b' \,\text{Sin.}\, (D + C) + a' \,\text{Sin.}\, (D + C + B),$$

u. s. w.

Hieraus erhält man nun,

$$pq = (a - a') \,\text{Sin.}\, B,$$
$$p'q' = (b - b') \,\text{Sin.}\, C + (a - a') \,\text{Sin.}\, (C + B),$$
$$p''q'' = (c - c') \,\text{Sin}\, D + (b - b') \,\text{Sin.}\, (D + C) + (a - a') \,\text{Sin.}\, (D + C + B),$$

u. s. w.

Die Linien pq, $p'q'$, $p''q''$, ꝛc., sind aber die Höhen der Parallelogramme und Dreyecke; man hat also, da $Bc' = bc = b'$, $Cc' = BC - Bc' = b - b'$, $Cd' = cd = c$, $Dd' = CD - Cd' = c - c'$, $De' = de = d$, $Ee' = DE - De' = d - d'$, u. s. w.,

$$\text{Prlgr. } Bbcc' = b'(a - a')\,\text{Sin. } B,$$

$$\text{Prlgr. } Cdd' = c'(b - b')\,\text{Sin. } C + c'(a - a')\,\text{Sin.}(C + B),$$

$$\text{Prlgr. } Ddee' = d'(c - c')\,\text{Sin. } D + d'(b - b')\,\text{Sin.}(D + C) + d'(a - a')\,\text{Sin.}(D + C + B)$$

u. s. w.

$$\triangle Cce' = \tfrac{1}{2}(b - b')(a - a')\,\text{Sin. } B,$$

$$\triangle Ddd' = \tfrac{1}{2}(c - c')(b - b')\,\text{Sin. } C + \tfrac{1}{2}(c - c')(a - a')\,\text{Sin.}(C + B)$$

$$\triangle Eee' = \tfrac{1}{2}(d - d')(c - c')\,\text{Sin. } D + \tfrac{1}{2}(d - d')(b - b')\,\text{Sin.}(D + C) + \tfrac{1}{2}(d - d')(a - a')\,\text{Sin.}(D + C + B),$$

u. s. w.

Zus. Nach § 96 des ersten Theiles, ist Polygon $abcde \ldots =$

$$\tfrac{1}{2}a'b'\,\text{Sin. } B + \tfrac{1}{2}a'c'\,\text{Sin.}(B + C) + \tfrac{1}{2}a'd'\,\text{Sin.}(B + C + D) + \text{ꝛc.} + \tfrac{1}{2}b'c'\,\text{Sin. } C + \tfrac{1}{2}b'd'\,\text{Sin.}(C + D) + \text{ꝛc.} + \tfrac{1}{2}c'd'\,\text{Sin. } D + \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun zu diesem Vielecke die Parallelogramme und Dreyecke, deren Inhalt so eben gefunden worden, so erhält man, Polygon $ABCDE \ldots =$

$$\tfrac{1}{2}(ab + ab' - a'b)\,\text{Sin. } B + \tfrac{1}{2}(ac + ac' - a'c)\,\text{Sin.}(B + C) + \tfrac{1}{2}(ad + ad' - a'd)\,\text{Sin.}(B + C + D)\ \text{ꝛc.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(bc + bc' - b'c)\,\text{Sin. } C + \tfrac{1}{2}(bd + bd' - b'd)\,\text{Sin.}(C + D) + \text{ꝛc.} + \tfrac{1}{2}(cd + cd' - c'd)\,\text{Sin. } D + \text{ꝛc.}$$

Es ist aber auch Polygon $ABCDE \ldots =$

$$\tfrac{1}{2}ab\,\text{Sin. } B + \tfrac{1}{2}ac\,\text{Sin.}(B + C) + \tfrac{1}{2}ad\,\text{Sin.}(B + C + D) + \text{ꝛc.} + \tfrac{1}{2}bc\,\text{Sin. } C + \tfrac{1}{2}bd\,\text{Sin.}(C + D) + \text{ꝛc.} + \tfrac{1}{2}cd\,\text{Sin. } D + \text{ꝛc.};$$

man hat also, wenn diese beyden Ausdrücke einander gleich gesetzt werden,

$$\left.\begin{array}{l}(ab' - a'b)\,\text{Sin. } B + (ac' - a'c)\,\text{Sin.}(B + C) + \\ (ad' - a'd)\,\text{Sin.}(B + C + D) + \text{ꝛc.} + \\ (bc' - b'c)\,\text{Sin. } C + (bd' - b'd)\,\text{Sin.}(C + D) + \text{ꝛc.} + \\ (cd' - c'd)\,\text{Sin. } D + \text{ꝛc.}\end{array}\right\} = 0.$$

Eine merkwürdige Gleichung, welche für alle Vielecke von der Figur BCDEfedcb gilt, worin $\frac{1}{2}n - 1$ Seiten, anderen $\frac{1}{2}n - 1$ Seiten parallel sind, die übrigen zwey aber eine beliebige Lage haben können.

Wegen der Allgemeinheit der polygonometrischen Sätze, die im 1sten Theile dieses Werks umständlich gezeigt worden, gilt diese Gleichung auch alsdann, wenn einige der Winkel B, C, D ꝛc. einwärts gehend sind.

§. 155.

Aufg. Den kubischen Inhalt eines jeden Körpers zu finden, welcher von zwey parallelen Vielecken von gleich vielen Seiten, übrigens aber von willkührlicher Gestalt und Größe, und von so vielen Trapezen, als jedes dieser Vielecke Seiten hat, begränzt wird; jedoch unter der Bedingung, daß nichts mehr als die Seiten eines jeden Vielecks weniger eine, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gegeben seyen.

Aufl. Ein solcher Körper unter den unendlich vielen, welche man sich denken kann, sey ABCDEFF'A'B'C'D'E' (Fig. 66); ABCDEF, A'B'C'D'E'F', sind die beyden parallelen Flächen, hier Sechsecke; AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E, u. s. w. seine trapezischen Seitenflächen. Man verfahre nun wie folgt.

1) Man nehme eine der Seitenlinien des Körpers, etwa AA' für die erste an, und ziehe aus den Winkelpunkten B', C', D', E', F', die Linien B'b, C'c, D'd, E'e, F'f, ihr parallel; sie treffen die Grundfläche in den Punkten b, c, d, e, f. Werden noch die Linien bc, cd, de, ef, gezogen, so entstehet ein Prisma AbcdefF'A'B'C'D'E'.

2) Man konstruire nun auf der Grundfläche eine Figur, wie die im vorigen § durch die nämlichen Buchstaben bezeich-

nete, mit Weglassung der Perpendikel, welche nicht mehr gebraucht werden, und ziehe noch überdies die Linien $C'c'$, $D'd'$, $E'e'$, $F'f'$.

3) Durch diese Construktion wird der Körper zerlegt: a) in das in 1 erwähnte Prisma; b) in die dreyseitigen Prismen $bBB'C'c'c$, $cCC'D'd'd$, $dDD'E'e'e$, $eEE'F'f'f$; c) in die dreyseitigen Pyramiden $C'Ccc'$, $D'Ddd'$, $E'Eee'$, $F'Fff'$. Die dreyseitigen Prismen können auch als halbe Parallelepipede angesehen werden, deren Grundflächen die Parallelogramme $Bbcc'$, $Ccdd'$, $Ddee'$, $Eeff'$, sind, und deren Höhe die Entfernung der beyden parallelen Vielecke, d. h. die Höhe des Körpers selbst ist.

4) Da die Seiten der beyden parallelen Vielecke bis auf eine, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel als gegeben angenommen werden; so setze man $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $BF = e$; $A'B' = Ab = a'$ $B'C' = bc = b'$, $C'D' = cd = c'$, $D'E' = de = d'$, $E'F' = ef = e'$; ferner bezeichne man die äußeren Winkel dieser Vielecke, wie immer, durch B, C, D, E; die Höhe des Körpers sey $= h$.

5) Bezeichnet man nun den Inhalt des Vielecks $Abcdef$ durch Q, die Summe der Parallelogramme $Bbcc'$, $Ccdd'$, ꝛc. durch Q', und die Summe der Dreyecke Ccc' Ddd', ꝛc. durch Q''; ferner den kubischen Inhalt des Körpers durch K; so hat man.

$$K = (Q + \tfrac{1}{2}Q' + \tfrac{1}{3}Q'')\,h,$$

und es ist nach dem vorigen §,

$$Q = \tfrac{1}{2}a'b'\,\text{Sin.}\,B + \tfrac{1}{2}a'c'\,\text{Sin.}\,(B + C) + \tfrac{1}{2}a'd'\,\text{Sin.}\,(B + C + D) + \tfrac{1}{2}a'e'\,\text{Sin.}\,(B + C + D + E) + \tfrac{1}{2}b'c'\,\text{Sin.}\,C + \tfrac{1}{2}b'd'\,\text{Sin.}\,(C + D) + \tfrac{1}{2}b'e'\,\text{Sin.}\,(C + D + E) + \tfrac{1}{2}c'd'\,\text{Sin.}\,D + \tfrac{1}{2}c'e'\,\text{Sin.}\,(D + E) + \tfrac{1}{2}d'e'\,\text{Sin.}\,E;$$

$$Q' = b'(a-a')\,\text{Sin.}\,B + c'(b-b')\,\text{Sin.}\,C + c'(a-a')\,\text{Sin.}\,(B+C) + d'(c-c')\,\text{Sin.}\,D + d'(b-b')\,\text{Sin.}\,(C+D) + d'(a-a')\,\text{Sin.}\,(B+C+D) + e'(d-d')\,\text{Sin.}\,E + e'(c-c')\,\text{Sin.}\,(D+E) + e'(b-b')\,\text{Sin.}\,(C+D+E) + e'(a-a')\,\text{Sin.}\,(B+C+D+E);$$

$$Q'' = \tfrac{1}{2}(b-b')(a-a')\,\text{Sin.}\,B + \tfrac{1}{2}(c-c')(b-b')\,\text{Sin.}\,C + \tfrac{1}{2}(c-c')(a-a')\,\text{Sin.}\,(B+C) + \tfrac{1}{2}(d-d')(c-c')\,\text{Sin.}\,D + \tfrac{1}{2}(d-d')(b-b')\,\text{Sin.}\,(C+D) + \tfrac{1}{2}(d-d')(a-a')\,\text{Sin.}\,(B+C+D) + \tfrac{1}{2}(e-e')(d-d')\,\text{Sin.}\,E + \tfrac{1}{2}(e-e')(c-c')\,\text{Sin.}\,(D+E) + \tfrac{1}{2}(e-e')(b-b')\,\text{Sin.}\,(C+D+E) + \tfrac{1}{2}(e-e')(a-a')\,\text{Sin.}\,(B+C+D+E).$$

6) Substituirt man die Werthe von Q, Q', Q'', in dem Ausdrucke von K, so erhält man,

$$K = \frac{lr}{6}\left\{\begin{array}{l}
(ab + 2ab' - a'b + a'b')\,\text{Sin.}\,B + \\
(ac + 2ac' - a'c + a'c')\,\text{Sin.}\,(B+C) + \\
(ad + 2ad' - a'd + a'd')\,\text{Sin.}\,(B+C+D) + \\
(ae + 2ae' - a'e + a'e')\,\text{Sin.}\,(B+C+D+E) + \\
(bc + 2bc' - b'c + b'c')\,\text{Sin.}\,C + \\
(bd + 2bd' - b'd + b'd')\,\text{Sin.}\,(C+D+E) + \\
(cd + 2cd' - c'd + c'd')\,\text{Sin.}\,D \\
(ce + 2ce' - c'e + c'e')\,\text{Sin.}\,(D+E) \\
(de + 2de' - d'e + d'e')\,\text{Sin.}\,D
\end{array}\right\}$$

7) Nach dem Zusatze des vorigen §'s ist aber

$$0 = (ab' - a'b)\,\text{Sin.}\,B + (ac' - a'c)\,\text{Sin.}\,(B+C) + (ad' - a'd)\,\text{Sin.}\,(B+C+D) + (ae' - a'e)\,\text{Sin.}\,(B+C+D+E) + (bc' - b'c)\,\text{Sin.}\,C + (bd' - b'd)\,\text{Sin.}\,(C+D) + (be' - b'e)\,\text{Sin.}\,(C+D+E) + (cd' - c'd)\,\text{Sin.}\,D + (ce' - c'e)\,\text{Sin.}\,(D+E) + (de' - d'e)\,\text{Sin.}\,E.$$

8) Wird diese Gleichung von der in 6 abgezogen, so erhält man den folgenden einfacheren Ausdruck:

$$K = \frac{h}{6} \left\{ \begin{array}{l} (ab + ab' + a'b') \text{ Sin. } B + \\ (ac + ac' + a'c') \text{ Sin. } (B + C) + \\ (ad + ad' + a'd') \text{ Sin. } (B + C + D) + \\ (ae + ae' + a'e') \text{ Sin. } (B + C + D + E) + \\ (bc + bc' + b'c') \text{ Sin. } C + \\ (bd + bd' + b'd') \text{ Sin. } (C + D) + \\ (be + be' + b'e') \text{ Sin. } (C + D + E) + \\ (cd + cd' + c'd') \text{ Sin. } D + \\ (ce + ce' + c'e') \text{ Sin. } (D + E) + \\ (de + de' + d'e') \text{ Sin. } E \end{array} \right\}.$$

9) Hätte man die Gleichung in 7 mit 2 multiplicirt, und hierauf von der in 6 abgezogen, so würde man den folgenden Ausdruck erhalten haben:

$$K = \frac{h}{6} \left\{ \begin{array}{l} (ab + a'b + a'b') \text{ Sin. } B + \\ (ac + a'c + a'c') \text{ Sin. } (B + C) + \\ \text{ꝛc.} \end{array} \right\}$$

Zus. Obgleich die Rechnung hier nur für einen sechsseitigen Körper geführt worden, so läßt sich doch daraus das Gesetz des Ausdruckes für jeden anderen Körper dieser Art sehr leicht erkennen. Die Anzahl der Glieder, woraus ein solcher Ausdruck bestehet, ist der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen gleich, welche sich aus n — 1 Seiten a, b, c, d, ꝛc. der nseitigen Grundfläche machen lassen, und daher $= \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2}$.

Für n = 4, ist

$$K = \frac{h}{6}\left\{\begin{array}{l}(ab + a'b + a'b')\ \text{Sin. } B + \\ (ac + a'c + a'c')\ \text{Sin. } C + \\ (bc + b'c + b'c')\ \text{Sin. } (B + C).\end{array}\right\}$$

Für $n = 5$ ist,

$$K = \frac{h}{6}\left\{\begin{array}{l}(ab + a'b + a'b')\ \text{Sin. } B + \\ (ac + a'c + a'c')\ \text{Sin. } (B + C) + \\ (ad + a'd + a'd')\ \text{Sin. } (B + C + D) + \\ (bc + b'c + b'c')\ \text{Sin. } C + \\ (bd + b'd + b'd')\ \text{Sin. } (C + D) + \\ (cd + c'd + c'd')\ \text{Sin. } D.\end{array}\right\}$$

Uebrigens gelten diese Formeln, die Winkel B, C, D &c. mögen konvex oder konkav seyn.

§ 156.

Man kann die in den vorigen § gefundenen Ausdrücke für den Körper Fig. 66 auch noch unter mancherley andere Formen bringen. Setzt man z. B. den Inhalt der Grundfläche ABCDEF = G, und den Inhalt der oberen Fläche A'B'C'D'E'F' = G', so hat man,

$$G = \tfrac{1}{2} ab\ \text{Sin. } B + \tfrac{1}{2} ac\ \text{Sin. } (B + C) + \tfrac{1}{2} ad\ \text{Sin. } (B + C + D) + \tfrac{1}{2} ae\ \text{Sin. } (B + C + D + E) + \tfrac{1}{2} bc\ \text{Sin. } C + \tfrac{1}{2} bd\ \text{Sin. } (C + D) + \tfrac{1}{2} be\ \text{Sin. } (C + D + E) + \tfrac{1}{2} cd\ \text{Sin. } D + \tfrac{1}{2} ce\ \text{Sin. } (D + E) + \tfrac{1}{2} de\ \text{Sin. } E.$$

$$G' = \tfrac{1}{2} a'b'\ \text{Sin. } B + \tfrac{1}{2} a'c'\ \text{Sin. } (B + C) + \tfrac{1}{2} a'd'\ \text{Sin. } (B + C + D) + \tfrac{1}{2} a'e'\ \text{Sin. } (B + C + D + E) + \tfrac{1}{2} b'c'\ \text{Sin. } C + \tfrac{1}{2} b'd'\ \text{Sin. } (C + D) + \tfrac{1}{2} b'e'\ \text{Sin. } (C + D + E) + \tfrac{1}{2} c'd'\ \text{Sin. } D + \tfrac{1}{2} c'e'\ \text{Sin. } (D + E) + \tfrac{1}{2} d'e'\ \text{Sin. } E.$$

Der Ausdruck in 8 des vorigen §'s verwandelt sich also, wenn man G und G' an die Stelle der Aggregate setzt, denen sie gleich sind, in den folgenden:

$$K = \frac{h}{3}(G + G') +$$

$$\frac{h}{6}\left\{\begin{array}{l} ab' \text{Sin. } B + ac' \text{Sin. } (B + C) + ad' \text{Sin. } (B + C + D) \\ + ae' \text{Sin. } (B + C + D + E) + bc' \text{Sin. } C + \\ bd' \text{Sin. } (C + D) + be' \text{Sin. } (C + D + E) + \\ cd' \text{Sin. } D + ce' \text{Sin. } (D + E) + de' \text{Sin. } E \end{array}\right\}$$

§ 157.

Aufg. Den Inhalt eines jeden Polyeders zu finden.

Aufl. Man könnte das Polyeder in lauter Pyramiden zerlegen, den Inhalt einer jeden dieser Pyramiden insbesondere suchen, und hierauf alles zusammen addiren. Man kann aber auch auf die folgende einfachere Art dahin gelangen.

1) Man denke sich das Polyeder auf eine seiner Flächen gestellt, welche als die Grundfläche desselben angesehen werden kann.

2). Zertheile hierauf das Polyeder durch Ebenen, welche man der Grundfläche parallel legt, in lauter Körper von der Art, wie sie im vorigen § betrachtet worden.

3) Berechne hierauf jeden dieser Körper einzeln; die Summe aller giebt den Inhalt des Polyeders.

§ 158.

Hülfssatz.

Aufg. In irgend einer Ebene ist eine Figur gezeichnet: man soll den Inhalt ihrer Projektion auf eine andere Ebene finden, wenn der Inhalt der Figur und der Neigungswinkel der beyden Ebenen gegeben ist.

Aufl. 1) Es sey ABC (Fig. 67) ein in der Ebene LOPQ gezeichnetes Dreyeck. Die Projektion desselben auf

die Ebene LMNO sey abc; sie wird gefunden, wenn man von den Spitzen A, B, C, die Perpendikel Aa, Bb, Cc, auf diese Ebene herabläßt. Der Neigungswinkel der beyden Ebenen sey $= \alpha$.

2) Nimmt man zuerst an, daß BC auf der Durchschnittslinie LO der beyden Ebenen perpendikulär stehe, so ist BHb $= \alpha$, und daher bc $=$ BC Cos. α. Da nun die Dreyecke ABC, abc, einerley Höhe, nämlich GH haben, so ist $\triangle$abc $= \frac{1}{2}$GH . bc $= \frac{1}{2}$GH . BC . Cos. $\alpha = \triangle$ABC . Cos. α.

3) Es sey ferner ABD ein beliebiges Dreyeck, abd seine Projektion; alsdann ist $\triangle$ABC : $\triangle$ABD $=$ AC : AD $=$ ac : ad $= \triangle$abc : $\triangle$abd, oder $\triangle$ABC : $\triangle$abc $=$ $\triangle$ABD : $\triangle$abd, oder, da $\triangle$abc $= \triangle$ABC . Cos. α (2), $\triangle$ABC : $\triangle$ABC . Cos. $\alpha = \triangle$ABD . $\triangle$abd. Hieraus erhält man $\triangle$abd $= \triangle$ABD . Cos. α. Man findet demnach immer die Projektion eines Dreyecks, wenn man dieses Dreyeck mit dem Cosinus des Neigungswinkels multiplicirt.

4) Jedes Vieleck läßt sich in Dreyecke zerlegen; man findet demnach auch die Projektion eines Vielecks, wenn man dasselbe mit dem Cosinus des Neigungswinkels multiplicirt.

5) Bezeichnet daher Q den Inhalt von irgend einem ebenen Vielecke, und q den Inhalt seiner Projektion; so ist in jedem Falle q $=$ Q Cos. α.

Zus. Die Projektion einer gebrochenen Fläche ist die algebraische Summe der Projektionen aller der einzelnen Figuren, aus welchen diese Fläche zusammengesetzt ist. Es läßt sich also auch die Projektion einer gebrochenen Fläche finden, wenn man den Flächeninhalt der Figuren, woraus sie bestehet, und ihre Neigungswinkel gegen die Projektionsebene kennet.

§. 159.

Aufg. Die Neigungswinkel der Gränzflächen eines

Polyeders sind gegeben; auch ist der Inhalt einer jeden dieser Flächen, einer ausgenommen, gegeben: man soll diese unbekannte Fläche finden.

Erste Auflösung.

Betrachtet man die Oberfläche des Körpers als eine gebrochene Fläche, so ist jede Gränzfläche die Projektion des übrigen Theiles der gebrochenen. Die gesuchte Gränzfläche wird demnach gefunden, wenn man eine jede der übrigen mit dem Cosinus des Neigungswinkels derselben gegen die gesuchte Fläche multiplicirt, und hierauf alle diese Produkte zusammen addirt.

Bezeichnet man daher die Gränzflächen des Polyeders, oder vielmehr ihren Inhalt durch a, b, c, d, e ꝛc.; und die Neigungswinkel je zweyer dieser Flächen, z. B. von a und d, oder von b und c, durch (a, d), (b, c); so erhält man,

$$a = b \,\mathrm{Cos.}\,(a, b) + c \,\mathrm{Cos.}\,(a, c) + d \,\mathrm{Cos.}\,(a, d) + e \,\mathrm{Cos.}\,(a, e) + \text{ꝛc.}$$

$$b = a \,\mathrm{Cos.}\,(a, b) + c \,\mathrm{Cos.}\,(b, c) + d \,\mathrm{Cos.}\,(b, d) + e \,\mathrm{Cos.}\,(b, e) + \text{ꝛc.}$$

$$c = a \,\mathrm{Cos.}\,(a, c) + b \,\mathrm{Cos.}\,(b, c) + d \,\mathrm{Cos.}\,(c, d) + e \,\mathrm{Cos.}\,(c, e) + \text{ꝛc.}$$

$$d = a \,\mathrm{Cos.}\,(a, d) + b \,\mathrm{Cos.}\,(b, d) + c \,\mathrm{Cos.}\,(c, d) + e \,\mathrm{Cos.}\,(d, e) + \text{ꝛc.}$$

$$e = a \,\mathrm{Cos.}\,(a, e) + b \,\mathrm{Cos.}\,(b, e) + c \,\mathrm{Cos.}\,(c, e) + d \,\mathrm{Cos.}\,(d, e) + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Zweyte Auflösung.

Multiplicirt man die erste von den gefundenen Gleichungen mit a, die zweyte mit b, die dritte mit c, ꝛc., und zie-

het hierauf die erste von der Summe aller übrigen ab, so erhält man nach der gehörigen Versetzung der Glieder,

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \text{ꝛc.} - 2bc \operatorname{Cos.}(b,c) - 2bd \operatorname{Cos.}(b,d) - 2be \operatorname{Cos.}(b,e) - \text{ꝛc.} - 2cd \operatorname{Cos.}(c,d) - 2ce \operatorname{Cos.}(c,e) - \text{ꝛc.} - 2de \operatorname{Cos.}(d,e) - \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Aehnliche Gleichungen findet man für die übrigen Gränzflächen.

Man erhält demnach eine Gränzfläche eines Polyeders, wenn man von der Summe der Quadrate aller übrigen die doppelten Produkte von je zwey und zwey derselben mit dem Cosinus ihres Neigungswinkels multiplicirt, abziehet, und hierauf aus dem Reste die Quadratwurzel ziehet.

Zus. Wenn also in einer dreyseitigen Pyramide drey ihrer Flächen auf einander perpendikulär stehen, und einen körperlichen rechten Winkel bilden, so sind die Cosinusse der Neigungswinkel dieser Flächen gegen einander alle = 0; folglich ist in diesem Falle das Quadrat der, dem körperlichen rechten Winkel gegenüber liegenden Fläche den Quadraten der drey übrigen zusammen genommen gleich. Dies wurde schon § 108. auf einem anderen Wege gefunden.

§ 160.

Aufg. Den kubischen Inhalt eines dreyseitigen abgekürzten Prismas zu finden.

(Unter einem abgekürzten Prisma wird überhaupt ein Körper verstanden, welcher übrig bleibt, wenn man von irgend einem graden oder schiefen Prisma, durch eine gegen die Grundfläche geneigte Ebene ein Stück abschneidet.)

Aufl. 1) Es sey ABCFED (Fig. 68) ein dreyseitiges abgekürztes Prisma, ABC seine Grundfläche. Es läßt sich durch die Diagonalen EA, DC, der Vierecke ABED, ACFD,

in drey dreyseitige Pyramiden EABC, EADC, EDFC, zerlegen.

2) Ziehet man die Diagonalen BD, BF, der Vierecke ABED, BCFE, so entstehen zwey andere Pyramiden BADC, BDFC. Die erstere, nämlich BADC, ist der Pyramide EADC gleich, weil sie die gemeinschaftliche Grundfläche ADC haben, und ihre Spitzen B, E, in der Linie BE liegen, welche dieser Grundfläche parallel ist. Die zweyte, nämlich BDFC, ist eben so der Pyramide EDFC gleich, weil sie die gemeinschaftliche Grundfläche CFD haben, und ihre Spitzen in der Parallele BE liegen. Der Körper ABCFED ist demnach auch den drey Pyramiden EABC, DABC, BDFC, gleich.

3) Ziehet man die Diagonale FA, so ist das Dreyeck CAF dem Dreyecke CDF gleich, weil beide die gemeinschaftliche Grundlinie CF haben, und zwischen denselben Parallelen AD, CF, liegen. Die Pyramiden BACF, BDFC, haben demnach die gleichen Grundflächen CAF, CDF, welche in einer und derselben Ebene liegen; sie haben ferner gleiche Höhe, weil sie die Spitze B gemein haben, und ihre Grundflächen in einer Ebene liegen; sie sind demnach einander gleich. Der Körper ABCFED ist demnach der Summe der drey Pyramiden (DABC, EABC, FABC) gleich, welche die gemeinschaftliche Grundfläche ABC, und ihre Spitzen in D, E, F, haben.

4) Da die Seitenlinien DA, EB, FC parallel sind, so sind sie auch gegen die Grundfläche ABC unter gleichen Winkeln geneigt. Es sey der Neigungswinkel einer jeden dieser Linien gegen die Grundfläche $= \mu$; alsdann ist, wie man leicht einsehen wird, die Höhe der Pyramide DABC $=$ DA Sin. μ, die Höhe der Pyramide EABC $=$ EB Sin. μ, und die Höhe der Pyramide FABC $=$ FC Sin. μ. Man hat

demnach

demnach Pyr. DABC $= \frac{1}{3}\triangle ABC \,.\, DA \sin.\mu$, Pyr. EABC $= \frac{1}{3} ABC \,.\, EB \sin.\mu$, Pyr. FABC $= \frac{1}{3}\triangle ABC \,.\, FC \sin.\mu$; folglich den kubischen Inhalt des abgekürzten Prismas ABCFED =

$$\triangle ABC \,.\, \frac{DA + EB + FC}{3} \sin.\mu.$$

D. h. man findet den Inhalt eines solchen Körpers, wenn man den dritten Theil von der Summe seiner Seitenlinien mit dem Sinus ihres Neigungswinkels gegen die Grundfläche, und mit dieser Grundfläche selbst multiplicirt.

Zus. Stehen die Seitenlinien auf der Grundfläche perpendikulär, so ist $\mu = 90^\circ$, und man findet den Inhalt des abgekürzten Prismas

$$= \triangle ABC \,.\, \frac{DA + EB + FC}{3}.$$

§ 161.

Mit Hülfe statischer Principien läßt sich der Aufgabe des vorigen §'s eine beträchtliche Erweiterung geben. Die Sätze, die man hierzu wissen muß, sind folgende:

1) Wenn eine gerade oder krummlinige ebene Figur in eine unbestimmte Anzahl beliebiger Theile getheilt wird: so ist die Summe der Produkte, welche entstehen, wenn man jeden dieser Theile mit der Entfernung seines Schwerpunktes von irgend einer beliebigen, aber unveränderlichen Ebene multiplicirt, dem Produkte gleich, welches man erhält, wenn man die ganze Figur mit der Entfernung ihres Schwerpunktes von jener Ebene multiplicirt; oder, wie man sich in der Statik ausdruckt, die Summe der Momente aller einzelnen Theile ist dem Momente der ganzen Figur gleich.

Diesen Satz findet man in allen Lehrbüchern der Statik erwiesen.

2) Die Entfernung des Schwerpunktes eines jeden Dreyecks von irgend einer Ebene, ist dem dritten Theile der Summe der Entfernungen seiner drey Spitzen von dieser Ebene gleich.

3) Der Schwerpunkt einer jeden ebenen Figur liegt mit dem Schwerpunkte ihrer Projektion auf irgend eine Ebene immer in einer geraden Linie, welche auf der Projektionsebene perpendikulär stehet.

Der Beweis des zweiten und dritten Satzes kann so geführt werden.

Beweis des zweyten Satzes. Von den drey Spitzen A, B, C, (Fig. 69) irgend eines Dreyeckes ABC ziehe man auf eine willkührliche Ebene LMPQ die Perpendikel Aa, Bb, Cc, welche die Entfernungen jener drey Spitzen von dieser Ebene sind; die Punkte a, b, c, geben das Dreyeck abc. Man halbire die Linien AB, ab, in D, d, und ziehe CD, cd; alsdann ist Dd den Linien Aa, Bb, parallel, und man hat daher, wie bekannt,

$$Dd = \frac{1}{2}(Aa + Bb).$$

Man nehme nun $DE = \frac{1}{3}CD$, $de = \frac{1}{3}cd$, und ziehe Ee; alsdann sind E, e, die Schwerpunkte der Dreyecke ABC, abc, und die Linie Ee ist den Linien Cc, Dd, parallel, also auf der Ebene LMPQ perpendikulär. Man ziehe nun Cf der cd parallel; hierdurch entstehen die ähnlichen Dreyecke DfC, EgC, und diese geben, $CD : CE = Df : Eg$, also $Eg = \frac{2}{3} Df = \frac{2}{3}(Dd - Cc) = \frac{2}{3} Dd - \frac{2}{3} Cc$. Da nun $Ee = Eg + ge = Eg + Cc$, so hat man,

$$Ee = \frac{2}{3} Dd + \frac{1}{3} Cc.$$

Wird hierin für Dd sein vorhin gefundener Werth gesetzt, so erhält man,

$$Ee = \frac{2}{3}(Aa + Bb) + \frac{1}{3}Cc = \frac{Aa + Bb + Cc}{3}.$$

Aus diesem Beweise erhellet auch, daß die Linie Ee, welche den Schwerpunkt des Dreyecks ABC und den seiner Projektion abc verbindet, auf der Projektionsebene perpendikulär stehe.

Beweis des dritten Satzes. Es sey ABCDE (Fig. 70) irgend eine geradlinige ebene Figur, hier ein Fünfeck, und abcde die Projektion derselben auf eine Ebene LMPQ. Man denke sich die Figur ABCDE auf eine beliebige Art in Dreyecke AEB, BEC, CED, getheilt, und die Figur abcde in eben so viele, jenen korrespondirende Dreyecke, aeb, bec, ced; alsdann ist nach § 158, wenn α den Neigungswinkel der Ebenen ABCDE, LMPQ bezeichnet, $\triangle aeb = \triangle AEB \,.\, \text{Cos.}\ \alpha$, $\triangle bec = \triangle BEC \,.\, \text{Cos.}\ \alpha$, $\triangle ced = \triangle CED \,.\, \text{Cos.}\ \alpha$, und daher $\triangle aeb : \triangle bec : \triangle ced = \triangle AEB : \triangle BEC : \triangle CED$, und Trap. ABCE : Trap. abce $= \triangle CED : \triangle ced$.

Es seyen P, Q, die Schwerpunkte der Dreyecke AEB, BEC, und p, q, die Schwerpunkte der korrespondirenden Dreyecke aeb, bec. Ziehet man die Linien Pp, Qq, so sind, wie vorhin gezeigt worden, diese Linien auf der Ebene LMPQ perpendikulär, und daher parallel. Man ziehe nun PQ, pq, und theile diese Linien in R und r so, daß PR : QR $= \triangle BEC : \triangle AEB$, und pr : qr $= \triangle bec : \triangle aeb$, also auch PR : QR = pr : qr, und daher die Linie Rr den Linien Pp, Qq, parallel, also auf der Ebene LMPQ perpendikulär. Aus der Art, wie verfahren worden, ist aber klar, daß R der Schwerpunkt des Vierecks ABCE, und r der Schwerpunkt

des Vierecks abce ist; demnach gilt der Satz auch für das Viereck ABCE.

Es seyen nun S, s, die respektiven Schwerpunkte der Dreyecke CDE, cde, und SR, sr, gezogen, ferner diese Linien in T, t, so getheilt, daß Viereck ABCE : $\triangle$CDE = ST : TR, und Viereck abce : $\triangle$cde = st : tr, also auch ST : TR = st : tr; alsdann ist die Linie Tt den Linien Rr, Ss, parallel, also auf der Ebene LMPQ perpendikulär. Die Punkte T, t, sind aber nichts anders als die respektiven Schwerpunkte der Figuren ABCDE, abcde; demnach gilt der Satz auch für Fünfecke.

Auf die nämliche Art könnte man diese Schlüsse fortsetzen, wenn die Figur mehr als fünf Seiten hätte; der Satz gilt also für alle Vielecke.

Jede krummlinige Figur kann als ein Vieleck von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten, angesehen werden; also gilt der Satz auch für alle krummlinige Figuren.

§ 162.

Aufg. Den Inhalt eines jeden geraden oder schiefen abgekürzten Prismas vermittelst des Schwerpunktes zu finden.

Aufl. 1) Es sey zuerst ABCabc (Fig. 69) ein dreyseitiges und gerades abgekürztes Prisma, abc seine Grundfläche; so ist nach § 160 Zus. der Inhalt desselben = $\triangle abc \cdot \frac{Aa + Bb + Cc}{3}$. Die Seitenlinien Aa, Bb, Cc, sind aber nichts anders als die Entfernungen der Dreyecksspitzen A, B, C, von der Ebene der Grundfläche; ist demnach E der Schwerpunkt des Dreyeckes ABC, und e der des Dreyeckes abc, so ist, nach dem vorigen §, $Ee = \frac{Aa + Bb + Cc}{3}$, folg-

lich der Inhalt des Körpers $= \triangle abc \,.\, Ee$. Man findet also den Inhalt eines dreyseitigen und geraden abgekürzten Prismas, wenn man die Grundfläche mit der Entfernung ihres Schwerpunktes von dem Schwerpunkte der ihr gegenüber liegenden Fläche multiplicirt.

2) Es soll nun gezeigt werden, daß dieser Satz auch für jedes andere abgekürzte Prisma gilt. Es sey z. B. ABCDEabcde (Fig. 70) ein solches fünfseitiges Prisma abcde seine Grundfläche. Man zerlege zu dem Ende die obere Fläche desselben auf eine beliebige Art in die Dreyecke AED, BEC, CED, wie auch die Grundfläche in die, jenen korrespondirenden Dreyecke, aeb, bec, ced. Sind nun P, Q, R, p, q, r, die Schwerpunkte der respektiven Dreyecke AEB, BEC, CED, aeb, bec, ced; so ist nach dem was so eben bewiesen worden,

$$\text{abgek. Prisma AEBaeb} = \triangle aeb \,.\, Pp,$$
$$\text{abgek. Prisma BECbec} = \triangle bec \,.\, Qq,$$
$$\text{abgek. Prisma CEDced} = \triangle ced \,.\, Ss,$$

und daher das abgekürzte Prisma ABCDEabcde

$$= \triangle aeb \,.\, Pp + \triangle bec \,.\, Qq + \triangle ced \,.\, Ss.$$

Es ist aber, wenn α den Neigungswinkel der Ebene der Figur ABCDE gegen die Grundfläche bezeichnet, nach § 158, $\triangle aeb = \triangle AEB \,.\, \text{Cos.}\, \alpha$, $\triangle bec = \triangle BEC \,.\, \text{Cos.}\, \alpha$, $\triangle ced = \triangle CED \,.\, \text{Cos.}\, \alpha$; man hat also auch den Inhalt dieses Körpers

$$= (\triangle AEB \,.\, Pp + \triangle BEC \,.\, Qq + \triangle CED \,.\, Ss)\ \text{Cos.}\, \alpha.$$

Wenn nun T, t, die Schwerpunkte der Figuren ABCDE, abcde sind, so ist § 161 Tt auf der Ebene der letzteren perpendikulär, und man hat

$$(\triangle AEB \,.\, Pp + \triangle BEC \,.\, Qq + \triangle CED \,.\, Ss)\ \text{Cos.}\, \alpha =$$
$$= ABCDE \,.\, \text{Cos.}\, \alpha \,.\, Tt = abcde \,.\, Tt \ (\S\ 158)$$

Demnach ist das abgek. Prisma

$$ABCDEabcde = abcde \cdot Tt.$$

Da der hier für den fünfseitigen Körper geführte Beweis nichts enthält, was nicht auf jedes vielseitige Prisma anwendbar wäre; so läßt sich daraus schließen, daß der Inhalt eines jeden geraden abgekürzten Prismas gefunden wird, wenn man seine Grundfläche mit der Entfernung ihres Schwerpunktes von dem Schwerpunkte der ihr gegenüberliegenden Fläche multiplicirt.

3) Es sey nun ABCDA′B′C′D′ (Fig. 71) irgend ein abgekürztes schiefes Prisma, abcd ein auf den Seitenlinien desselben senkrechter Schnitt, T der Schwerpunkt der oberen, und T′ der der unteren Fläche, ferner t der Schwerpunkt des Schnittes. Der Schnitt abcd, kann als die Projektion sowohl der Fläche ABCD, als der Fläche A′B′C′D′ angesehen werden; demnach ist sowohl Tt als T′t auf abcd perpendikulär, (§ 161) und daher TtT′ eine gerade Linie. Nach 2 ist aber der Inhalt des geraden Prismas ABCDabcd = abcd . Tt, und der Inhalt des Prismas A′B′C′D′abcd = abcd . T′t; folglich ist der Inhalt des schiefen Prismas ABCDA′B′C′D′ = abcd . (Tt + T′t) = abcd . TT′. Der Inhalt eines schiefen Prismas wird also gefunden, wenn man den senkrechten Schnitt desselben mit der Entfernung des Schwerpunktes seiner Grundfläche vom Schwerpunkte der ihr gegenüber liegenden Fläche multiplicirt.

4) Aus 2 und 3 ergiebt sich nun der allgemeine Satz: Daß der Inhalt eines jeden geraden oder schiefen Prismas, dem Produkte aus einem, auf seinen Seitenlinien senkrechten Schnitt in die Entfernung der Schwerpunkte seiner beyden Grundflächen, gleich ist.

Erst. Zus. Wird der Neigungswinkel einer jeden Sei-

tenlinie gegen die Ebene ABCD $= \mu$, und der gegen die Ebene A'B'C'D' $= \mu'$ gesetzt, so ist, wie man leicht einsehen wird, abcd $=$ ABCD Sin. $\mu =$ A'B'C'D' Sin. μ', und daher der Inhalt des abgekürzten Prismas $=$ ABCD.TT'.Sin. μ $=$ A'B'C'D' . TT' . Sin. μ'. Der Inhalt kann also durch das Produkt einer der Grundflächen in den Sinus ihres Neigungswinkels gegen die Seitenlinie, und in die Entfernung ihres Schwerpunktes vom Schwerpunkte der ihr entgegengesetzten Fläche ausgedrückt werden.

Zweyt. Zus. Da jede krumme Linie als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet werden kann; so gelten diese Sätze auch für solche prismatische Körper, deren Grundflächen krummlinige Figuren sind.

§ 163.

Aufg. Die Oberfläche eines abgekürzten Prismas zu finden.

Aufl. 1) Es sey ABCDabcd (Fig. 72) irgend ein gerades vielseitiges abgekürztes Prisma. Man halbire AB, BC, CD, ꝛc. ab, bc, cd, ꝛc. in P, Q, R, ꝛc. p, q, r, ꝛc. und ziehe die Linien Pp, Qq, Rr, ꝛc.; so werden diese Linien den Seitenlinien des Prismas Aa, Bb, Cc, ꝛc. parallel seyn.

2) Die Oberfläche des Körpers, (die beyden Grundflächen nicht mitgerechnet,) bestehet aus den Trapezen ABba, BCcb, CDdc, ꝛc. Es ist aber Trap. ABba $= \frac{1}{2}$ab (Aa + Bb), Trap. BCcb $= \frac{1}{2}$bc (Bb + Cc), Trap. CDdc $= \frac{1}{2}$cd (Cc + Dd) u. s. w. Demnach ist die gesuchte Fläche $=$

$$\tfrac{1}{2}ab\,(Aa + Bb) + \tfrac{1}{2}bc\,(Bb + Cc) + \tfrac{1}{2}cd\,(Cc + Dd) + \text{ꝛc.}$$

3) Nun ist, wie bekannt, $\frac{1}{2}$(Aa + Bb) $=$ Pp, $\frac{1}{2}$(Bb + Cc) $=$ Qq, $\frac{1}{2}$(Cc + Dd) $=$ Rr, ꝛc; man hat also auch den folgenden Ausdruck für die Fläche:

$$ab\,.\,Pp + bc\,.\,Qq + cd\,.\,Rr + \text{ꝛc.}$$

4) Die Punkte P, Q, R, ꝛc. p, q, r, ꝛc. sind aber nichts anders als die Schwerpunkte der Linien AB, BC, CD, ꝛc. ab, bc, cd, ꝛc, also ab . Pp, bc . Qq, cd . Rr, ꝛc., die Momente der Linien ab, bc, cd, ꝛc., in Beziehung auf die Ebene abcd, und nach der Richtung der Seitenlinien genommen. Ist daher V der Schwerpunkt der gebrochenen Linie ABCD, und v der Schwerpunkt der gebrochenen Linie abcd, so ist Vv den Seitenlinien des Körpers parallel, und man hat, ab . Pp + bc . Qq + cd . Rr + ꝛc. = L × Vv, wenn L die Peripherie der Figur abcd bezeichnet. Die gesuchte Fläche ist demnach dem Produkte aus der Peripherie der Grundfläche in die Entfernung ihres Schwerpunktes vom Schwerpunkte der ihr gegenüberliegenden Fläche gleich.

5) Es sey nun ferner A′B′C′D′ irgend ein schiefer Schnitt des Prismas, und V′ dessen Schwerpunkt, welcher also in der Linie Vv liegt, so findet man wie in 4 die Fläche des abgekürzten geraden Prismas A′B′C′D′abcd = L . V′v.

6) Aus 4 und 5 erhält man die Fläche des abgekürzten schiefen Prismas ABCDA′B′C′D′ = L × (Vv — V′v) = L × VV′: sie wird demnach gefunden, wenn man die Peripherie des auf den Seitenlinien perpendikulären Schnittes mit der Entfernung der Schwerpunkte seiner beyden Grundflächen multiplicirt.

Zus. Da jede krumme Linie als ein Polygon von unendlich vielen Seiten angesehen werden kann, so gilt das Gesagte auch für abgekürzte prismatische Körper mit krummlinigen Grundflächen.

§ 164.

Man stelle sich vor, die Figur A′B′C′D′ (Fig. 71 und Fig. 72) rücke längs der Seitenlinien des Prismas so lange hinauf, bis sie auf ABCD fällt; so beschreibt bey dieser Be-

wegung in Fig. 71 der Schwerpunkt T' der Grundfläche A'B'C'D' die Linie T'T, und in Fig. 72 der Schwerpunkt V' ihres Perimeters die Linie V'V. Indem aber die Figur A'B'C'D' hinaufrückt, gehet sie nach und nach durch alle Punkte des Körpers, und zugleich ihr Perimeter durch alle Punkte seiner Fläche; man kann daher sagen, die Fläche A'B'C'D' beschreibe den Körper, und die gebrochene Linie A'B'C'D' die Fläche desselben, und in dieser Hinsicht diese die erzeugende Linie und jene die erzeugende Fläche nennen.

Mit Hülfe dieser Benennungen lassen sich nun die in § 162 und § 163 gefundenen Resultate auf die folgende Art ausdrucken:

1) Der Inhalt eines jeden abgekürzten prismatischen Körpers ist dem Produkte aus dem senkrechten Schnitte in den Weg des Schwerpunktes der erzeugenden Fläche gleich.

2) Die Fläche eines jeden abgekürzten prismatischen Körpers, (die beyden Grundflächen nicht mitgerechnet,) ist dem Produkte aus der Peripherie des senkrechten Schnittes in den Weg des Schwerpunktes der erzeugenden Linie gleich.

Hieraus folgt, daß wenn die obere oder untere Grundfläche sich um den Schwerpunkt ihrer Fläche auf jede beliebige Art drehet, dadurch der Inhalt des abgekürzten prismatischen Körpers weder größer noch kleiner wird, und daß das Nämliche für die Fläche des Körpers gilt, wenn sich die Grundflächen um die Schwerpunkte ihrer Peripherien drehen.

§ 165.

Aufg. Den Inhalt eines jeden Körpers aus den bekannten Schwerpunkten seiner Gränzflächen zu finden.

Aufl. Man lasse von allen Eckpunkten des Körpers Per-

pendikel auf eine, nach Willkühr angenommene Ebene herab, und berechne alle hierdurch entstehende abgekürzte Prismen nach dem vorigen §, indem man nämlich die Projektion einer jeden Gränzfläche mit der Höhe ihres Schwerpunktes über der Ebene multiplicirt; die algebraische Summe aber dieser Produkte giebt alsdann den Inhalt des Körpers.

XIII. Runde, ringförmige und krumme Körper.

---

§ 166.

Aufg. Den Inhalt und die Oberfläche eines parallel mit der Grundfläche abgekürzten Kegels zu finden.

Aufl. In § 101 wurde der Inhalt einer parallel mit der Grundfläche abgekürzten Pyramide $= \frac{1}{3} h (G + g + \sqrt{Gg})$ gefunden, wo G, g, h, die beyden Grundflächen und die Höhe bezeichneten. Der Kegel kann als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten angesehen werden; die Formel gilt also auch für den abgekürzten Kegel.

Es sey nun der Halbmesser der einen Grundfläche $= R$, und der Halbmesser der anderen $= r$; so ist $G = \pi R^2$, $g = \pi r^2$, und daher auch der Inhalt des abgekürzten Kegels

$$= \frac{1}{3} \pi h [R^2 + r^2 + Rr].$$

2) Es sey PQpq (Fig. 73) der abgekürzte Kegel, SPQ der ganze Kegel, zu welchem er gehört, die Seite Pp des abgekürzten Kegels $= s$, und seine Ergänzung pS zu der des ganzen $= x$, also $PS = s + x$; alsdann ist, wie bekannt, die

Fläche des Kegels Spq $= \pi rx$, und die des Kegels SPQ $= \pi R(s+x)$; also die Fläche des abgekürzten Kegels, die Grundflächen nicht mitgerechnet, $= \pi [R(s+x) - rx]$.

Sind nun C, c die Mittelpunkte der beyden Kreise, so ist CP : cp = SP : sp, oder $R : r = x + s : x$; folglich $x = \frac{rs}{R-r}$. Substituirt man diesen Werth in den vorigen Ausdruck, so erhält man die Fläche des abgekürzten Kegels $= \pi s \frac{R^2 - r^2}{R - r} = \pi s (R + r)$.

§ 167.

Aufg. Den Inhalt und die Oberfläche einer Kugelzone und eines Kugelabschnittes zu finden.

Aufl. AFB (Fig. 74) sey ein Halbkreis über AB, E dessen Mittelpunkt, ABCD ein Rechteck über AB, seine Höhe dem Halbmesser gleich, F der Berührungspunkt der Linie DC und des Halbkreises; es seyen ferner DE, CE, EF, gezogen, wie auch KG der AB parallel; sie schneidet den Halbkreis in a, b, das Dreyeck DEC in d, e, und die Linie EF in f. Die ganze Figur drehe sich um EF, so beschreibt das Rechteck ADFE einen Cylinder, der Quadrant AFE eine Halbkugel, das Dreyeck DFE einen Kegel, und das Dreyeck DAE einen hohlen runden Körper. In der Elementar-Geometrie wird nun gezeigt, daß der Inhalt des ganzen hohlen Körpers der ganzen Halbkugel, und derjenige Theil desselben, welcher durch das Trapez AKdE beschrieben wird, der durch AafE beschriebenen Zone gleich sey; daß ferner die Oberfläche der ganzen Halbkugel der durch AD beschriebenen Cylinderfläche, die Oberfläche der Zone, welche aus Aa entstehet, der durch AK beschriebenen Cylinderfläche, und der Kugelabschnitt, welcher aus der Umdrehung des Segments aFf entstehet, der durch DK beschrie-

benen Cylinderfläche, gleich sey. Es kommt nun darauf an, welche Stücke man als gegeben ansiehet, um das Uebrige zu bestimmen. Ich will Ef und den Halbmesser der Kugel für gegeben annehmen, und Ef = h, den Halbmesser = r setzen. Man verfährt nun wie folgt.

1) Man suche den Inhalt des Kegels dEc. Der Halbmesser seiner Grundfläche ist df = fE = h, und seine Höhe ebenfalls = h, also sein Inhalt = $\frac{1}{3}\pi h^3$. Der Inhalt des Cylinders ABGK ist = $\pi r^2 h$; also der Inhalt des durch das Trapez AKdE beschriebenen Körpers = Cyl. AKGB — Kegel dEc = $\pi h (r^2 - \frac{1}{3}h^2)$. Es ist folglich auch der Inhalt der durch AafE beschriebenen Zone AabB

$$= \pi h\ (r^2 - \tfrac{1}{3}h^2).$$

2) Wird diese Zone von der Halbkugel AFB abgezogen, deren Inhalt = $\frac{2}{3}\pi r^3$, so erhält man den Inhalt des Kugelabschnittes aFb

$$= \tfrac{1}{3}\pi\ (2r^3 - 3r^2 h + h^3) = \tfrac{1}{3}\pi (r - h)^2 (2r + h).$$

Der Kugelabschnitt aFb ist demnach so groß als ein Kegel, welcher einen mit Ff = r — h, als Halbmesser beschriebenen Kreis zur Grundfläche, und 2r + h zur Höhe hat.

3) Die Oberfläche der Zone AabB ist der Oberfläche des Cylinders ABGK gleich. Da nun diese = $2\pi r h$, so ist auch die Oberfläche der Zone AabB

$$= 2\pi r h.$$

4) Die Fläche des Kugelabschnitts aFb erhält man, wenn man von der Oberfläche der Halbkugel = $2\pi r^2$, die Fläche der Zone AabB abziehet. Demnach ist die Fläche des Kugelabschnitts aFb

$$= 2\pi r\ (r - h).$$

Denkt man sich nun die Sehne aF gezogen, so ist

$aF^2 = 2r \cdot Ff = 2r(r-h)$, und demnach die Oberfläche des Kugelabschnittes $aFb = \pi \cdot aF^2$, also einem Kreise gleich, welcher mit dem Halbmesser aF beschrieben worden.

§ 168.

Aufg. Den Inhalt eines kreisrunden Kugelausschnittes, wie auch den einer Kugelpyramide zu finden.

Aufl. 1) Bey der Umdrehung der Fig. 74 um EF beschreibt der Kreisausschnitt aEF einen Kugelausschnitt. Da man sich denselben aus lauter unendlich kleinen Pyramiden, welche die Elemente der Kugelfläche aFb zur Grundfläche, und ihre Spitzen in E haben, zusammengesetzt denken kann; so findet man den Inhalt eines solchen Kugelausschnitts, wenn man die Kugelfläche aFb mit dem dritten Theile des Halbmessers der Kugel multiplicirt. Nach dem vorigen § ist aber die Kugelfläche $aFb = 2\pi r(r-h)$; man findet also den Inhalt des Kugelausschnittes

$$= \tfrac{2}{3}\pi r^2 (r-h).$$

2) Denkt man sich auf der Oberfläche einer Kugel ein sphärisches Vieleck beschrieben, und nach den Winkelspitzen desselben Halbmesser gezogen, so entstehet der Körper, den man eine Kugelpyramide nennt; seine Grundfläche ist die krumme Fläche des sphärischen Vielecks, und seine Spitze der Mittelpunkt der Kugel. Die Seitenflächen dieses Körpers sind lauter Kreisausschnitte; die Neigungswinkel ihrer Ebenen sind nichts anders als die Winkel des sphärischen Vielecks. Nennt man s die Summe dieser Winkel, so ist nach § 60 die Fläche des Vielecks $= \frac{s-(n-2)\,180^\circ}{720^\circ} S$, wo S die Oberfläche der ganzen Kugel $= 4\pi r^2$ bezeichnet. Multiplicirt man dies

sen Ausdruck mit $\frac{1}{3}r$, so erhält man den Inhalt der Kugelpyramide,

$$= \frac{s - (n-2)\,180^\circ}{540^\circ}\,r^3.$$

§ 169.

Aufg. Wenn ein Dreyeck mit einer geraden Linie in einer Ebene liegt, und die Ebene sich um diese gerade Linie als um eine Axe drehet, so beschreibt bey dieser Umdrehung das Dreyeck einen ringförmigen dreykantigen Körper: man soll den Inhalt eines solchen Körpers finden.

Aufl. 1) Es sey ABC (Fig. 75) irgend ein Dreyeck, MN eine Linie von beliebiger Lage; Aa, Bb, Cc, seyen drey Perpendikel auf der Linie MN. Wenn die Ebene der Figur sich um die Linie MN als Axe drehet, so beschreiben die Trapeze AabB, BbcC, AacC, drey abgekürzte Kegel, das Dreyeck ABC aber den ringförmigen Körper, dessen Inhalt gesucht wird; man erhält diesen Inhalt, wenn man von der Summe der zwey ersten Kegel den dritten abziehet.

2) Man setze, der Kürze wegen, $Aa = a$, $Bb = b$, $Cc = c$, $ab = h$, $bc = l$; alsdann ist nach § 166 der Inhalt des abgekürzten Kegels AabB $= \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$, des abgekürzten Kegels BbcC $= \frac{1}{3}\pi l(b^2 + bc + c^2)$, des abgekürzten Kegels AacC $= \frac{1}{3}\pi(h + l)(a^2 + ac + c^2)$; folglich der Inhalt des ringförmigen Körpers

$$= \tfrac{1}{3}\pi h(ab + b^2 - ac - c^2) + \tfrac{1}{3}\pi l(b^2 + bc - a^2 - ac)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi h(b - c)(a + b + c) + \tfrac{1}{3}\pi l(b - a)(a + b + c)$$
$$= \pi \cdot \frac{a + b + c}{3}[h(b - c) + l(b - a)].$$

3) Es ist aber der Inhalt des Trapezes AabB $= h \cdot \frac{a + b}{2}$,

des Trapezes BbcC $= 1 \cdot \frac{b + c}{2}$, des Trapezes AacC $=$ $(h + 1) \frac{a + c}{2}$, und daher,

$$\triangle ABC = \text{Trap. } AabB + \text{Trap. } BbcC - \text{Trap. } AacC$$
$$= \frac{h(b - c) + l(b - a)}{2};$$

folglich $h(b - c) + l(b - a) = 2 \triangle ABC.$

4) Wird das, was hier zur Rechten stehet, für das was zur Linken stehet, in dem in 2 gefundenen Ausdruck substituirt, so erhält man den Inhalt des ringförmigen Körpers

$$= 2\pi \triangle ABC \cdot \frac{a + b + c}{3}.$$

Der Körper ist also einem Prisma gleich, dessen Grundfläche das Dreyeck ABC ist, und dessen Höhe $= 2\pi \cdot \frac{a + b + c}{3}$.

Zus. Ist S der Schwerpunkt des Dreyecks ABC, und Ss auf MN perpendikulär, so ist nach dem zweytem Satz in § 161 $Ss = \frac{a + a + c}{3}$; folglich der Inhalt des Körpers

$$= 2\pi \cdot Ss \cdot \triangle ABC.$$

Da nun $2\pi \cdot Ss$ die Peripherie eines mit Ss beschriebenen Kreises ist, so ist der Inhalt des ringförmigen Körpers auch einem Prisma gleich, dessen Grundfläche das Dreyeck ABC, und dessen Höhe die Peripherie dieses Kreises ist.

§ 170.

Aufg. Den Inhalt eines jeden Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung einer ebenen geraden oder krummlinigen Figur um ihre Axe entstehet, unter der Vor-

aussetzung, daß der Schwerpunkt und der Flächeninhalt dieser Figur schon bekannt sey.

Aufl. 1) Es sey ABCDEF (Fig. 76) irgend eine geradlinige ebene Figur, hier ein Sechseck; LM eine gerade Linie, welche mit ihr in einer Ebene liegt. Drehet sich die Figur um die Linie LM als um eine Axe, so beschreibt jedes der Dreyecke ABC, ACF, u. s. w., in welche die Figur zerlegt werden kann, einen solchen dreykantigen ringförmigen Körper, wie er im vorigen § berechnet worden. Die Summe aller dieser Ringe giebt den ganzen Ring, welcher durch die Umdrehung des Vielecks ABCDEF erzeugt wird. Sind nun P, Q, R, u. s. w. die Schwerpunkte der respektiven Dreyecke, V der Schwerpunkt der Figur ABCDEF, ferner Vv, Pp, Qq, Rr, u. s. w. auf LM perpendikulär; so ist nach dem a. O. der Inhalt des Körpers, welcher durch das Dreyeck ABC erzeugt wird, $= 2\pi \,.\, \triangle ABC \,.\, Pp$, der welcher durch das Dreyeck ACF erzeugt wird, $= 2\pi \,.\, \triangle ACF \,.\, Qq$, u. s. w.; folglich der Inhalt des ganzen Körpers

$$= 2\pi (\triangle ABC \,.\, Pp + \triangle ACF \,.\, Qq + \triangle FCD \,.\, Rr + \text{ꝛc.})$$

Das, was hier in Klammern eingeschlossen wird, ist aber nach dem ersten Satze in § 161 = Polyg. ABCDEF × Vv; man hat also den Inhalt des gesuchten Körpers

$$= 2\pi \,.\, Vv \,.\, \text{Polyg. } ABCDEF.$$

Es ist aber $2\pi \,.\, Vv$ die Peripherie des Kreises, welchen der Schwerpunkt der Figur bey der Umdrehung beschreibt; man findet also den Inhalt des durch das Vieleck ABCDEF beschriebenen Körpers, wenn man den Inhalt desselben mit der Peripherie des Kreises multiplicirt, welchen ihr Schwerpunkt beschreibt.

2) Jede krummlinige Figur kann als ein Vieleck von unendlich

endlich vielen unendlich kleinen Seiten angesehen werden; man findet also auch den Inhalt eines durch eine krummlinige Figur erzeugten Körpers, wenn man den Inhalt dieser Figur mit der durch den Schwerpunkt beschriebenen Kreisperipherie multiplicirt.

Zus. Hieraus folgt, daß in jedem Falle der durch die Umdrehung einer Figur um eine Axe erzeugte Körper, einem prismatischen Körper gleich ist, dessen Grundfläche die erzeugende Figur, und deren Höhe die durch den Schwerpunkt beschriebene Kreisperipherie ist.

§. 171.

Aufg. Die krumme Fläche eines Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung einer gerad- oder krummlinigen Figur um eine feste Axe erzeugt wird.

Aufl. 1) Es sey ABCD... (Fig. 77) die Figur, welche sich um die Linie LM als Axe drehet, und so den ringförmigen Körper beschreibt, dessen Oberfläche gesucht wird. Um diese zu finden, darf man nur die abgekürzten Kegelflächen berechnen, welche durch die Linien AB, BC, CD, u. s. w. beschrieben werden; die Summe aller dieser Kegelflächen giebt alsdann die Oberfläche des ganzen Körpers.

2) Nun ist aber, wenn auf LM die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Dd, u. s. w. gezogen werden, die durch die Linie AB beschriebene abgekürzte Kegelfläche $= \pi \,.\, AB\,(Aa + Bb)$ (§ 166); die durch BC beschriebene $= \pi \,.\, BC\,(Bb + Cc)$; die durch CD beschriebene $= \pi \,.\, CD\,(Cc + Dd)$; u. s. w.; folglich die Oberfläche des ganzen Körpers =

$$\pi\,[AB\,(Aa + Bb) + BC\,(Bb + Cc) + CD\,(Cc + Dd) + \text{rc.}]$$

3) Werden die Linien AB, BC, CD, u. s. w. in P, Q, R, u. s. w. halbirt, und aus diesen Punkten auf LM die Per-

pendikel Pp, Qq, Rr, u. s. w. gezogen, so läßt sich leicht beweisen, daß $Aa + Bb = 2 . Pp$, $Bb + Cc = 2 . Qq$, $Cc + Dd = 2 . Rr$, u. s. w. Man kann demnach die gesuchte Fläche auch so ausdrucken:

$$2\pi [AB . Pp + BC . Qq + CD . Rr + \text{rc.}].$$

4) Die Punkte P, Q, R, u. s. w. sind nichts anders als die Schwerpunkte der Linien AB, BC, CD, u. s. w., und daher $AB . Pp$, $BC . Qq$, $CD . Rr$, u. s. w. die Momente dieser Linien in Beziehung auf LM. Es sey nun V der Schwerpunkt der Peripherie ABCD..., d. h. der Schwerpunkt der Figur, in so fern die Seiten derselben AB, BC, CD, rc. allein als schwer angesehen werden; so ist, nach den Grundlehren der Statik,

$$AB . Pp + BC . Qq + CD . Rr + \text{rc.} = Vv \times \text{Periph. } ABCD...$$

5) Aus 3 und 4 erhält man also für die krumme Fläche des, durch die Figur ABCD... beschriebenen Körpers den Ausdruck,

$$2\pi . Vv \times \text{Periph. } ABCD...;$$

d. h. man findet diese Fläche, wenn man die Peripherie ABCD... mit der Peripherie eines, mit dem Halbmesser Vv beschriebenen Kreises multiplicirt.

6) Da ferner jede krummlinige Figur als eine geradlinige von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, so gilt das, was hier gesagt worden, auch für jeden durch eine krummlinige Figur beschriebenen Körper.

§ 172.

Aus § 170 und 171 ergiebt sich die folgende Regel:

Die Fläche oder der Körper, die durch die Umdrehung einer Linie oder Figur um eine feste Axe erzeugt werden, werden durch das Produkt der erzeugenden

Grösse (Linie oder Fläche) in den Weg ihres Schwerpunktes ausgedrückt.

Dieser Satz heißt gewöhnlich **Guldins Regel**, weil Guldin, ein Jesuit aus St. Gallen gebürtig, ihn in seinem Werke de centro gravitatis 1635 — 1642 vorgetragen, und auf viele Fälle angewandt hat. Er findet sich aber auch schon in des Pappus mathem. Sammlungen. (M. s. Klügels mathem. Wörterbuch, Artikel centrobaryca methodus, I. Th. S. 428.)

Uebrigens ist leicht einzusehen, daß, um die Fläche oder den Inhalt des Körpers zu finden, welcher entstehet, wenn die erzeugende Linie oder Figur nicht die ganze Umdrehung, sondern nur einen Theil derselben vollendet, die erzeugende Linie oder Fläche nur mit dem Bogen multiplizirt werden muß, welchen der Schwerpunkt beschreibt.

§ 173.

Es lassen sich aus der Guldinischen Regel verschiedene, theils nützliche, theils schöne Folgerungen ziehen, von denen ich nur die folgenden anführen will.

1) Die beschreibende Figur sey ein Kreis, sein Halbmesser $= r$. Bekanntlich ist der Mittelpunkt eines Kreises sowohl der Schwerpunkt seiner Fläche, als seiner Peripherie. Setzt man seine Entfernung von der Umdrehungsaxe $= a$, so ist der durchlaufene Weg desselben bey der ganzen Umdrehung $= 2\pi a$, und daher der Inhalt des beschriebenen Körpers $= \pi r^2 . 2\pi a = 2\pi^2 r^2 a$, und seine Fläche $= 2\pi r . 2\pi a = 4\pi^2 ra$.

2) Die beschreibende Figur sey ein reguläres Vieleck, die Anzahl seiner Seiten $= n$, und der Halbmesser des Kreises, worin es beschrieben werden kann $= r$; folglich der Inhalt

desselben $= \frac{1}{2} nr^2 \text{Sin.} \frac{360^\circ}{n}$, und die Peripherie $2 nr \text{Sin.} \frac{180^\circ}{n}$. Der Schwerpunkt sowohl der Fläche, als des Umfangs eines regulären Vielecks ist der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises. Setzt man daher die Entfernung dieses Punktes von der Umdrehungsaxe $= a$; so ist der Inhalt des beschriebenen Körpers $= \frac{1}{2} nr^2 \text{Sin.} \frac{360^\circ}{n} . 2\pi a = n \pi r^2 a \text{ Sin.} \frac{360^\circ}{n}$, und seine Fläche $= 4 n \pi a r \text{ Sin.} \frac{180^\circ}{n}$.

3) Es sey ABC (Fig. 78) irgend eine krumm-, oder gerad-linige aus zwey ähnlichen und gleichen Hälften ABD, CBD, bestehende Figur, P der Schwerpunkt der einen Hälfte ABD, und Q der Schwerpunkt der andern Hälfte BCD, also die Linie PQ auf der Axe BD der Figur perpendikulär.

Es sey ferner LM die Umdrehungsaxe Pp, Qq, auf ihr perpendikulär, und Qn ihr parallel. Bezeichnet man nun den Inhalt der ganzen Figur durch F, so ist der Inhalt des, durch die Hälfte ABD beschriebenen Körpers, $= 2\pi . \text{Pp} \times \frac{1}{2}\text{F}$, und der Inhalt des, durch die Hälfte BCD beschriebenen Körpers, $= 2\pi . \text{Qq} \times \frac{1}{2}\text{F}$; folglich die Differenz dieser beyden Körper $= 2\pi (\text{Pp} - \text{Qq}) \times \frac{1}{2}\text{F} = \pi . \text{Pn} \times \text{F}$. Die Differenz der, durch die beyden Hälften beschriebenen Körper, ist demnach dem Produkte der ganzen Figur in die Peripherie eines Kreises gleich, dessen Durchmesser die Differenz zwischen den Entfernungen der Schwerpunkte dieser Hälften von der Umdrehungsaxe ist.

Ist die Axe der Figur BD der Umdrehungsaxe LM parallel, so fällt Qq auf Pp, und Pn gehet in PQ über; für diesen Fall ist also die Differenz der, durch die Hälften ABD, BCD, beschriebenen Körper $= \pi . \text{PQ} \times \text{F}$.

Man lasse nun BD selbst die Umdrehungsaxe seyn, und die Figur ABD sich um diese Linie drehen; so entstehet ein runder Körper, dessen Inhalt gefunden wird, wenn man die Figur ABD mit dem Wege ihres Schwerpunktes P multiplicirt; er ist also $= 2\pi . PV \times \frac{1}{2}F = \pi . PV \times F = \frac{1}{2}\pi . PQ \times F$. Hieraus folgt, daß in dem Falle, da BD der LM parallel ist, immer die Differenz der beyden, durch die Umdrehung der Hälften ABD, CBD, um LM erzeugten ringförmigen Körper, doppelt so groß ist, als der runde Körper, welcher durch die Umwälzung der Figur ABC um BD erzeugt wird.

4) Man denke sich jetzt P (Fig. 78) als den Schwerpunkt der einen Hälfte AB, und Q als den Schwerpunkt der anderen Hälfte BC, der krummen oder gebrochenen Linie ABC; so ist wieder PQ auf BD perpendikulär, und PV = VQ. Bey der Umdrehung der gebrochenen oder krummen Linie ABC, deren Länge ich = H setze, um LM als Axe, beschreibt die Hälfte AB eine Fläche, deren Inhalt $= 2\pi . Pp \times \frac{1}{2}H$, und die Hälfte BC eine Fläche, deren Inhalt $= 2\pi . Qq \times \frac{1}{2}H$. Die Differenz dieser beyden Flächen ist also $= \pi (Pp - Qq) \times H = \pi . Pn \times H$. Sie wird daher gefunden, wenn man die erzeugende Linie ABC mit der Peripherie eines Kreises multiplicirt, dessen Durchmesser die Differenz zwischen den Entfernungen der Schwerpunkte der beyden Hälften von der Umdrehungsaxe ist.

Ist BD der LM parallel, so ist diese Differenz $= \pi . PQ \times H$.

Die runde Fläche, welche durch die Umdrehung der Linie ABC um BD erzeugt wird, ist $2\pi . PV \times \frac{1}{2}H = \pi . PV \times H = \frac{1}{2}\pi . PQ \times H$. Die Differenz der durch die Umdrehung der Hälften AB, BC um LM erzeugten Flächen ist demnach,

unter der Voraussetzung, daß BD der LM parallel sey, immer doppelt so groß, als die durch die Umdrehung der Linie ABC und BD erzeugte Fläche.

§. 174.

Aufg. Eine ebene gerad- oder krummlinige Figur bewegt sich längs einer krummen oder doppelt gekrümmten Linie *) so, daß ihre Ebene immer auf der Richtung ihrer Bewegung perpendikulär bleibt: man soll den kubischen Inhalt des erzeugten Körpers finden.

Aufl. Es sey AB (Fig. 79) die erzeugende Figur, AC irgend eine gerade, krumme oder doppelt gekrümmte Linie, längs welcher die Figur sich so bewegt, daß sie beständig auf selbiger, oder, um mich bestimmter auszudrucken, auf der Tangente an selbiger perpendikulär bleibt. Durch diese Bewegung wird ein Körper ABCD erzeugt, dessen Inhalt gesucht wird.

1) Man stelle sich vor, die Figur AB sey schon längs der krummen AC um das Stück AA′ fortgerückt, und befinde sich jetzt in A′B′. Läßt man sie noch um ein Stück A′A″ weiter rücken, so beschreibt sie ein Stück des Körpers A′B′B″A″, welches, wie sogleich gezeigt werden soll, einem geraden abgekürzten prismatischen, oder prismenähnlichen Körper um so näher kommt, je kleiner A′A″ genommen wird.

2) Da nämlich, nach der Voraussetzung, alle Punkte der erzeugenden Figur immer einerley Richtung haben; so muß, wenn die Figur AB in A′B′ angelangt ist, die Tangente A′a der krummen Linie AC, welche der Punkt A beschreibt, der Tangente M′m der krummen Linie MP, welche irgend ein

*) Eine doppelt gekrümmte Linie (ligne à double courbure) nenne ich eine solche, deren Elemente in verschiedenen Ebenen liegen, wie etwa die Schraubenlinie.

anderer Punkt M beschreibt, parallel seyn. Denkt man sich nun aus allen Punkten der Peripherie der Figur A'B' Linien der A'a parallel gezogen, so schließen alle diese Linien einen prismatischen oder prismenähnlichen Raum ein; und wenn derselbe von der Ebene der Figur A''B'' in ab geschnitten wird, so entstehet ein gerader abgekürzter prismatischer Körper A'B'ba, dessen Inhalt nach §. 162. gefunden wird, wenn man die Grundfläche A'B' mit der Entfernung ihres Schwerpunktes M' vom Schwerpunkte m der Figur ab multiplicirt. Der Inhalt dieses Körpers ist demnach = A'B' × M'm = AB × M'm.

3) Je näher die Fläche A''B'' an A'B' rückt, desto mehr nähert sich der Theil des Körpers A'B'B''A'' dem prismatischen Körper A'B'ba, so daß ihr Unterschied kleiner als jede angebliche Größe werden kann. Zu gleicher Zeit rückt auch der Punkt m immer näher an den Schwerpunkt M'' der Fläche A''B'', so daß auch die Entfernung dieser Punkte kleiner als jede angebliche Größe werden kann. Man weiß aber schon aus anderen Beweisen dieser Art, daß in einem solchen Falle, wenn die Flächen A'B', A''B'' sich unendlich näheren, das Element A'B'B''A'' für A'B'ba, und das Element M'M'' für M'm genommen werden kann; man kann also auch den Inhalt des unendlich kleinen Elements A'B'B''A'' durch AB × M'M'' ausdrücken.

4) Für jedes andere Element des Körpers ABCD findet man einen ähnlichen Ausdruck. Da nun in allen diesen Ausdrücken der eine Faktor AB unverändert bleibt, der andere Faktor aber ein Element der krummen Linie MP ist; so findet man den Inhalt des Körpers ABDC, wenn man die Fläche AB mit der Summe aller dieser Elemente d. h. mit der Linie MP multiplicirt.

5) Der Inhalt des Körpers ABDG, wird also durch das Produkt der erzeugenden Fläche in den Weg ihres Schwerpunktes ausgedrückt.

§ 175.

Aufg. Die krumme Fläche eines Körpers wie der im vorigen § zu finden.

Aufl. Die Fläche eines solchen Körpers wird durch die Linie beschrieben, welche die Figur AB (Fig. 79) begränzt; der Schwerpunkt dieser Linie sey in M, ihre Länge = L. Es sey ferner MP der Weg, welchen der Punkt M bey der Bewegung der Figur beschreibt.

1) Man denke sich wieder den Körper in lauter unendlich kleine Schichten, wie A'B'B''A'' abgetheilt. Die Fläche eines solchen Elements ist, wie aus dem vorigen § erhellet, der Fläche des unendlich kleinen abgekürzten Prismas A'B'ba gleich.

2) Es sey nun m der Schwerpunkt der Linie, welche den Schnitt ab begränzt; so ist nach § 163 die Fläche des Prismas A'B'ba = L × M'm = L × M'M''; also auch die Fläche des Elements A'B'B''A'' = L × M'M''. Die Summe aller dieser unendlich kleinen Flächen ist der Fläche des ganzen Körpers, und die Summe aller Elemente M'M'' der ganzen Linie MP gleich. Man erhält also für die Fläche des Körpers ABDG den Ausdruck L × MP.

3) Die Fläche eines solchen Körpers wird also durch das Produkt der erzeugenden Linie in den Weg ihres Schwerpunktes ausgedrückt.

§ 176.

Aus § 174 und § 175 ergiebt sich der folgende, wegen seiner Allgemeinheit sehr merkwürdige Satz:

Wenn irgend eine gerad- oder krummlinige Figur, sich längs einer geraden, krummen, oder doppelt ge-

schnitten Linie so bewegt, daß sie immer auf der Richtung ihrer Bewegung perpendikulär bleibt, so giebt das Produkt der erzeugenden Figur in den Weg ihres Schwerpunktes, den Inhalt, und das Produkt der erzeugenden Linie in den Weg ihres Schwerpunktes die Fläche des beschriebenen Körpers.

Guldins Satz ist nur ein einzelner Fall von diesem weit allgemeineren; denn wenn eine Figur sich um eine Axe drehet, so bleibt dieselbe immer auf der Richtung ihrer Bewegung perpendikulär.

§ 177.

Aufg. Eine ebene gerad- oder krummlinige Figur bewegt sich längs einer geraden, krummen, oder doppelt gekrümmten Linie so, daß sie beständig gegen die Richtung ihrer Bewegung unter demselben gegebenen Winkel $= \mu$ geneigt ist: man soll den Inhalt und die Fläche des dadurch erzeugten Körpers finden.

Aufl. Für den gegenwärtigen Fall muß man das Element $A'B'B''A''$ (Fig. 79) nicht, wie in § 162 und § 163 geschehen ist, als ein gerades, sondern als ein schiefes, abgekürztes Prisma ansehen, dessen Inhalt oder Fläche nach § 164 dem Produkte seines senkrechten Schnittes, oder dessen Peripherie in den Weg des Schwerpunktes der erzeugenden Fläche oder Linie gleich ist. Die Fläche oder die Peripherie des senkrechten Schnittes ist aber nichts anders als die Projektion der erzeugenden Fläche für den Winkel $90° - \mu$; also ist der Inhalt oder die Fläche des Elements $A'B'B''A''$ dem Produkte der Projektion der erzeugenden Fläche oder ihrer Peripherie in den unendlich kleinen Weg des Schwerpunktes der erzeugenden Fläche oder Linie gleich. Denkt man sich nun den

ganzen Körper aus lauter solchen Elementen zusammen gesetzt, so erhält man den folgenden Satz:

Der Inhalt und die Fläche eines Körpers, der durch die Bewegung einer, gegen die jedesmalige Richtung unter demselben gegebenen Winkel geneigte Fläche erzeugt wird, ist immer dem Produkte aus der Projektion der erzeugenden Fläche oder Linie, für die Ergänzung des gegebenen Winkels zu 90°, in den Weg des Schwerpunktes der erzeugenden Fläche oder Linie gleich.

Zus. Läßt man irgend einen prismatischen Körper ABCDA′B′C′D′ (Fig. 71) sich so bewegen, daß seine Seitenlinien immer der jedesmaligen Richtung der Bewegung parallel bleiben, so durchläuft der Schwerpunkt des schiefen Schnittes ABCD, oder der seiner Peripherie, einen Weg, der dem gleich ist, welchen der Schwerpunkt des senkrechten Schnittes abcd, oder der seiner Peripherie durchläuft. Da nun auch der Schnitt abcd die Projektion des Schnittes ABCD ist, so beschreiben nach dem obigen Satze, diese Schnitte zwey Körper von gleichem Inhalte und gleicher Fläche. Hieraus folgt aber ferner, daß alle Schnitte eines Prisma bey der vorausgesetzten Bewegung Körper von gleichem Inhalte und gleicher Fläche erzeugen.

§. 178.

Es sey AQP (Fig. 80) irgend eine Ebene, AB eine unbegränzte, gegen diese Ebene unter einem beliebigen Winkel geneigte, oder auf ihr senkrechte gerade Linie; es sey ferner CDP irgend eine krumme Linie, und die Ebene, worin sie liegt, der Linie AB parallel. Man stelle sich vor, eine gerade Linie AP bewege sich längs der geraden AB, und der krummen Linie CDP so, daß sie während dieser Bewegung beständig der Ebene AQP parallel bleibe, bis sie in BC ankommt; so beschreibt

diese Linie eine Art krummer Flächen, welche man in der Stereotomie konoidische Flächen nennt.

Man lege durch AB und BC die Ebene ABCQ; sie schneide die Ebene AQP in AQ, und die Ebene der krummen Linie in CQ. Man erhält durch diese Construktion einen Körper, welcher von dem Parallelogramme ABCQ, der gemischtlinigen Figur CDPQ, dem Drenecke AQP, und der konoidischen Fläche eingeschlossen wird. Ein solcher Körper wird eine Konoid genannt, die Fläche CDPQ seine Grundfläche, und die Linie AB seine Axe, die Entfernung der Axe von der Grundfläche seine Höhe. Stehet die Axe auf der Ebene APQ senkrecht, so heißt der Körper ein gerades, in allen anderen Fällen ein schiefes Konoid. Die Linie CDP, bisweilen auch AB, wird die Richtlinie genannt.

Ist in einem geraden Konoid die Grundfläche ein Quadrant, so hat man den Cono-Cuneus des Wallis. (M. s. Klügels Wörterbuch, I. Th. S. 546, Art. Cono-Cuneus.)

§ 179.

Aufg. Die Grundfläche und die Höhe eines Konoids ist gegeben; man soll den Inhalt eines jeden der Grundfläche parallelen Schnittes finden.

Aufl. cdpq (Fig. 80) sey ein solcher Schnitt; sein Inhalt wird gesucht.

1) Jeder der Ebene AQP parallele Schnitt des Körpers giebt ein geradliniges Dreneck. Es senen also DEF, GHK, zwey solche, der Ebene AQP parallele, unendlich nahe Drenecke; sie schneiden die Grundfläche CDPQ und den Schnitt cdpq, in den parallelen Linien DE, GH, de, gh. Die unendlich kleinen Trapeze DEGH, degh, welche hierdurch entstehen, können als Parallelogramme angesehen werden; so betrachtet, haben sie gleiche Höhe, und verhalten sich demnach

wie ihre Grundlinien DE, de. Es ist aber DE : de = EF : eF = BC : Bc; also ist auch DEGH : degh = BC : bc.

2) Denkt man sich nun den ganzen Körper in lauter solche, der Ebene AQP parallele Schichten, wie DEFGHK getheilt, so giebt jede dieser Schichten zwey Trapeze wie DEGH, degh, welche sich wie die Linien BC : Bc verhalten; es verhält sich also auch die Summe aller Trapeze DEGH, zur Summe aller Trapeze degh, wie BC zu Bc. Die erstere Summe giebt aber die Fläche CDPQ, und die letztere die Fläche cdpq; es verhalten sich demnach auch diese Flächen wie BC zu Bc.

3) Man lasse nun aus irgend einem Punkte der Are AB auf die Grundfläche ein Perpendikel fallen, so wird dasselbe durch die Ebene cdpq in dem nämlichen Verhältnisse wie BC geschnitten, weil man sich immer durch die Linie AB eine Ebene gelegt denken kann, welche den Ebenen CDPQ, cdpq, parallel ist, und nach Elem. XI. 17 zwey Linien von drey parallelen Ebenen immer in gleichem Verhältnisse geschnitten werden. Es verhält sich demnach auch die Grundfläche zu dem ihr parallelen Schnitte des Konoids, wie die Höhe desselben zum Abstande des Schnittes von der Are.

4) Ist daher die Grundfläche des Konoids, und der Abstand des Schnittes von der Are gegeben, so läßt sich auch der Inhalt des Schnittes finden.

Anmerk. Man könnte auch den Inhalt eines schiefen Schnittes finden (d. h. eines solchen, dessen Ebene die Ebene der Grundfläche schneidet); die Untersuchung dieser Schnitte erfordert aber einige Kenntniß der höhern Geometrie und muß daher hier übergangen werden.

§ 180.

Aufg. Den kubischen Inhalt eines Konoids zu finden.

Aufl. Es sey (Fig. 81) ABCQP ein Konoid RSKLMN ein dreyseitiges Prisma auf einer seiner Seitenflächen als Grundfläche gestellt; es wird angenommen, daß beyde Körper auf einer und derselben Ebene stehen, gleich große Grundflächen CPQ, KLMN und gleiche Höhe haben. Man denke sich nun diese beyden Körper durch irgend eine Parallelebene geschnitten. Der Schnitt des Prisma wird alsdann ein Parallelogramm klmn, welches mit der Grundfläche gleiche Winkel und eine gleiche Seite kl = KL hat; es ist folglich KLMN : klmn = KN : kn = RK : Rk. Denkt man sich ferner durch AB und RS eine Parallelebene gelegt, so werden die Linien RK, BC, in gleichen Verhältnissen geschnitten; folglich ist KLMN : klmn = BC : Bc. Der Schnitt des Konoids sey cpq; so ist nach dem vorigen §, CPQ : cpq = BC : Bc. Aus diesen beyden Proportionen erhält man CPQ : cpq = KLMN : klmn; es ist aber nach der Voraussetzung CPQ = KLMN, folglich ist auch cpq = klmn. Die Parallelschnitte der beyden Körper sind daher immer gleich, folglich auch die Körper selbst. Der Inhalt des Prisma, welches hier als ein halbes Parallelepiped angesehen werden muß, ist aber dem Produkte seiner Grundfläche in seine halbe Höhe gleich, folglich gilt das auch von dem Konoid.

Der Inhalt eines jeden Konoids ist demnach immer dem Produkte seiner Grundfläche in seine halbe Höhe gleich.

§ 181.

Wenn die Richtlinie CP (Fig. 81) eine gerade Linie ist, wie Fig. 82 zeigt, so beschreibt die erzeugende Linie AP eine eigene Art konoidischer Flächen, schiefe Flächen (surfaces gauches) genannt, welche von vier geraden Linien AB, BC, CP, AP, begränzt werden, weshalb sie auch schiefe Vierecke (quadrilatères gauches) genannt werden. Das Konoid

wird alsdann ein Körper, welcher von dem Parallelogramme ABCD den beyden Dreyecken ADP, CDP, und dem schiefen Vierecke ABCP begränzt wird. Der Inhalt dieses Körpers wird also nach dem vorigen § gefunden, wenn man seine Grundfläche CDP mit seiner halben Höhe multiplicirt.

Da die Linie AB der Ebene CDP parallel ist, so kann man auch diese Linie als die erzeugende Linie, und BC, AP, als die beyden Richtlinien ansehen. Alsdann ist aber ADP die Grundfläche des Konoids, und die Entfernung der Linie BC von der Ebene ADP seine Höhe. Es soll nun gezeigt werden, daß dieses neue Konoid von dem vorigen nicht verschieden sey.

§ 182.

Hülfssatz.

In einem schiefen Vierecke entstehet immer dieselbe Fläche, welche von seinen Seiten man auch als die erzeugende Linie ansehen mag.

Bew. 1) Was für ein schiefes Viereck auch ABCD (Fig. 83) seyn mag, so läßt sich doch immer durch AD eine Ebene ADP der Seite BC parallel legen, und eben so durch CD eine Ebene CDP der AB parallel. Man nehme nun zuerst AD oder BC für die erzeugende Linie, und setze, daß eine oder die andere dieser Linien sich längs der Seiten AB, DC, fortbewegt, und dabey immer der Ebene APD parallel bleibt, bis sie auf die andere fällt.

2) Es sey R ein Punkt der dadurch beschriebenen Fläche, EF die erzeugende Linie für diesen Punkt; ABCP eine Ebene durch AB, BC; AFEe eine andere Ebene durch AF, FE; die erstere schneide die Ebenen ADP, CDP, in AP, CP, und die letztere in Ae, Ee. Man erhält hierdurch die Parallelogramme ABCP, AFEe.

3) Man lege durch den Punkt R eine Ebene LkK der Ebene DPC parallel, sie schneide die Parallelogramme in Kk, Rr, und die Ebene ADP in Lk. Es soll nun zuerst bewiesen werden, daß alsdann die Punkte L, R, K in einer geraden Linie liegen werden.

4) Da die parallelen Ebenen DPC, LkK, durch die Ebene ADP geschnitten werden, so sind die Schnitte Lk, DP, parallel. Man hat daher AD : AL = DP : Lk, und AD : AL = De : Lr; also auch DP : Lk = De : Lr, oder DP : De = Lk : Lr. Die Linien CP, Ee, sind ebenfalls parallel; man hat also auch DP : De = CP : Ee, oder, da CP = Kk, Ee = Rr, DP : De = Kk : Rr. Durch die Verbindung dieser Proportion mit der vorigen erhält man, Kk : Rr = Lk : Lr; da nun die Linien Kk, Rr, zugleich parallel sind, so liegen die Punkte L, R, K, in einer geraden Linie.

5) Man stelle sich nun vor, eine von den Linien AB, CD, rücke so lange nach den Richtlinien AD, BC, fort, bis sie auf die andere fällt: so wird die erzeugende Linie auch einmal in Lk zu liegen kommen; und folglich ist R auch ein Punkt der hierdurch erzeugten schiefen Fläche. Die beyden hier betrachteten Flächen haben demnach den Punkt R gemeinschaftlich; und da dies für jeden ihrer Punkte gilt, so sind sie identisch.

Erst. Zus. Es braucht daher, wenn von einem schiefen Vierecke die Rede ist, nie die erzeugende Linie angegeben zu werden, weil es gleichgültig ist, welche von den Seiten man dafür annimmt.

Zweyt. Zus. Da die Linien BC, EF, der Ebene APD parallel sind, so kann man durch eine jede dieser Linien eine der Ebene APD parallele Ebene legen. Die Linien AB, DC, werden alsdann durch drey parallele Ebenen geschnitten, und es ist also DE : EC = AF : FB. Die erzeugende Linie schnei-

det daher immer ihre beyden Richtlinien in gleichen Verhältnissen. Man könnte also ein schiefes Viereck auch wie folgt definiren: es sey eine Fläche, welche entstehet, wenn sich eine Linie längs zweyer anderen so bewegt, daß sie diese immer in gleichen Verhältnissen schneidet.

Da sich ferner eben so erweisen läßt, daß auch die Linien BC, AD, durch die gerade Linie KRL in gleichen Verhältnissen geschnitten werden, so läßt sich schließen, daß der Durchschnittspunkt zweyer Linien, deren jede zwey gegenüber liegende Seiten des Vierecks in gleichen Verhältnissen schneidet, immer ein Punkt der schiefen Fläche ist.

§ 183.

Aufg. Den Inhalt eines, einer abgekürzten Pyramide ähnlichen Körpers, wie ABCFED (Fig. 84) zu finden, welcher von zwey parallelen dreyeckigen Grundflächen ABC, DEF, zwey schiefen Vierecken ABED, BCFE, und einem Paralleltrapez ACFD begränzt wird; jedoch nur unter der Voraussetzung, daß die dem Paralleltrapez gegenüber liegende Seitenlinie EB, der Fläche desselben parallel sey.

Aufl. 1) Man ziehe aus D und F die Linien DG, FH, der EB parallel; sie werden in die Ebene ADFC fallen, weil, der Voraussetzung gemäß, die Linie CB dieser Ebene parallel ist; man ziehe ferner BG, BH. Hierdurch wird der Körper in das Prisma GBHFED, und die beyden Konoiden AGBED, BHCFE, von der in § 181 erwähnten Art zerlegt.

2) Betrachtet man nun zuerst ABC als die Grundfläche des Körpers, und AGB, BHC, GBH als die Grundflächen der Konoiden und des Prismas; so ist, nach § 181, wenn die Höhe des Körpers = h gesetzt wird, das Konoid DEBGA =

$\triangle AGB \times \frac{1}{3}h$, das Konoid EFCHB $= \triangle BHC \times \frac{1}{3}h$; ferner das Prisma $= \triangle GBH \times h$; folglich der Inhalt des ganzen Körpers $= \frac{1}{3}h(\triangle ABG + \triangle BHC + 2\triangle GBH)$, oder, da $\triangle AGB + \triangle BHC + \triangle GBH = \triangle ABC$, und $\triangle GBH = \triangle DEF$, der gesuchte Inhalt des Körpers

$$= \frac{1}{3}h(\triangle ABC + \triangle DEF);$$

d. h. der Inhalt ist dem Produkte der Summe der beyden Grundflächen in die halbe Höhe gleich.

3) Denkt man sich aber den Körper auf dem Trapez ACFD als Grundfläche gestellt, und bezeichnet man die jetzige Höhe des Körpers oder die Entfernung der Kante EB von der Grundfläche durch h'; so hat man das Konoid DEBGA $= \triangle AGD \times \frac{1}{3}h'$, das Konoid EFCHB $= \triangle FHC \times \frac{1}{3}h'$, und das Prisma $=$ Prlgr. DGHF $\times \frac{1}{2}h'$; folglich den Inhalt des ganzen Körpers

$$= (\triangle AGD + \triangle FHC + \text{Prlgr. } DGHF)\,\frac{1}{2}h'$$

$$= \frac{1}{2}h' \times \text{Trap. } ACFD.$$

D. h. der Inhalt des Körpers ist dem Produkte der Grundfläche in die halbe Höhe gleich.

§ 184.

Aufg. Den Inhalt eines Körpers zu finden, welcher von zwey parallelen Dreyecken, einem Parallelogramme, und zwey schiefen Flächen eingeschlossen wird.

Aufl. Es sey ABCDEF (Fig. 85) ein solcher Körper, ABC, DEF, seyen seine beyden parallelen Grundflächen, ADEB das Parallelogramm, ADFC, BEFC, seine beyden schiefen Flächen.

Man ziehe die Linie FG den Linien DA, EB, parallel, und aus dem Punkte G, wo sie die Grundfläche trifft, die Linien GA, GB, GC. Hierdurch wird der Körper in die bey-

den Konoiden DFAGC, EFBGC, und in das Prisma ABGDEF zerlegt. Bezeichnet also h die Höhe des Körpers, so ist der Inhalt desselben $= \frac{1}{6}h(\triangle AGC + \triangle BGC + 2\triangle AGB) = \frac{1}{2}h(\triangle ABC + \triangle DEF)$.

Der Inhalt dieses Körpers wird daher ebenfalls, wie der des Körpers im vorigen §, durch das Produkt seiner beyden Grundflächen in die halbe Höhe ausgedruckt.

§ 185.

Aufg. Den Inhalt eines achteckigen, von zwey parallelen ebenen und vier schiefen Vierecken begränzten Körpers zu finden, jedoch nur unter der Bedingung, daß zwey gegenüber liegende Seitenlinien desselben einander parallel seyen.

Aufl. Einen solchen Körper zeigt Fig. 86; ABCD, EFGH, sind zwey parallele ebene Vierecke, welche man als seine Grundflächen ansehen kann; AEFB, BFGC, CGHD, DHEA, sind vier schiefe Vierecke; HD, FB, zwey parallele Seitenlinien.

Werden die Diagonalen BD, FH, gezogen, so entstehet das Parallelogramm BFHD; es theilt den Körper in zwey andere ABDEFH, BCDFGH, von der im vorigen § betrachteten Art. Der Inhalt eines jeden derselben ist dem Produkte seiner beyden Grundflächen in die halbe Höhe gleich; folglich ist auch der Inhalt des ganzen Körpers dem Produkte seiner beyden Grundflächen in die halbe Höhe gleich.

§ 186.

Aufg. Den Inhalt eines jeden, einer abgekürzten Pyramide ähnlichen Körpers zu finden, dessen Seitenlinien abwechselnd parallel sind, und der von zwey parallelen ebenen Grundflächen von einer geraden Anzahl der Seiten, und lauter schiefen Seitenflächen begränzt wird.

Aufl. ABCDEFGHIKLM (Fig. 87) sey ein solcher Körper, welcher hier sechsseitig angenommen worden; ABCDEF, GHIKLM, seyen seine beyden parallelen Grundflächen; GA, IC, LE, seine parallelen Seitenlinien; AGHB, BHIC u. s. w. beliebige schiefe Vierecke. Der Inhalt dieses Körpers soll = K gesetzt werden; ferner die eine Grundfläche ABCDEF = G, die andere GHIKLM = G′, und die Höhe des Körpers = h.

Man setze auf GHIKLM das Prisma GHIKLMAbCdEf, dessen Inhalt also = G′h, und ziehe die Linien Bb, Dd, Ff. Hierdurch entstehen um die Seitenflächen des Prismas die Konoiden GHABb, HIBCb, IKCDd, KLEDd, LMEFf, MGFAf, deren Inhalt gefunden wird, wenn man ihre Grundflächen AbB, BbC, CdD, ꝛc. mit $\frac{1}{2}$h multiplicirt. Da nun der gesuchte Körper aus dem Prisma und der algebraischen Summe dieser Konoiden zusammen gesetzt ist; so hat man

$$K = \tfrac{1}{2} h \left[\begin{array}{l} 2G' + \triangle AbB + \triangle BbC + \triangle CdD \\ + \triangle EdD - \triangle EfF - \triangle AfF \end{array} \right],$$

Es ist aber,

$$G' + \triangle AbB + \triangle BbC + \triangle CdD + \triangle EdD - \triangle EfF - \triangle AfF = G;$$

man hat also,

$$K = (G + G')\,\tfrac{1}{2}h.$$

Es läßt sich leicht begreifen, daß die hier gemachten Schlüsse, auf jeden anderen als sechsseitigen Körper der angegebenen Art angewandt, das nämliche Resultat geben müssen. Der Inhalt eines solchen Körpers ist demnach immer dem Produkte aus der Summe seiner beyden Grundflächen in die halbe Höhe gleich.

Zus. Der gefundene Ausdruck gilt auch alsdann noch,

wenn die Zahl der Seiten in jeder Grundfläche ungerade ist; nur wird in diesem Falle der Körper nicht mehr von lauter schiefen Seitenflächen begränzt, sondern von schiefen und einer parallelogrammischen Seitenfläche. Es versteht sich übrigens von selbst, daß, wenn zwey korrespondirende Seiten der Grundflächen, wie etwa AB, GH, in einer Ebene liegen, das schiefe Viereck ABHG sich in ein Paralleltrapez verwandelt, und wenn noch überdies die Punkte G, H, zusammen fallen, in ein Dreyeck; in dem letzteren Falle hat aber die obere Grundfläche eine Seite weniger. Für alle diese Körper und noch unzählig viele andere, welche aus der Veränderung der relativen Lage der Punkte B, D, F, ꝛc. H, K, M, ꝛc., hervorgebracht werden können, gilt der obige Ausdruck für den Inhalt.

§ 187.

Aufg. Den Inhalt eines keilförmigen Körpers zu finden, welcher von zwey Dreyecken, einem Parallelogramme, einem Trapeze und einem schiefen Vierecke begränzt wird.

Aufl. ABCDEF (Fig. 88) sey ein solcher Körper; er wird von dem schiefen Vierecke AEFD, von dem Parallelogramme BEFC, von den beyden Dreyecken ABE, DCF, und von dem Trapeze ABCD, welches hier als Grundfläche angenommen wird, begränzt. Der Inhalt dieses Trapezes sey = G, seine Seite AB = a, seine Seite DC = b, und der Neigungswinkel dieser Linien, oder der Winkel APD = α; ferner die Höhe des Körpers = h, und sein Inhalt = K. Es soll nun K aus G, a, b, α, bestimmt werden.

Man mache das Parallelogramm ABCL, und ziehe DL, FL. Hierdurch wird der Körper in das Prisma ABCLFE, in das Konoid ALDFE, und in die Pyramide FLCD zerlegt. Man hat also

$K = (\text{Prlgr. } ABCL + \triangle ALD)\,\frac{1}{2}h + \triangle CLD \,.\, \frac{1}{3}h =$
$(\text{Prlgr. } ABCL + \triangle ALD + \triangle CLD)\,\frac{1}{2}h - \triangle CLD \,.\, \frac{1}{6}h.$
Es ist aber Prlgr. $ABCL + \triangle ALD + \triangle CLD = G$; man hat also $K = (G - \frac{1}{3}\triangle CLD)\,\frac{1}{2}h$.

Da $CL = AB = a$, $CD = b$, $\angle LCD = \angle APD = \alpha$; so ist $\triangle CLD = \frac{1}{2}ab \text{ Sin. } \alpha$; folglich,

$$K = (G - \tfrac{1}{6}ab \text{ Sin. } \alpha)\,\tfrac{1}{2}h.$$

Anmerk. Da dieses Resultat in den beyden folgenden §en in seiner ganzen Allgemeinheit gebraucht wird, so halte ich es für nöthig, die einzelnen Fälle, welche die Auflösung in sich schließt, hier besonders zu untersuchen.

1) Der Punkt D (Fig. 89) falle innerhalb des Parallelogramms ABCL, und unterhalb der Linie BC. Für diesen Fall ist

$$K = \text{Prisma } ABCLEF - \text{Konoid } ADLEF - \text{Pyramide } FDCL$$
$$= (\text{Prlgr. } ABCL - \triangle ADL)\,\tfrac{1}{2}h - \triangle CDL \,.\, \tfrac{1}{3}h$$
$$= (\text{Prlgr. } ABCL - \triangle ADL - \triangle CDL)\,\tfrac{1}{2}h + \triangle CDL \,.\, \tfrac{1}{6}h.$$

Es ist aber

$$\text{Prlgr. } ABCL - \triangle ADL - \triangle CDL = \text{Trap. } ABCD = G;$$

folglich ist auch, $K = (G + \frac{1}{3}\triangle CDL)\,\frac{1}{2}h$. Da nun $\angle DCL = \angle APD = \alpha$, $CL = AB = a$, $DC = b$, so ist $\triangle CDL = \frac{1}{2}ab \text{ Sin. } \alpha$, und daher,

$$K = (G + \tfrac{1}{6}ab \text{ Sin. } \alpha)\,\tfrac{1}{2}h.$$

Dieser Ausdruck kann aber auch unmittelbar aus dem Normalfalle hergeleitet werden, wenn man $-\alpha$ anstatt α setzt; denn der Winkel APD in Fig. 89 ist in Beziehung auf den nämlichen Winkel in Fig. 88 negativ, wie man aus der Lage der korrespondirenden Halbmesser, nach der im 1sten Theile dieser Samml. gegebenen Anleitung, sehr leicht erkennen wird.

2) Der Punkt D habe die Lage Fig. 90; alsdann ist

$K =$ Prisma $ABCLEF$ + Pyramide $FLCD$ — Konoid $ALDEF$

$= ($Prlgr. $ABCL - \triangle ALD) \frac{1}{2} h + \triangle CLD \,.\, \frac{1}{3} h$

$= ($Prlgr. $ABCL + \triangle CLD - \triangle ALD) \frac{1}{2} h - \triangle CLD \,.\, \frac{1}{6} h$

$= G \,.\, \frac{1}{2} h - \triangle CLD \,.\, \frac{1}{6} h = (G - \frac{1}{3} \triangle CLD) \frac{1}{2} h.$

Da nun $\triangle CLD = \frac{1}{2} ab \operatorname{Sin.} \alpha$; so ist

$$K = (G - \frac{1}{6} ab \operatorname{Sin.} \alpha) \frac{1}{2} h,$$

wie im Normalfalle.

3) Für Fig. 91, wo die Punkte B, C, D, in einer geraden Linie liegen, hat man,

$K =$ Prisma $ABCLEF$ + Pyramide $FLCD$ — Konoid $ALDEF$

$= ($Prlgr. $ABCL - \triangle ALD) \frac{1}{2} h + \triangle LCD \,.\, \frac{1}{3} h$

$= ($Prlgr. $ABCL + \triangle LCD - \triangle ALD) \frac{1}{2} h - \triangle LCD \,.\, \frac{1}{6} h$

$= G \,.\, \frac{1}{2} h - \triangle LCD \,.\, \frac{1}{6} h.$

Da nun für diesen Fall der Punkt P auf B fällt, so ist

$LCD = ABC = \alpha$, und $\triangle LCD = \frac{1}{2} ab \operatorname{Sin.} \alpha$.

Man hat also

$$K = (G - \frac{1}{6} ab \operatorname{Sin.} \alpha) \frac{1}{2} h,$$

wie im Normalfalle.

Hieraus ergiebt sich zugleich der Inhalt eines Körpers, welcher von drey Dreyecken, einem Parallelogramme, und einer schiefen Fläche begränzt wird.

4) Für Fig. 92 ist

$K =$ Prisma $ABCLEF$ + Pyramide $FCLD$ — Konoid $ALDEF$

$= ($Prlgr. $ABCL - \triangle ALD) \frac{1}{2} h + \triangle LCD \,.\, \frac{1}{3} h$

$= ($Prlgr. $ABCL + \triangle LCD - \triangle ALD) \frac{1}{2} h - \triangle LCD \,.\, \frac{1}{6} h$

$= G \,.\, \frac{1}{2} h - \frac{1}{2} ab \operatorname{Sin.} \alpha \,.\, \frac{1}{6} h = (G - \frac{1}{6} ab \operatorname{Sin.} \alpha) \frac{1}{2} h,$

wie im Normalfalle.

5) Wenn man sich vorstellt, die Linie CD drehe sich noch

weiter um C, so schneidet die schiefe Fläche AEFD (Fig. 93) das Parallelogramm BEFC nach irgend einer krummen Linie Ee, und man hat alsdann anstatt des vorigen einen Körpers deren zwey, nämlich: 1) Den Körper ABeE, welcher von den beyden ebenen geradlinigen Dreyecken ABE, ABe, dem gemischtlinigen ebenen Dreyecke BEe, und dem gemischtlinigen schiefen Dreyecke AEe begränzt wird; 2) einen Körper EFDCe, welcher von den beyden ebenen Dreyecken DCe, DFC, dem ebenen und gemischtlinigen Vierecke CFEe, und dem gemischtlinigen schiefen Vierecke DFEe begränzt wird. Man bezeichne nun die Differenz dieser beyden Körper, nämlich CDeFE — ABeE, durch K′, und die Differenz ihrer beyden Grundflächen, nämlich DeC — AeB, durch G′. Alsdann ist

$$K' = \text{Konoid } ALDEF - \text{Pyramide } FLCD - \text{Prisma } ABCLEF$$
$$= (\triangle ALD - \text{Prlgr. } ABCL)\tfrac{1}{2}h - \triangle LDC \cdot \tfrac{1}{3}h$$
$$= (\triangle ALD - \text{Prlgr. } ABCL - \triangle LDC)\tfrac{1}{2}h + \triangle LDC \cdot \tfrac{1}{6}h$$
$$= (\triangle DeC - \triangle AeB)\tfrac{1}{2}h + \triangle LDC \cdot \tfrac{1}{6}h$$
$$= G' \cdot \tfrac{1}{2}h + \triangle LDC \cdot \tfrac{1}{6}h.$$

Da aber $\angle LCD = 180^\circ - \alpha$, so ist

$$\triangle LCD = \tfrac{1}{2}ab\,\text{Sin.}(180^\circ - \alpha) = \tfrac{1}{2}ab\,\text{Sin.}\,\alpha,$$

und daher

$$K' = (G' + \tfrac{1}{3}ab\,\text{Sin.}\,\alpha)\,\tfrac{1}{2}h.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem des Normalfalles völlig überein, wenn man nur K′ anstatt K, G′ anstatt G, und α, der gegenwärtigen Lage des Winkels APC gemäß, negativ nimmt.

6) Liegen die Punkte L, C, D, in einer geraden Linie (Fig. 94), so hat man:

$$K' = \text{Konoid } ALDEF - \text{Prisma } ABCLEF$$
$$= (\triangle ALD - \text{Prlgr. } ABCL)\tfrac{1}{2}h$$
$$= (\triangle DeC - \triangle AeB)\tfrac{1}{2}h = G' . \tfrac{1}{2}h.$$

Dieses Resultat erhält man auch aus dem für den Normalfall, wenn man K' anstatt K, G' anstatt G, und $\alpha = 0$ setzt.

7) Für Fig. 95 ist

$$K' = \text{Konoid } ALDEF + \text{Pyramide } FLCD - \text{Prisma } ABCLEF$$
$$= (\triangle ALD - \text{Prlgr. } ABCL)\tfrac{1}{2}h + \triangle LDC . \tfrac{1}{2}h$$
$$= (\triangle ALD + \triangle LDC - \text{Prlgr. } ABCL)\tfrac{1}{2}h - \triangle LDC . \tfrac{1}{6}h$$
$$= (\triangle DeC - \triangle AeB)\tfrac{1}{2}h - \triangle LDC . \tfrac{1}{6}h$$
$$= G' . \tfrac{1}{2}h - \triangle LDC . \tfrac{1}{6}h.$$

Da aber $\angle LDC = 180^0 - \alpha$; so ist

$$\triangle LDC = \tfrac{1}{2}ab \text{ Sin. } (180^0 - \alpha) = \tfrac{1}{2}ab \text{ Sin. } \alpha,$$

und folglich

$$K' = (G' - \tfrac{1}{6}ab \text{ Sin. } \alpha)\tfrac{1}{2}h.$$

Zus. Bezeichnet also im Allgemeinen K den Inhalt eines Körpers, wie ABCDEF (Fig. 88, 89, 90, 91, 92), oder die Differenz zwey solcher Körper, wie DCeEF, ABeE, (Fig. 93, 94, 95); ferner G die Grundfläche ABCD, oder die Differenz der beyden Grundflächen CeD — AeB; so ist immer $K = (G - \tfrac{1}{6}ab \text{ Sin. } \alpha)\tfrac{1}{2}h$, wenn man nur den Winkel α, seiner jedesmaligen Lage gemäß, positiv oder negativ nimmt.

§ 188.

Aufg. Den Inhalt eines Körpers zu finden, welcher von zwey parallelen Dreyecken und drey schiefen Vierecken eingeschlossen wird.

Aufl. 1) Es sey ABCA′B′C′ (Fig. 96) ein solcher Körper; er wird von den zwey parallelen geradlinigen Dreyecken ABC, A′B′C′, welche als seine Grundflächen angesehen wer-

den können, und von den drey schiefen Vierecken $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'A'A$, begränzt. Es sey der Inhalt der Grundfläche $A'B'C' = G'$; die Höhe des Körpers sey $= h$.

2) Man ziehe von den Punkten A', B', C', auf die Grundfläche ABC die Perpendikel $A'a$, $B'b$, $C'c$, vollende das Prisma $A'B'C'abc$ und ziehe die Linien Aa, Bb, Cc. Durch diese Construktion entstehen drey Körper von der im vorigen § betrachteten Art; nämlich: 1) Ein Körper $AabBA'B'$, der von dem Parallelogramme $A'B'ba$, von den beyden Dreyecken AaA', BbB', dem Trapeze $AabB$, und dem schiefen Vierecke $AA'B'B$ begränzt wird; er werde, der Kürze wegen, durch K' bezeichnet, und seine Grundfläche durch g'; 2) ein Körper $BbcCB'C'$, der von dem Parallelogramme $B'C'cb$, von den beyden Dreyecken $B'bB$, $C'cC$, von dem Trapez $BbcC$, und von dem schiefen Vierecke $BB'C'C$, begränzt wird; er heiße K'' und seine Grundfläche g''; 3) ein Körper $AacCA'C'$, der von dem Parallelogramm $A'C'ca$, von den beyden Dreyecken $A'aA$, $C'cC$, von dem Trapez $AacC$, und von dem schiefen Vierecke $AA'C'C$ begränzt wird; er heiße K''' und seine Grundfläche g'''. Der gesuchte Körper selbst werde durch K bezeichnet, und das Prisma $A'B'C'abc$ durch P.

3) Ich will nun annehmen, die Linien Aa, Bb, Cc, wie auch die Neigungswinkel jeder zwey dieser Linien wären gegeben, und es sey $Aa = a$, $Bb = b$, $Cc = c$, der Neigungswinkel von Aa und $Bb = \alpha$, der von Bb und $Cc = \beta$, der von Cc und $Aa = \gamma$. Man hat alsdann nach dem vorigen §,

$$K' = \tfrac{1}{3}g'h - \tfrac{1}{12}abh \operatorname{Sin.} \alpha,$$
$$K'' = \tfrac{1}{3}g''h - \tfrac{1}{12}bch \operatorname{Sin.} \beta,$$
$$K''' = \tfrac{1}{3}g'''h - \tfrac{1}{12}ach \operatorname{Sin.} \gamma;$$

auch ist $P = G'h$.

Da nun $K = K' + K'' + K''' + P$; so ist
$K = (2G' + g' + g'' + g''')\frac{1}{2}h - \frac{1}{12}h.(ab\,Sin.\alpha + bc\,Sin.\beta + ac\,Sin.\gamma)$

4) Die drei Trapeze AabB, BbcC, AacC, und das Dreyeck abc, geben zusammen genommen das Dreyeck ABC; man hat also $G' + g' + g'' + g''' = G$, und folglich,

$$K = \frac{1}{2}h(G + G') - \frac{1}{12}h(ab\,Sin.\alpha + bc\,Sin.\beta + ac\,Sin.\gamma).$$

Anmerk. Obgleich die Auflösung nur für den Fall eingerichtet worden, wo das Dreyeck abc ganz innerhalb des Dreyeckes ABC fällt, so erstreckt sich der für K gefundene Ausdruck doch auf alle Körper von der angegebenen Art, die relative Lage der Dreyecke ABC, abc, sey welche sie wolle, wenn man nur jedesmal die Winkel α, β, γ, dieser Lage gemäß, positiv oder negativ nimmt. Diese Behauptung läßt sich zwar schon aus der Allgemeinheit der algebraischen Formeln in Hinsicht auf verwandte Fälle rechtfertigen; um indessen hierüber keinen Zweifel übrig zu lassen, will ich noch zwey Fälle in Betrachtung ziehen, auf welche und dem Normalfalle sich alle übrige Fälle zurückführen lassen.

1) Für Fig. 97 hat man $K = K' + K'' - K''' + P$. Werden hierin für K', K'', K''' und P ihre Werthe aus 3 der Aufl. substituirt, so erhält man,

$$K = (2G' + g' + g'' - g''')\frac{1}{2}h - \frac{1}{12}h(ab\,Sin.\alpha + bc\,sin\,\beta - ac\,Sin.\gamma).$$

Es ist aber für den gegenwärtigen Fall $G' + g' + g'' - g''' = G$; man hat also,

$$K = \frac{1}{2}h(G + G') - \frac{1}{12}h(ab\,Sin.\alpha + bc\,Sin.\beta - ac\,Sin.\gamma).$$

Dieser Ausdruck weicht von dem vorigen nur in dem Vorzeichen von ac Sin. γ ab. Aus der Vergleichung der Fig. 97 mit Fig. 96 ergiebt sich aber sogleich, daß der Winkel γ jetzt

eine entgegengesetzte Lage erhalten hat, woraus nun ferner einleuchtend ist, warum der Theil ac Sin. γ sein Vorzeichen ändern mußte.

2) In Fig. 98 schneidet das Parallelogramm A'aoC' das schiefe Viereck, und man erhält, anstatt des einen Körpers AacCA'C', zwey Körper von der im vorigen § (Anmerk. 5) betrachteten Art, nämlich C'Ccm und A'C'Aam. Man bezeichne den ersten durch K^{IV} und seine Grundfläche Ccm durch g^{IV}, ferner den zweyten durch K^{V} und seine Grundfläche Aam durch g^{V}. Alsdann ist $K = K' + K'' + P + K^{IV} - K^{V}$. Nach dem a. O. ist aber $K^{IV} - K^{V} = (g^{IV} - g^{V})\frac{1}{2}h - \frac{1}{12}ach \, \text{Sin.} \gamma$; man erhält also,

$$K =$$
$$(2G' + g' + g'' + g^{IV} - g^{V})\tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{12}h(ab\,\text{Sin.}\alpha + bc\,\text{Sin.}\beta + ac\,\text{Sin.}\gamma).$$

Da aber $G' + g' + g'' + g^{IV} - g^{V} = G$; so ist,

$$K = \tfrac{1}{2}h\,(G + G') - \tfrac{1}{12}h\,(ab\,\text{Sin.}\alpha + bc\,\text{Sin.}\beta + ac\,\text{Sin.}\gamma),$$

wie im Normalfalle.

§ 189.

Aufg. Den Inhalt eines Körpers zu finden, welcher von zwey parallelen ebenen Vielecken von gleich vielen Seiten, und eben so vielen schiefen Vierecken, als jedes Vieleck Seiten hat, begränzt wird.

Aufl. 1) Es sey ABCDEA'B'C'D'E' (Fig. 99) ein solcher Körper, ABCDE seine eine Grundfläche = G, A'B'C'D'E' seine andere Grundfläche = G'; ferner AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, rc., lauter schiefe Vierecke. Man lasse von A', B', C', rc., die Perpendikel A'a, B'b, C'c, rc., auf die untere Grundfläche herab, und vollende das Prisma ABCDEabcde, welches durch P bezeichnet werden soll; ziehe auch die Linien Aa, Bb, Cc, rc. Es sey Aa = a, Bb = b, Cc = c, rc.,

der Neigungswinkel von Aa und Bb = α, der von Bb und Cc = β, der von Cc und Dd = γ, ꝛc. Rings um das Prisma befinden sich lauter Körper von der in § 187 betrachteten Art, AabBB′A′, BbcGC′B′, CcdDD′C′, ꝛc., die in eben der Ordnung durch K′, K″, K‴, ꝛc., so wie ihre Grundflächen durch g′, g″, g‴, ꝛc. bezeichnet werden sollen. Der Körper selbst heiße K.

2) Nach § 187 hat man $K' = \frac{1}{2}g'h - \frac{1}{12}abh \text{ Sin. } \alpha$, $K'' = \frac{1}{2}g''h - \frac{1}{12}bch \text{ Sin. } \beta$, $K''' = \frac{1}{2}g'''h - \frac{1}{12}cdh \text{ Sin. } \gamma$, ꝛc.; auch ist $P = G'h$. Da nun $K = P + K' + K'' + K''' +$ ꝛc., und $G' + g' + g'' + g''' +$ ꝛc. $= G$, so hat man,

$$K = \tfrac{1}{2}h(G + G') - \tfrac{1}{12}h(ab \text{ Sin. } \alpha + bc \text{ Sin. } \beta + cd \text{ Sin. } \gamma + \text{ꝛc.})$$

Zus. Die Linien Aa, Bb, Cc, ꝛc. sind nichts anders als die Projektionen der Seitenlinien AA′, BB′, CC′, ꝛc. auf die Grundfläche. Man kann daher das hier gefundene Resultat auf die folgende Art in Worte übertragen:

Der Inhalt eines jeden von zwey parallelen Grundflächen von gleich vielen Seiten und eben so vielen schiefen Vierecken, als jedes dieser Grundflächen Seiten hat, begränzten Körpers, ist dem Reste gleich, welcher erhalten wird, wenn von dem Produkte der Summe seiner beyden Grundflächen in die halbe Höhe, die Summe der Produkte von jeden zwey unmittelbar auf einander folgenden Projektionen seiner Seitenlinien in den Sinus ihres positiven oder negativen Neigungswinkels und in den zwölften Theil dieser Höhe abgezogen wird.

§ 190.

Die Aufgabe in § 186 ist nur ein einzelner Fall von der weit allgemeinern des vorigen §'s; es muß sich also auch der

daselbst für K gefundene Ausdruck $\frac{1}{2}h(G + G')$ aus dem, im vorigen § für K gefundenen, herleiten lassen. Um dies zu zeigen, sey ABCDEF (Fig. 100) die Grundfläche eines solchen Körpers, wie der in § 186, hier ein Sechseck; A, C, E, mögen die Punkte seyn, von welchen die gleichen parallelen Seitenkanten ausgehen; Aa, Cc, Ee, die Projektionen dieser Kanten, die also ebenfalls gleich und parallel, wie auch nach einerley Seite gekehrt seyn werden; Bb, Dd, Ff, die Projektionen der nicht parallelen Seitenkanten. Setzt man nun Aa = a, Bb = b, Cc = c, Dd = d, Ee = e, Ff = f, den Neigungswinkel von Aa und Bb = α, den von Bb und Cc = β, ꝛc.; so ist nach dem vorigen §,

$$K = \frac{1}{2}h(G + G') - \frac{1}{12}h\begin{bmatrix}ab\,\text{Sin.}\,\alpha + bc\,\text{Sin.}\,\beta + cd\,\text{Sin.}\,\gamma + \\ de\,\text{Sin.}\,\delta + ef\,\text{Sin.}\,\varepsilon + fa\,\text{Sin.}\,\zeta\end{bmatrix}$$

Wegen der entgegengesetzten Lage der Wechselwinkel α und β, γ und δ, ε und ζ, ist aber $\beta = -\alpha$, $\delta = -\gamma$, $\zeta = -\varepsilon$; auch ist a = c = e; man hat also,

$$K = \frac{1}{2}h(G + G') - \frac{1}{12}h\begin{bmatrix}ab\,\text{Sin.}\,\alpha - ab\,\text{Sin.}\,\alpha + ad\,\text{Sin.}\,\gamma - \\ ad\,\text{Sin.}\,\gamma + af\,\text{Sin.}\,\varepsilon - af\,\text{Sin.}\,\varepsilon\end{bmatrix}$$

oder,

$$K = \frac{1}{2}h(G + G'):$$

wie in § 186.

Hieraus ergiebt sich aber auch zugleich, daß es, außer dem Fall der abwechselnd parallelen Seiten, noch unendlich viele andere Fälle giebt, wo der Inhalt eines solchen, von schiefen Vierecken, und zwey parallelen ebenen Vielecken eingeschlossenen Körpers, durch das Produkt seiner beyden Grundflächen in die halbe Höhe ausgedruckt wird. Diese Eigenschaft kommt nämlich allen denen Körpern zu, für welche ab Sin. α + bc Sin. β + cd Sin. γ + de Sin. ε + ꝛc. = 0 ist.

Nichts kann uns übrigens hindern, anzunehmen, daß die schiefen Vierecke sich in ebene verwandeln; man erhält alsdann einen Körper, wie der in § 155. Der im vorigen § gefundene Ausdruck gilt also auch für diesen Körper. Er giebt den Inhalt des Körpers durch die Projektionen der Seitenkanten und die Neigungswinkel dieser Projektionen, anstatt daß die Ausdrücke in § 155 und § 156 ihn durch die Seiten und Winkel der beyden Grundflächen geben.

Wenn in einem Körper von der im vorigen §. betrachteten Art, zwey Winkelpunkte der oberen oder der unteren Grundfläche in einen einzigen zusammen fallen, so verwandelt sich das schiefe Viereck, zu welchem diese Punkte gehören, in ein ebenes Dreyeck. Man kann also auch den Inhalt eines von schiefen Vierecken und ebenen Dreyecken begränzten Körpers finden.

Die Formel § 190 gilt also für alle Körper, welche zwey parallele, übrigens beliebige Grundflächen haben, und von dreyeckigen, trapezischen, oder schiefen Seitenflächen begränzt werden.

Daß das Prisma und die Pyramide zu dem Körper des vorigen §'s gehören, verstehet sich wohl von selbst. Für das Prisma sind die Projektionen der Seitenlinien alle parallel, und daher α, β, γ, rc., $= 0$; auch ist $G' = G$; folglich $K = Gh$, wie erfordert wird. Für die Pyramide ist $G' = 0$; die Projektion der oberen Grundfläche verwandelt sich in einen Punkt; die aus diesem Punkte nach den Ecken gezogenen Linien, werden die Projektionen der Seitenkanten; sie theilen die Grundfläche in lauter Dreyecke, und es ist daher

$\frac{1}{2} ab \,\text{Sin.}\, \alpha + \frac{1}{2} bc \,\text{Sin.}\, \beta + \frac{1}{2} cd \,\text{Sin.}\, \gamma +$ rc. $= G$;

folglich $K = \frac{1}{2} hG - \frac{1}{12} h \,.\, 2G = \frac{1}{3} hG$,

wie erfordert wird.

Man hätte auch den Inhalt des Körpers Fig. 99 durch die Zerlegung desselben in lauter dreiseitige, von schiefen Flächen begränzte Körper, wie der in § 189 finden können. Denkt man sich nämlich die Diagonalen AC, CE, in der unteren Grundfläche, und die ihnen korrespondirenden Diagonalen A′C′, C′E′, gezogen, und sowohl durch AC, A′C′, als auch durch CE, C′E′, ein schiefes Viereck gelegt, so entstehen drey dreyseitige, von schiefen Vierecken begränzte Körper, deren Inhalt nach § 189 gefunden werden kann. Es sey $\varkappa$ der Neigungswinkel der Projektionen Aa, Cc, und λ der Neigungswinkel der Projektionen Cc, Ee. Werden diese Winkel für die Körper ABCA′B′C′, CDEC′D′E′, als positiv angesehen, so müssen sie in Beziehung auf den Körper ACEA′C′E′ als negativ angesehen werden. Man hat also,

$$\text{Körper } ABCA'B'C' = \tfrac{1}{2}h(\triangle ABC + \triangle A'B'C') - \tfrac{1}{12}h(ab\,\text{Sin.}\,\alpha + bc\,\text{Sin.}\,\beta + ac\,\text{Sin.}\,\varkappa)$$

$$\text{Körper } ACEA'C'E' = \tfrac{1}{2}h(\triangle ACE + \triangle A'C'E') - \tfrac{1}{12}h(ae\,\text{Sin.}\,\varepsilon - ac\,\text{Sin.}\,\varkappa - ce\,\text{Sin.}\,\lambda)$$

$$\text{Körper } CDEC'D'E' = \tfrac{1}{2}h(\triangle CDE + \triangle C'D'E') - \tfrac{1}{12}h(cd\,\text{Sin.}\,\gamma + de\,\text{Sin.}\,\delta + ce\,\text{Sin.}\,\lambda)$$

Wird dies alles zusammen addirt, so erhält man den Inhalt des ganzen Körpers, oder K. Da nun

$$\triangle ABC + \triangle ACE + \triangle CDE = G,$$
$$\triangle A'B'C' + \triangle A'C'E' + \triangle C'D'E' = G';$$

so ist

$$K = \tfrac{1}{2}h(G + G') - \tfrac{1}{12}h(ab\,\text{Sin.}\,\alpha + bc\,\text{Sin.}\,\beta + cd\,\text{Sin.}\,\gamma + de\,\text{Sin.}\,\delta + ea\,\text{Sin.}\,\varepsilon),$$

wie im § 190.

Es läßt sich auch im Allgemeinen die Richtigkeit des ge-

fundenen Resultates sehr leicht einsehen, wenn man bedenkt, daß jedes diagonale schiefe Viereck zweyen von den dreyseitigen Körpern, in welche der ganze zerlegt worden, gemeinschaftlich ist, und daß der, diesem Vierecke entsprechende Projektionswinkel für den einen Körper als negativ angesehen werden muß, wenn er für den anderen als positiv angesehen wird; folglich diejenigen Glieder in dem Ausdrucke für K, welche von den schiefen Diagonalflächen herrühren, sich wechselseitig aufheben müssen.

Welche von den Projektionswinkeln in dem Ausdrucke für K positiv, und welche negativ genommen werden müssen, kann sehr leicht mit Hülfe der korrespondirenden Halbmesser entschieden werden. Da nämlich im vorigen § bey der Auflösung das Schema Fig. 88 zum Grunde gelegt worden, in welchem alle Projektionswinkel jedesmal nach der Seite, wo das Parallelogramm liegt, gekehrt sind, so darf man nur einen Kreis beschreiben, die korrespondirenden Halbmesser der Projektionen Aa, Bb, Cc, ꝛc. ziehen, wie auch die korrespondirenden Halbmesser dieser Linien für die verwandte Figur, auf welche die Formel angewandt werden soll; aus der relativen Lage dieser letzteren Halbmesser, verglichen mit der relativen Lage der ersteren, wird sich alsdann, nach der im ersten Theile dieser Sammlung hinlänglich durch Beyspiele erläuterten Weise, ohne weiteres Nachdenken sogleich entscheiden lassen, welche Winkel positiv, und welche negativ angenommen werden müssen.

Ueberhaupt scheinet mir der Gebrauch der korrespondirenden Halbmesser das untrüglichste, und der Natur der Sache angemessenste Mittel zu seyn, verwandte Figuren durch das Medium des Kalkuls auf einander zu beziehen. Ich sage: das der Natur der Sache angemessenste Mittel;

weil

weil die korrespondirenden Halbmesser, bey dem Uebergange einer Figur in eine andere, gerade dieselben Bewegungen machen, als die Linien der Figur selbst, und daher die goniometrischen Linien in der Figur und in dem ihr zugeordneten Kreise immer einerley Größe und einerley Lage haben. Freylich ist dieses Mittel nur alsdann anwendbar, wenn man sich bey der Auflösung einer geometrischen Aufgabe der Winkel bedient, nicht aber alsdann, wenn man es bloß mit Linien zu thun hat. Aber, nicht zu gedenken, daß die Bestimmung des Positiven und Negativen bey anderen geometrischen Größen als Winkel ihre eigenen Schwierigkeiten hat, welche gänzlich zu heben, den Geometern vielleicht nie gelingen dürfte —, ist die Anwendung des goniometrischen Calkuls auf geometrische Untersuchungen, abgesehen von dem gar nicht unbedeutenden Vortheile, welchen sie bey der Vergleichung verwandter Figuren gewähret, auch schon deshalb sehr zu empfehlen, weil dadurch in den meisten Fällen die Rechnungen einfacher werden, und eine gleichförmigere Behandlung gestatten. Dies nur beyläufig; an einem anderen Orte mehr.

§ 191.

Nach § 164 ist der Inhalt eines abgekürzten prismatischen Körpers, die Grundfläche sey welche sie wolle, immer dem Produkte seines senkrechten Schnittes oder der Peripherie desselben in die Entfernung der Schwerpunkte seiner beyden Grundflächen oder ihrer Peripherien gleich.

Da dieser Satz allgemein ist, so gilt er auch alsdann, wenn sich die beyden Grundflächen in irgend einem Punkte oder einer geraden Linie berühren. Das letztere ist der Fall bey dem Körper ABCDAB (Fig. 101), welcher von den beyden gemischtlinigen Figuren ACB, ADB, und von einer cylinderförmigen Fläche begränzt wird; man pflegt ihn, wegen sei-

ner Aehnlichkeit mit einem Hufe, einen hufförmigen Körper zu nennen. Ist demnach des Körpers Grundfläche ACBA selbst ein senkrechter Schnitt, S ihrer Fläche Schwerpunkt, und ihr Inhalt = q, T der krummen Linie ACB Schwerpunkt, und ihre Länge = l, (die Linie AB braucht bey dem letzteren Schwerpunkte nicht in Betrachtung gezogen zu werden, weil sie keine Fläche giebt,) und sind SS′, TT′, zwey Perpendikel auf der Grundfläche, also die Punkte S′, T′, wo die Ebene der oberen Grundfläche von diesen Linien getroffen wird, die Schwerpunkte ihrer Fläche und Linie; so ist der Inhalt des Körpers = q . SS′ und seine cylinderförmige Fläche = l.TT′.

Es kommt also, wenn man den Inhalt und die Fläche eines solchen Körpers sucht, bloß darauf an, den Schwerpunkt einer krummen Linie und der von ihr begränzten Fläche zu finden. Wie dies im Allgemeinen geschiehet, wird in der Integralrechnung gelehrt, und gehöret also nicht hierher. In einigen besondern Fällen aber kann man ihn vermittelst der Guldinschen Regel finden, wie im folgenden § gezeigt wird, und dies mag vorerst genügen.

§ 192.
Hülfssatz.

Aufg. Den Schwerpunkt einer krummen Linie und der von ihr begränzten Fläche vermittelst der Guldinschen Regel zu finden.

Aufl. 1). Es sey ABC (Fig. 102) irgend eine krumme Linie, die Entfernung ihres Schwerpunktes T von einer geraden Linie DE = y, und die Entfernung des Schwerpunktes S ihrer Fläche von dieser Linie = x. Es sey ferner der Inhalt der krummlinigen Fläche ABC = f, die Länge der krummen Linie ABC = l, der Inhalt des Körpers, welcher entstehet,

wenn die Fläche ABC sich um DE als Axe drehet, $= K$, und seine Oberfläche $= F$. Der Punkt S durchläuft bey der Umdrehung einen Weg $= 2\pi x$, und der Punkt T einen Weg $= 2\pi y$. Man hat also nach der Guldinschen Regel die Gleichungen:

$$f.2\pi x = K, \quad l.2\pi y = F;$$

und hieraus erhält man,

$$x = \frac{K}{2\pi f}, \quad y = \frac{F}{2\pi l}.$$

Es läßt sich also x finden, wenn K, f, und y, wenn F, l, bekannt sind.

2) Man ziehe EF auf DE perpendikulär, und setze die Entfernung des Schwerpunktes S von dieser Linie $= x'$, und die des Schwerpunktes $T = y'$. Stellt man sich vor, die Figur drehe sich nunmehr um die Linie EF als Axe, und setzt man den Inhalt des durch die Fläche ACB beschriebenen Körpers $= K'$, und seine krumme Fläche $= F'$; so hat man, wie in 1,

$$x' = \frac{K'}{2\pi f'}, \quad y' = \frac{F'}{2\pi l'},$$

woraus sich x' und y' bestimmen lassen, wenn K', f, und F', l, bekannt sind.

3) Kennet man die Entfernung eines Punktes von zweyen, der Lage nach gegebenen Linien, so läßt sich der Punkt finden. Es läßt sich also aus x, x', der Punkt S, und aus y, y', der Punkt T finden.

Zus. Bestehet die Figur aus zwey ähnlichen und gleichen Hälften wie ACOA, BCOB (Fig. 103), so liegen die Schwerpunkte S, T, nothwendig in der geraden Linie CO, welche diese beyden Hälften scheidet; man darf daher in diesem Falle

nur die Entfernungen dieser Punkte von der Linie AB, d. h. x und y suchen.

Beysp. Für den Halbkreis ACB giebt die Umdrehung um AB eine Kugel; folglich ist, wenn der Halbmesser $= r$ gesetzt wird, $K = \frac{4}{3} \pi r^3$, $F = 4 \pi r^2$, $f = \frac{1}{2} \pi r^2$, $l = \pi r$. Man hat daher $x = \frac{4 r}{3 \pi} = SO$, $y = \frac{2 r}{\pi} = TO$.

§ 193.

Aufg. Den Inhalt und die Fläche eines hufförmigen Cylinderabschnittes zu finden.

Aufl. Es sey ABCL (Fig. 104) ein gerader Schnitt eines geraden Cylinders, also ein Kreis; sein Halbmesser sey $= r$. Es sey ferner AB ein Durchmesser dieses Kreises, AC′BA irgend ein schiefer Schnitt des Cylinders, welcher hier nur zur Hälfte gezeichnet ist, sein Neigungswinkel gegen die Ebene ACBA $= \alpha$; AC″BA irgend ein anderer schiefer Schnitt, welcher ebenfalls nur zur Hälfte gezeichnet ist, und sein Neigungswinkel gegen die Ebene ACBA $= \beta$. Hierdurch entstehet ein Körper AC′C″BA, welcher von den beyden halben schiefen Schnitten AC′BA, AC″BA, und von der Cylinderfläche begränzt wird; man kann ihn einen hufförmigen Cylinderabschnitt (ungula cylindrica) nennen, und gehöret er zu den Körpern § 191. Der Inhalt und die Fläche dieses Körpers läßt sich nach § 191 und mit Hülfe des Satzes § 192 sehr leicht berechnen.

1) Es sey S der Schwerpunkt des Halbkreises ACB; alsdann ist nach § 192 $OS = \frac{4 r}{3 \pi}$, und daher in dem rechtwinkeligen Dreyecke OSS′, $SS' = OS \,.\, \text{Tang.}\, \alpha = \frac{4 r}{3 \pi} \text{Tang.}\, \alpha$. Nach § 191 ist aber der Inhalt des Körpers AC′CBA dem

Produkte des Halbkreises ABC in SS' gleich; es ist also dieser Inhalt $= \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot \frac{4 r}{3 \pi}$ Tang. $\alpha = \frac{2}{3} r^3$ Tang. α. Eben so findet man den Inhalt des Körpers ACC''BA $= \frac{2}{3} r^3$ Tang. β. Folglich ist der Inhalt des ganzen Körpers

$$= \tfrac{2}{3} r^3 (\text{Tang. } \alpha + \text{Tang. } \beta) = \tfrac{2}{3} r^3 \frac{\text{Sin. } (\alpha + \beta)}{\text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \beta}.$$

2) Es sey nun T der Schwerpunkt der halben Kreisperipherie ACB; so ist nach § 192 OT $= \frac{2 r}{\pi}$ und daher TT' $=$ OT.Tang. $\alpha = \frac{2 r}{\pi}$ Tang. α. Nach § 191 ist aber die cylindrische Fläche des Körpers AC'CBA dem Produkte der halben Kreisperipherie in TT' gleich; es ist also die Fläche $= \pi r \cdot \frac{2 r}{\pi}$ Tang. $\alpha = 2 r^2$ Tang. α. Eben so findet man die cylindrische Fläche des Körpers ACC''BA $= 2 r^2$ Tang. β. Folglich ist die cylindrische Fläche des ganzen Körpers

$$= 2 r^2 (\text{Tang. } \alpha + \text{Tang. } \beta) = 2 r^2 \frac{\text{Sin. } (\alpha + \beta)}{\text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \beta}.$$

Anmerk. Mit Hülfe dieser Formeln läßt sich der kubische Inhalt und die Fläche der Tonnen- und Kreuzgewölbe sehr leicht berechnen; da indessen die, die Gewölbe betreffenden geometrischen Aufgaben, erst in dem folgenden Theile ihren Platz finden können, so werden diese Anwendungen hier weggelassen.

XIII. Vom Maximum und Minimum, in so fern dieser Gegenstand zur Elementar-Geometrie gehört.

(Fortsetzung.)

§ 194.

Das in § 112 Th. I. dieser Samml. gefundene Resultat läßt sich auf die folgende Art umkehren:

Unter allen Dreyecken von gleichem Inhalte und auf derselben Grundlinie, hat das gleichschenkelige den kleinsten Umfang.

Denn da das gleichschenkelige Dreyeck, nach dem angeführten Orte, das größte unter allen Dreyecken auf derselben Grundlinie von gleichem Umfange ist; so ist es auch größer, als irgend eines dieser Dreyecke, das T heißen mag. Soll daher das gleichschenkelige Dreyeck mit dem Dreyecke T. einerley Inhalt erhalten, so muß seine Höhe kleiner genommen werden; alsdann werden aber auch zugleich seine Schenkel kleiner. Da nun vorher sein Umfang dem des Dreyecks T gleich war, so muß jetzt sein Umfang kleiner seyn. Das gleichschenkelige Dreyeck von gleichem Inhalte und auf derselben Grundlinie mit irgend einem anderen T hat demnach einen kleineren Umfang; also auch den kleinsten unter allen diesen Dreyecken.

Eben so läßt sich der Satz § 117 Th. I. umkehren, und zwar wie folgt:

Unter allen Vielecken von gleichem Flächeninhalte und derselben Seitenzahl hat das reguläre Vieleck den kleinsten Umfang.

Denn da nach dem angef. Satze ein reguläres Vieleck größer ist, als jedes andere von gleichem Umfange und derselben Seitenzahl; so muß ein reguläres Vieleck, welches einem anderen nicht regulären Vielecke P von derselben Seitenzahl an Flächeninhalt gleich seyn soll, einen kleineren Umfang als P haben. Da nun dies für jedes Vieleck wie P gilt; so hat das reguläre Vieleck, bey gleichem Inhalte, einen kleineren Umfang als jedes andere nicht reguläre von gleicher Seitenzahl; folglich den kleinsten.

Die folgenden §en werden noch mehrere Beispiele von dieser Umkehrung der Sätze liefern.

§ 195.

Aufg. Unter allen Parallelepipeden von derselben Höhe und derselben Grundfläche dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Aufl. Die Grundfläche, und folglich auch die ihr entgegengesetzte Fläche, bleibt bey allen Parallelepipeden, deren Minimum gesucht wird, dieselbe. Es kommt also bloß darauf an, dasjenige zu finden, worin die Summe der Seitenflächen am kleinsten ist. Wegen der gegebenen Grundfläche sind aber die Grundlinien der Seitenflächen unveränderlich; es müssen daher ihre Höhen am kleinsten seyn. Die Höhen der Seitenflächen sind aber am kleinsten, wenn diese auf der Grundfläche perpendikulär stehen; folglich hat unter allen Parallelepipeden dasjenige die kleinste Fläche, dessen Seitenflächen auf der Grundfläche perpendikulär stehen.

Erst. Zus. Das gerade Parallelepiped hat daher unter allen, welche mit ihm einerley Grundfläche und gleiche Höhe, also auch gleichen kubischen Inhalt haben, die kleinste Fläche.

Zweyt. Zus. Soll demnach ein gerades Parallelepiped mit einem schiefen einerley Grundfläche und gleiche Oberfläche

haben, so muß es höher als das schiefe seyn. Alsdann ist aber sein kubischer Inhalt größer. Das gerade Parallelepiped hat also unter allen, welche mit ihm einerley Grundfläche und gleiche Oberfläche haben, den größten kubischen Inhalt.

Dritt. Zus. Giebt es ein Parallelepiped, welches unter allen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche den größten kubischen Inhalt hat, so muß es nothwendig rechtwinkelich seyn; denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man auf eine seiner Gränzflächen ein gerades, von jenem verschiedenes, Parallelepiped von gleicher Oberfläche setzen; ein solches würde aber einen größeren kubischen Inhalt haben (zweyt. Zus.), und jenes wäre also nicht das größte.

Viert. Zus. Giebt es ferner, ein Parallelepiped, welches unter allen Parallelepipeden von gleichem kubischen Inhalte die kleinste Oberfläche hat, so muß es nothwendig rechtwinkelig seyn; denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man auf eine seiner Gränzflächen ein gerades, von jenem verschiedenes, Parallelepiped von gleicher Höhe setzen; ein solches würde also eine kleinere Oberfläche haben (erst. Zus.), und es würde also jenes nicht das seyn können, welches die kleinste Oberfläche hat.

§ 196.

Aufg. Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von gegebenem kubischen Inhalte und von gegebener Höhe, (für welche folglich auch die Grundflächen, ihrer Größe nach, gegeben sind) dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Aufl. Da die Grundfläche, ihrer Größe nach, gegeben ist, so hat dasjenige Parallelepiped die kleinste Oberfläche, welches die kleinste Summe der Seitenflächen hat. In rechtwinkeligen Parallelepipeden von gleicher Höhe verhalten sich die Summen der Seitenflächen wie die Peripherien ihrer Grund-

flächen; also muß die Peripherie der Grundfläche ein Minimum seyn. Unter allen Rechtecken von gleichem Inhalte hat aber das Quadrat den kleinsten Umfang; also muß die Grundfläche des gesuchten Parallelepipeds ein Quadrat seyn.

Erst. Zus. Demnach hat unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von gleicher Höhe und gleichem kubischen Inhalte, also auch von gleicher Grundfläche, das mit einer quadratischen Grundfläche die kleinste Oberfläche.

Zweyt. Zus. Soll daher ein rechtwinkeliges Parallelepiped mit einer quadratischen Grundfläche, einem anderen mit einer nicht quadratischen Grundfläche von gleicher Höhe, an Oberfläche gleich seyn, so muß das erstere eine größere Grundfläche als das letztere haben; alsdann wird aber auch zugleich der Inhalt des ersteren größer als der des letzteren seyn. Das rechtwinkelige Parallelepiped mit einer quadratischen Grundfläche hat daher unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von gleicher Höhe und gleicher Oberfläche den größten Inhalt.

Dritt. Zus. Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von gleichem Inhalte hat der Kubus die kleinste Oberfläche; denn wäre das Parallelepiped mit der kleinsten Oberfläche kein Kubus, so könnte man jede Gränzfläche desselben, welche kein Quadrat ist, als die Grundfläche ansehen; alsdann würde es aber nicht die kleinste Oberfläche haben können (erst. Zus.).

Viert. Zus. Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche hat der Kubus den größten Inhalt; denn befände sich unter den Gränzflächen des größten Parallelepipeds ein Rechteck, so könnte man dasselbe als die Grundfläche ansehen; so betrachtet könnte aber das Parallelepiped nicht das größte seyn (zweyt. Zus.).

§ 197.

Aus dem Vorhergehenden erhält man die folgenden zwey Lehrsätze:

1) Unter allen geraden oder schiefen Parallelepipeden von gleichem Inhalte hat der Kubus die kleinste Oberfläche.

2) Unter allen geraden oder schiefen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche hat der Kubus den größten Inhalt.

Der erste Satz ergiebt sich aus § 195 Zus. 4 und § 196 Zus. 3, der zweyte aus § 195 Zus. 3 und § 196 Zus. 4.

§ 198.

Aufg. Die Grundfläche eines Parallelepipeds ist ihrer Gestalt und Größe nach gegeben, die Seitenflächen aber sind es bloß der Größe nach: man soll dasjenige finden, welches den größten kubischen Inhalt hat.

Aufl. Da die Grundfläche ihrer Gestalt und Größe nach gegeben ist, so sind auch ihre Seiten gegeben, d. h. die Grundlinien der parallelogrammischen Seitenflächen. Die Seitenflächen sind aber ihrer Größe nach gegeben; also sind auch die Höhen derselben gegeben.

Das gesuchte Parallelepiped muß, wegen der gegebenen, also unveränderlichen Grundfläche, die möglichst größte Höhe erhalten. Sind daher die Seitenflächen von gleicher Höhe, so muß man sie senkrecht auf die Grundfläche stellen; sind sie von ungleicher Höhe, so ist die kleinste von diesen Höhen die größte, welche der Körper erhalten kann; daher müssen in diesem Falle die Seitenflächen, welche die kleinste Höhe haben, auf der Grundfläche senkrecht stehen.

§ 199.

Aufg. Die Grundfläche und die Seitenflächen eines

Parallelepipeds sind der Größe nach gegeben; auch sind die Winkel der Grundfläche gegeben: man soll die Bedingungen angeben, unter welchen der Körper seinem Inhalte nach ein Maximum wird.

Aufl. Da die Winkel der Grundfläche gegeben sind, so sey einer derselben $= \alpha$, die beyden unbekannten Seiten, welche diesen Winkel einschließen, seyen x, y: der gegebene Inhalt der Grundfläche sey $= q$, der Inhalt der einen Art von Seitenflächen $= q'$, der Inhalt der anderen $= q''$. Nach dieser Bezeichnung ist also der Inhalt der Grundfläche $=$ $xy \text{ Sin. } \alpha = q$, und daher $xy = \frac{q}{\text{Sin. } \alpha}$; ferner ist die Höhe der einen Art von Seitenflächen $= \frac{q'}{x}$, die Höhe der anderen $= \frac{q''}{y}$, also das Produkt dieser beyden Höhen $= \frac{q'q''}{xy}$ $= \frac{q'q''}{q} \text{ Sin. } \alpha$. Die größte Höhe, welche ein Parallelepiped für die gegebenen Stücke erhalten kann, ist demnach $= \sqrt{\frac{q'q'' \text{ Sin. } \alpha}{q}}$. Das größte Parallelepiped muß aber, wegen der gegebenen Grundfläche, die möglichst größte Höhe haben; folglich ist seine Höhe $= \sqrt{\frac{q'q''}{q}} \text{ Sin. } \alpha$, und zwar stehen alsdann die Seitenflächen auf der Grundfläche perpendikulär.

Das gesuchte Parallelepiped ist demnach ein gerades, dessen Höhe $= \sqrt{\frac{q'q''}{q}} \text{ Sin. } \alpha$, und dessen Inhalt

$$= \sqrt{q q' q''} \text{ Sin. } \alpha.$$

Zus. Da der Ausdruck $\sqrt{q q' q''} \text{ Sin. } \alpha$ am größten

wird, wenn Sin. α am größten ist, d. h. wenn $\alpha = 90°$; so erhält man den folgenden Satz:

Unter allen Parallelepipeden, deren Seitenflächen und Grundfläche ihrer Größe nach gegeben sind, hat das rechtwinkelige den größten kubischen Inhalt.

Der Inhalt dieses größten Parallelepipeds ist $= \sqrt{q\,q'\,q''}$: seine Höhe, wenn man q für die Grundfläche annimmt, $= \sqrt{\frac{q'q''}{q}}$; ferner wenn q' die Grundfläche ist, $= \sqrt{\frac{qq''}{q'}}$; und wenn es q'' ist, $= \sqrt{\frac{qq'}{q''}}$; dies sind also auch die Ausdrücke seiner ungleichen Kanten.

§ 200.

Aufg. Unter allen Parallelepipeden von gleichem kubischen Inhalte, welche einen gegebenen körperlichen Winkel und eine gegebene Kante haben, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Aufl. 1) Es seyen S, S', S'', die drey Seitenflächen des gesuchten Parallelepipeds, a die gegebene Kante, x und x' die beyden anderen Kanten, und zwar werde S von x und x', S' von a und x, S'' von a und x' eingeschlossen.

2) Da der körperliche Winkel und die Kante a gegeben ist, so ist auch das Perpendikel, welches von dem Endpunkte dieser Kante auf die Fläche S herabgelassen wird, gegeben; und da ferner der kubische Inhalt des Körpers gegeben ist, so ist auch der Inhalt dieser Fläche gegeben, und daher das Produkt xx'; dieses Produkt sey = m.

3) Man ziehe nun von dem Endpunkte der Kante a auf die Linien x, x', die Perpendikel p, p'; so sind auch diese gegeben, und man hat S' = px, S'' = p'x', also

$$S' + S'' = px + p'x'.$$

4) Die Oberfläche des Parallelepipeds, nämlich $2S + 2S' + 2S''$ soll ein Minimum seyn, und die Fläche S ist gegeben; folglich muß $2S' + 2S''$, also auch $S' + S''$ ($= px + p'x'$) ein Minimum seyn. Man hat daher die folgenden zwey Bedingungsgleichungen:

$$xx' = m, \; px + p'x' = \text{Minimum}.$$

5) Man multiplicire die erste Gleichung mit pp', und setze $px = \frac{z + u}{2}$, $p'x' = \frac{z - u}{2}$. Hierdurch verwandeln sich diese Gleichungen in die folgenden:

$$z^2 - u^2 = 4mpp', \; z = \text{Minimum}.$$

Aus der ersten erhält man $z = \sqrt{(4mpp' + u^2)}$, und dieser Ausdruck muß daher ein Minimum seyn. Er wird es offenbar, wenn man $u = 0$ setzt. Alsdann wird aber $px = \frac{z}{2}$, $p'x' = \frac{z}{2}$, also $px = p'x'$; d. h. die Flächen S', S'', sind von gleichem Inhalte.

Erst. Zus. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Unter allen Parallelepipeden von gleichem Inhalte, welche einen gleichen körperlichen Winkel und eine gleiche Kante haben, hat dasjenige die kleinste Oberfläche, in welchem die beyden Flächen, worin die gleiche Kante liegt, gleich groß sind.

Zweyt. Zus. Was für eine Kante des Parallelepipeds von einem gegebenen kubischen Inhalte und mit einem gegebenen körperlichen Winkel, man auch als gegeben ansehen mag, so müssen immer in demjenigen Parallelepiped, welchem das Minimum der Oberfläche zukommt, die beyden Flächen, welche diese Kante gemeinschaftlich haben, gleich groß seyn. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

cher Höhe, gleich grossen Grundflächen, und einer gleich grossen Seitenfläche, hat dasjenige die kleinste Oberfläche, worin die beyden anderen Seitenflächen gleich groß sind.

Zweyt. Zus. Aus diesem Satze läßt sich nun der folgende herleiten:

Unter allen geraden dreyseitigen Prismen von gleicher Höhe und gleich großer Grundfläche, hat dasjenige die kleinste Oberfläche, worin alle Seitenflächen gleich groß sind.

Denn siehet man nach und nach eine jede der Seitenflächen als gegeben an, so müssen immer die beyden übrigen für das Prisma von der kleinsten Oberfläche gleich groß seyn, und folglich müssen alle gleich groß seyn.

Dritt. Zus. Aus diesem Satze und dem vorigen §. läßt sich wieder der folgende herleiten:

Unter allen dreyseitigen Prismen von gleicher Höhe und gleich großer Grundfläche hat das gerade Prisma mit gleich großen Seitenflächen die kleinste Oberfläche.

§. 204.

Aufg. Unter allen Prismen von einer gegebenen Anzahl der Seitenflächen, welche dieselbe Höhe und dieselbe Grundfläche haben, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Aufl. Die Auflösung ist der in § 195 völlig ähnlich; und es ergiebt sich daraus, daß das gerade Prisma unter allen, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen, die kleinste Oberfläche hat.

§ 205.

Aufg. Unter allen geraden Prismen von gegebener Höhe, und einer gegebenen Summe und Anzahl der Seiten-

renflächen dasjenige zu finden, welches den größten kubischen Inhalt hat.

Aufl. Da die Höhe des Prismas gegeben ist, so ist auch die ihr gleiche Höhe seiner Seitenflächen gegeben; folglich auch, wegen der gegebenen Summe der Seitenflächen, die Peripherie der Grundfläche. Prismen von gleicher Höhe verhalten sich ferner wie ihre Grundflächen. Es kommt also bloß darauf an, unter allen Vielecken von gegebener Peripherie und einer gegebenen Anzahl der Seiten, dasjenige zu finden, welches den größten Flächeninhalt hat. Diese Eigenschaft besitzt aber das reguläre Vieleck; mithin hat das Prisma mit einer regulären Grundfläche den größten kubischen Inhalt.

Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Unter allen geraden Prismen von gleicher Höhe, gleicher Summe und Anzahl der Seitenflächen, hat dasjenige, dessen Grundfläche ein reguläres Vieleck ist, den größten kubischen Inhalt.

§ 206.

Aufg. Unter allen Prismen von gegebener Höhe, gegebener Anzahl der Seitenflächen und gegebenem kubischen Inhalte, dasjenige zu finden, welches die kleinste Summe der Seitenflächen hat.

Aufl. Da die Höhe und der kubische Inhalt des Prismas gegeben ist, so ist auch die Grundfläche der Größe nach gegeben. Soll ferner die Summe der Seitenflächen am kleinsten seyn, so muß auch die Peripherie der Grundfläche am kleinsten seyn. Unter allen Vielecken von gleichem Inhalte und gleicher Anzahl der Seiten, hat aber das reguläre Vieleck die kleinste Peripherie: folglich ist die Grundfläche des gesuchten Prismas ein reguläres Vieleck. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Unter allen geraden Prismen von einer gleichen Anzahl der Seitenflächen, gleicher Höhe, und gleichem kubischen Inhalte, hat dasjenige, dessen Grundfläche regulär ist, die kleinste Summe der Seitenflächen.

§ 207.

Aufg. Unter allen geraden Prismen von einer gegebenen Anzahl der Seitenflächen, einer gegebenen Höhe und einem gegebenen kubischen Inhalte, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Aufl. Da die Höhe und der kubische Inhalt des Prismas gegeben ist, so ist auch seine Grundfläche gegeben. Soll also die Oberfläche ein Minimum seyn, so muß es auch die Summe der Seitenflächen seyn. Hieraus ergiebt sich mit Hülfe des vorigen §'s der folgende Satz:

Unter allen geraden Prismen von gleicher Anzahl der Seitenflächen, einer gleichen Höhe und einem gleichen kubischen Inhalte, hat dasjenige, welches ein reguläres Vieleck zur Grundfläche hat, die kleinste Summe der Seitenflächen.

§ 208.

Aufg. Unter allen geraden Prismen von einer gegebenen Anzahl der Seitenflächen, gegebener Höhe und Oberfläche, dasjenige zu finden, welches den größten kubischen Inhalt hat.

Aufl. Nach dem vorigen § hat ein gerades Prisma auf einer regulären Grundfläche immer eine kleinere Oberfläche, als jedes andere von gleicher Höhe, einer gleichen Anzahl der Seitenflächen und einem gleichen kubischen Inhalte auf einer nicht regulären Grundfläche. Soll daher ein Prisma von der ersten Art mit irgend einem Prisma von der zweyten Art, anstatt des gleichen kubischen Inhaltes, eine gleiche Oberfläche haben,

so muß die reguläre Grundfläche des ersteren, mit Beibehaltung ihrer Regularität und Seitenzahl vergrößert werden, weil dadurch nicht bloß die Grundfläche, sondern auch jede seiner Seitenflächen, mithin die ganze Oberfläche vergrößert wird. Alsdann wird aber auch zugleich der kubische Inhalt größer. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Unter allen geraden Prismen von einer gleichen Anzahl der Seitenflächen, gleicher Höhe und Oberfläche, hat dasjenige, welches auf einer regulären Grundfläche stehet, den größten kubischen Inhalt.

§. 209.

Da der Kreis eine kleinere Peripherie hat, als jedes reguläre Vieleck von gleichem Inhalte; so hat auch ein Cylinder von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche mit einem Prisma, eine kleinere Oberfläche als das Prisma. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Die Oberfläche eines Cylinders ist immer kleiner als die Oberfläche eines Prismas von gleicher Höhe und gleichem kubischen Inhalte.

Soll daher ein Cylinder mit einem Prisma von gleicher Höhe auf einer regulären Grundfläche eine gleiche Oberfläche haben: so muß die Grundfläche des ersteren größer seyn als die des letzteren; alsdann wird aber auch zugleich der Inhalt des Cylinders größer seyn als der des Prismas. Hieraus erhält man den folgenden Satz:

Der kubische Inhalt eines Cylinders ist immer größer als der kubische Inhalt eines Prismas auf einer regulären Grundfläche von gleicher Höhe und Oberfläche mit dem Cylinder.

§ 210.

Hülfssatz.

Wenn man um die Grundfläche eines geraden Cylinders irgend ein reguläres oder irreguläres Vieleck beschreibt, und auf dieses Vieleck ein gerades Prisma von gleicher Höhe mit dem Cylinder setzt: so verhält sich immer der kubische Inhalt und die Oberfläche des Cylinders zu dem Inhalte und der Oberfläche des umschriebenen Prismas, wie die Peripherie der Grundfläche des ersteren, zur Peripherie der Grundfläche des letzteren.

Bew. Jeder Kreis verhält sich zu seinem umschriebenen regulären oder irregulären Vielecke, wie die Peripherie des Kreises zur Peripherie des Vielecks. Es verhält sich demnach auch die Grundfläche des Cylinders zur Grundfläche des umschriebenen Prismas, wie die Peripherie der ersteren Grundfläche zur Peripherie der letzteren. Eben so verhält sich aber auch die krumme Fläche des Cylinders zur Summe der Seitenflächen des Prismas. Es verhält sich folglich auch die ganze Oberfläche des Cylinders zur ganzen Oberfläche des Prismas, wie die Grundfläche des ersteren zur Grundfläche des letzteren, oder wie der Inhalt des ersteren zum Inhalte des letzteren. Oberfläche und Inhalt der beyden Körper verhalten sich also wie die Grundflächen selbst, oder wie ihre Peripherien.

Beysp. Das umschriebene Vieleck sey ein Quadrat, also das Prisma ein rechtwinkeliges Parallelepiped; der Halbmesser des Kreises sey $= r$, die Höhe der beyden Körper $= h$; so ist der Inhalt des Cylinders $= \pi r^2 h$, und seine Oberfläche $= 2\pi rh + 2\pi r^2$; ferner der Inhalt des Prismas $= 4 r^2 h$, und seine Oberfläche $= 8 rh + 8 r^2$. Es ist aber, $\pi r^2 h : 4 r^2 h = (2\pi rh + 2\pi r^2) : (8 rh + 8 r^2) = \pi : 4$.

und $\pi : 4 = 2\pi r : 8r$ = Periph. des Kreises : Periph. des Quadrats; wie erfordert wird.

Zus. Sind die um die Grundflächen beschriebenen Vielecke für irgend zwey Cylinder einander ähnlich, so hat jeder der beyden Kreise, welche diesen zu Grundflächen dienen, zu seinem umschriebenen Vielecke einerley Verhältniß; folglich haben auch die Cylinder und ihre Oberflächen zu den respektiven Prismen und ihren Oberflächen einerley Verhältniß. Sind demnach die Cylinder an Inhalt gleich, so sind auch die umschriebenen Prismen an Inhalt gleich, und die Oberflächen der Cylinder stehen in dem nämlichen Verhältnisse zu einander als die Oberflächen ihrer Prismen. Sind umgekehrt die Cylinder an Oberfläche gleich, so sind auch ihre Prismen an Oberfläche gleich, und die Cylinder stehen in Ansehung ihres Inhaltes in dem nämlichen Verhältnisse als ihre Prismen.

§. 211.

Aufg. Unter allen geraden Cylindern von gleichem kubischen Inhalt denjenigen zu finden, welcher die kleinste Oberfläche hat.

Aufl. Man denke sich um alle Cylinder von gleichem kubischen Inhalte Parallelepipeden (also Prismen) mit quadratischen Grundflächen beschrieben; alsdann sind nach dem vorigen § Zus. die umschriebenen Parallelepipeden ebenfalls gleich, und ihre Oberflächen sind den Oberflächen der Cylinder, um welche sie beschrieben sind, proportional. Soll daher die Oberfläche des Cylinders ein Minimum seyn, so muß auch die Oberfläche seines Parallelepipeds ein Minimum seyn. Unter allen Parallelepipeden von gleichem Inhalte hat aber der Kubus die kleinste Oberfläche, (§ 197); folglich hat auch der in dem Kubus eingeschriebene Cylinder die kleinste Oberfläche.

§ 212.

Aufg. Unter allen geraden Cylindern von gleicher Oberfläche denjenigen zu finden, welcher den größten kubischen Inhalt hat.

Aufl. Denkt man sich um alle Cylinder von gleicher Oberfläche Parallelepipede mit quadratischen Grundflächen beschrieben; so sind (§ 210 Zus.) die Oberflächen der umschriebenen Parallelepipeden ebenfalls gleich, und ihr Inhalt ist dem Inhalte der Cylinder, um welche sie beschrieben sind, proportional. Soll daher der Cylinder ein Maximum seyn, so muß auch sein Parallelepiped ein Maximum seyn. Unter allen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche hat aber der Kubus den größten Inhalt (§ 197); folglich hat auch der in dem Kubus eingeschriebene Cylinder den größten Inhalt.

§ 213.

Aus § 211 und § 212 ergiebt sich der folgende Satz:

Der Cylinder, welcher in einem Kubus eingeschrieben werden kann, d. h. der Cylinder, dessen Höhe dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich ist; hat unter allen Cylindern von gleichem Inhalte die kleinste Oberfläche, und unter allen Cylindern von gleicher Oberfläche den größten Inhalt.

Es sey der Inhalt eines solchen Cylinders $= q$, der Durchmesser seiner Grundfläche $= x$; so muß seyn, $\frac{1}{4}\pi x^3 = q$, und daher $x = \sqrt[3]{\frac{4q}{\pi}}$. Unter allen geraden Cylindern von dem gegebenen Inhalte $= q$, hat demnach derjenige, dessen Höhe und Durchmesser der Grundfläche $= \sqrt[3]{\frac{4q}{\pi}}$, die kleinste Oberfläche.

Es sey ferner die Oberfläche eines solchen Cylinders = f, der Durchmesser seiner Grundfläche = y: so muß seyn, $\frac{3}{2} \pi y^2 = f$, und daher $y = \sqrt{\frac{2f}{3\pi}}$. Unter allen geraden Cylindern von der gegebenen Oberfläche = f, hat demnach derjenige, dessen Höhe und Durchmesser der Grundfläche $= \sqrt{\frac{2f}{3\pi}}$, den größten Inhalt.

§ 214.

Aufg. AB, CD, (Fig. 105) seyen zwey gleiche in einer und derselben Ebene, die E heißen mag, liegende gerade Linien, von gegebener Lage; der Ebene parallel sey die unbegränzte gerade Linie MN, deren Projektion M'N' die Linien AB, CD, in m, n, unter gleichen Winkeln Bmn, Dnm, schneidet: man soll auf der Linie MN einen Punkt P finden, der die Eigenschaft hat, daß wenn die Linien PA, PB, PC, PD, gezogen werden, die Summe der hierdurch entstandenen beyden Dreyecke PAB, PCD, ein Minimum werde.

Aufl. 1) Es sey p die Projektion des Punktes P auf die Ebene E, also Pp auf dieser Ebene perpendikulär. Man ziehe nun ph auf AB, und pk auf CD perpendikulär, wie auch die Linien Ph, Pk; so wird auch Ph auf AB, und Pk auf CD perpendikulär seyn. Die Linien Ph, Pk sind also die Höhen der beyden Dreyecke PAB, PCD. Da diese Dreyecke gleiche Grundlinien haben, so ist ihre Summe ein Minimum, wenn Ph + Pk ein Minimum wird.

2) Da ph = pm . Sin. pmh, und pk = pn . Sin. pnk = pn . Sin. pmh; so ist ph + pk = (pm + pn) Sin. pmh = mn . Sin. pmh. Es behält demnach ph + pk für alle Punkte P, welche in der Linie MN liegen, dieselbe Größe,

und ist also gegeben. Nimmt man daher in der Richtung der Linie ph, pk' = pk, so ist auch hk' gegeben. Ziehet man ferner die Linie Pk', so ist Pk' = Pk, und Ph + Pk = Ph + Pk'. Soll daher Ph + Pk ein Minimum seyn, so muß Ph + Pk' ein Minimum seyn, folglich auch der Umfang des Dreyeckes hPk'. Es ist aber Pp auf hk' perpendikulär und gegeben; also ist auch der Inhalt des Dreyeckes Phk' gegeben. Unter allen Dreyecken von gleichem Inhalte über derselben Grundlinie, hat aber das gleichschenkelige den kleinsten Umfang; also muß Ph = Pk' = Pk seyn; also auch ph = pk' = pk; also auch pm = pn.

3) Die Projektion p des Punktes P, für welchen △ APB + △ CPD ein Minimum wird, liegt demnach in der Mitte des Stückes mn, welches von der Projektion M'N' zwischen den Linien AB, CD, enthalten ist. Errichtet man also aus p auf die Ebene E das Perpendikel pP, so ist der Punkt P, wo dasselbe die Linie MN trifft, derjenige Punkt, für welchen die Summe der Dreyecke APB, CPD, ein Minimum wird.

Anmerk. In der Figur ist angenommen worden, daß der Punkt p zwischen den Linien AB, CD, oder ihren Verlängerungen falle. Ist dies nicht der Fall, und fällt der Punkt p außerhalb dieser Linien; so ist ph — pk anstatt ph + pk gegeben; alle übrige Schlüsse bleiben wie vorher.

§ 215.

Aufg. Unter allen Pyramiden von gegebener Höhe auf einer gegebenen regulären Grundfläche diejenige zu finden, welche die kleinste Summe der Seitenflächen hat.

Aufl. 1) Es sey ABCDE... (Fig. 108) irgend ein reguläres Vieleck, AK eine Linie aus einer seiner Spitzen durch den Mittelpunkt desselben. Man ziehe eine beliebige Linie XY auf AK perpendikulär, und sehe diese Linie als die Pro-

jektion einer anderen geraden Linie L an, welche in der gegebenen Höhe ihr parallel gezogen ist; sie werde von den Seiten des Vielecks AB, BC, xc., welche diesseits der Linie AC liegen, in den Punkten m, m', xc., und von den Seiten AG, GF, xc., welche jenseits liegen, in den Punkten n, n', xc. getroffen. Der Punkt K, wo die Linie AL die XY schneidet, halbirt alsdann, wie leicht einzusehen ist, alle die Stücke mn, m'n', xc. der Linie XY, welche zwischen jeden zwey von A gleich weit entfernten Seiten enthalten sind.

2) Man denke sich nun über dem Vielecke eine Pyramide gesetzt, welche ihre Spitze in der Linie L hat. Die Summe ihrer dreyeckigen Seitenflächen über AB, AG, wird alsdann nach dem vorigen § für diejenige Pyramide am kleinsten seyn, deren Spitze die Projektion K hat. Für diese Pyramide ist aber auch zugleich die Summe der Seitenflächen über BC, GF, und überhaupt die Summe jeder zwey Seitenflächen, welche zwey gleich weit von A entfernte Seiten des Vielecks zu Grundlinien haben, am kleinsten. Da ferner die Seite DE, für den Fall, wo die Anzahl der Seiten ungerade seyn sollte, der Linie XY, also auch der Linie L parallel ist, so bleibt die Seitenfläche über derselben für alle Pyramiden, deren Spitzen in der Linie L liegen, von derselben Größe. Hieraus folgt nun, daß auch die Summe aller Seitenflächen, für diejenige Pyramide, für welche K die Projektion der Spitze ist, kleiner sey, als für jede andere Pyramide, welche ihre Spitze in der Linie L hat.

3) Da dies für jede Linie L gilt, deren Projektion auf AL perpendikulär ist, so folgt, daß die Spitze derjenigen Pyramide, welche unter allen möglichen von der gegebenen Höhe und auf der gegebenen Grundfläche die kleinste Summe der

Seitenflächen haben soll, ihre Projektion in der Linie AL haben müsse.

4) Was hier für die Linie AL bewiesen worden, gilt auch für alle andere Linien, welche aus den übrigen Spitzen des Vielecks durch den Mittelpunkt desselben gezogen werden können. Die Projektion der Spitze der gesuchten Pyramide kann demnach nirgends anders liegen, als in dem Punkte, wo sich alle diese Linien schneiden, d. h. in dem Mittelpunkte des Vielecks.

5) Hieraus ergiebt sich nun der folgende Satz:

Unter allen Pyramiden von gleicher Höhe und auf derselben regulären Grundfläche hat die gerade Pyramide die kleinste Summe der Seitenflächen.

Zus. Der hier gefundene Satz läßt sich auch auf solche Pyramiden ausdehnen, deren Grundflächen nicht regulär, aber doch so beschaffen sind, daß sich zwey auf einander perpendikuläre Linien angeben lassen, deren jede die Grundfläche in gleiche und ähnliche Hälften theilt, und die man aus diesem Grunde ihre Axen nennen kann; denn für jede dieser Axen werden die Projektionen der Linien L von zwey korrespondirenden, also gleichen Seiten der Figur unter gleichen Winkeln geschnitten; woraus sich denn ferner wie in 2 zeigen läßt, daß die Projektion der Spitze derjenigen Pyramide, welcher das Minimum zukommt, in beyden Axen zugleich liegen müsse, also in dem Punkte, wo sie sich schneiden.

§ 216.

Aufg. Unter allen Kegeln von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche denjenigen zu finden, welcher die kleinste krumme Fläche hat.

Aufl. Die Grundfläche des Kegels kann als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten angesehen werden,

also der Kegel selbst als eine Pyramide mit unendlich vielen Seitenflächen. Der Satz des vorigen §'s auf den Kegel angewandt, giebt demnach den folgenden:

Der gerade Kegel hat eine kleinere krumme Fläche, als jeder schiefe Kegel von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche.

Zus. Dieser Satz gilt aber nicht bloß für eigentliche Kegel, d. h. solche, welche einen Kreis zur Grundfläche haben, sondern auch überhaupt für alle solche kegelförmige Körper, deren Grundflächen zwey auf einander perpendikuläre Axen haben.

§. 217.

Aufg. Unter allen dreyseitigen Pyramiden auf einer der Gestalt und Größe nach gegebenen Grundfläche, welche eine gegebene Höhe und eine bloß der Größe nach gegebene Seitenfläche haben, diejenige zu finden, für welche die Summe der beyden anderen Seitenflächen ein Minimum wird.

Aufl. 1) Es sey ABC (Fig. 107) die gegebene Grundfläche, und P die Spitze der gesuchten Pyramide, APB die der Größe nach gegebene Seitenfläche, p die Projektion des Punktes P, also Pp die gegebene Höhe. Nach der Aufgabe soll nun △ APC + △ BPC ein Minimum seyn.

2) Da das Dreyeck ABC der Gestalt und Größe nach gegeben ist, so sind auch seine Seiten AB, BC, AC, gegeben. In dem Dreyecke APB ist also die Grundlinie AB, folglich auch die Höhe Pl gegeben. In dem rechtwinkeligen Dreyecke Ppl ist also Pl und Pp gegeben, mithin der Neigungswinkel der Flächen APB, ACB, und daher auch die Projektion ApB der Seitenfläche APB; also auch seine Ergänzung zum gege-

benen Dreyecke ABC, nämlich die Summe der beyden Dreyecke ApC, BpC; diese Summe sey = q.

3) Man ziehe nun ph auf AC, und pk auf BC perpendikulär; so ist auch Ph auf AC, und Pk auf BC perpendikulär. Es sey AC = a, BC = b, Pp = h, ph = x, pk = y; alsdann ist $Ph = \sqrt{(h^2 + x^2)}$, $Pk = \sqrt{(h^2 + y^2)}$, folglich $\triangle ApC + \triangle BpC = \frac{1}{2} ax + \frac{1}{2} by$, und $2\triangle APC + 2\triangle BPC$

$$= a\sqrt{(h^2 + x^2)} + b\sqrt{(h^2 + y^2)}$$
$$= \sqrt{(a^2h^2 + a^2x^2)} + \sqrt{(b^2h^2 + b^2y^2)}.$$

Die erste Summe ist = q, die zweyte soll ein Minimum seyn. Man hat also zur Bestimmung der Größen x, y, die folgenden zwey Bedingungsgleichungen:

$$ax + by = 2q$$
$$\sqrt{(a^2h^2 + a^2x^2)} + \sqrt{(b^2h^2 + b^2y^2)} = \text{Minimum}.$$

4) Wird ax = u, by = z gesetzt, so verwandeln sich diese Bedingungsgleichungen in folgende:

$$u + z = 2q$$
$$\sqrt{(a^2h^2 + u^2)} + \sqrt{(b^2h^2 + z^2)} = \text{Minimum}.$$

Allgemeine Regeln für die Auflösung solcher Gleichungen giebt die Differentialrechnung; hier kann man sich des folgenden Kunstgriffes bedienen.

5) Aus den Endpunkten P, Q (Fig. 108) einer Linie PQ = 2 q, errichte man zwey Perpendikel, PM = ah, QN = bh; aus den so bestimmten Punkten M, N, ziehe man nach irgend einem Punkte X auf der Linie PQ, die Linien MX, NX, und setze PX = u, QX = z. Die rechtwinkeligen Dreyecke MPX, NQX, geben alsdann, $MX = \sqrt{(a^2h^2 + u^2)}$, $NX = \sqrt{(b^2h^2 + z^2)}$. Man hat also,

$$u + z = 2q,$$
$$\sqrt{(a^2h^2 + u^2)} + \sqrt{(b^2h^2 + z^2)} = MX + NX.$$

Um diese Gleichungen denen in 4 völlig gleich zu machen, muß also MX + NX ein Minimum seyn. Es kommt also alles auf die Auflösung dieser Aufgabe an: Auf einer gegebenen Linie einen Punkt von solcher Beschaffenheit zu finden, daß, wenn von zwey gegebenen, außerhalb dieser Linie liegenden Punkten, zwey gerade Linien nach jenem Punkte gezogen werden, die Summe derselben ein Minimum sey. Die Auflösung dieser Aufgabe findet sich im ersten Theile dieser Sammlung § 119. Es wurde daselbst gezeigt, daß alsdann die Winkel MXP, NXQ, gleich seyn müssen. Für diesen Fall sind aber die Dreyecke MPX, NQX, einander ähnlich, und es ist PX : XQ = MP : NQ, oder u : z = ah : bh = a : b. Werden in dieser Proportion für u und z, wieder ihre Werthe aus 4 gesetzt, so erhält man ax : by = a : b, und hieraus x = y.

6) Die Summe der Dreyecke APC, BPC, (Fig. 107) ist demnach ein Minimum, wenn x = y, d. h. wenn ph = pk. Alsdann ist auch Ph = Pk, und der Winkel Php = Pkp.

7) Hieraus ergiebt sich, daß die Summe der beyden Seitenflächen APC, BPC, ein Minimum wird, wenn die Höhen derselben und ihre Neigungswinkel gegen die Grundfläche, wie auch die Höhen ihrer Projektionen einander gleich sind.

§ 218.

Aufg. Unter allen dreyseitigen Pyramiden von gleicher Höhe und auf einer der Gestalt und Größe nach gegebenen Grundfläche diejenige zu finden, welche die kleinste Summe der Seitenflächen hat.

Aufl. Im vorigen § wurde gezeigt, daß wenn eine der Seitenflächen, etwa APB eine gegebene Größe hat, die Summe der beyden übrigen Flächen APC, BPC, also auch die Summe aller drey Seitenflächen der Pyramide ein Mini-

mum wird, wenn $ph = pk$. Da man nun jede der Seitenflächen als gegeben ansehen kann, so folgt, daß die drey Perpendikel ph, pk, pl, einander gleich seyn müssen. Der Punkt p ist demnach der Mittelpunkt des in dem Dreyecke ABC beschriebenen Kreises. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Unter allen dreyseitigen Pyramiden von gleicher Höhe und auf einer der Gestalt und Größe nach gegebenen Grundfläche hat diejenige die kleinste Summe der Seitenflächen, für welche die Projektion ihrer Spitze in den Mittelpunkt des in der Grundfläche beschriebenen Kreises fällt, und für welche daher auch sowohl die Höhen der Seitenflächen, als ihre Neigungswinkel gegen die Grundfläche von gleicher Größe sind.

§ 219.

Aufg. Die Grundfläche und eine Seitenfläche einer dreyseitigen Pyramide sind ihrer Größe nach gegeben; auch ist die Kante, welche diese Flächen gemeinschaftlich haben, nebst der Höhe der Pyramide gegeben: man soll diejenige Pyramide finden, für welche die Summe der Seitenflächen ein Minimum wird.

Aufl. 1) Es sey ABC (Fig. 107) die Grundfläche, und P die Spitze einer der Pyramiden, wofür das Minimum gesucht wird, APB die der Größe nach gegebene Seitenfläche, also AB die gegebene Kante; es sey ferner p die Projektion der Spitze P, alsdann sind ApB, BpC, ApC, die Projektionen der Dreyecke APB, BPC, APC, auf die Grundfläche. Man ziehe die Perpendikel ph, pk, pl.

2) Die Grundlinie AB und der Inhalt des Dreyecks APB ist gegeben; also auch seine Höhe Pl. In dem rechtwinkeligen Dreyecke Plp, ist demnach Pl und Pp gegeben; also auch der Neigungswinkel Plp der Seitenfläche APB gegen die Grund-

fläche; also auch $\triangle$ ApB (= $\triangle$ APB . Cos. Plp); also auch, da das Dreyeck ABC der Größe nach gegeben ist, die Summe der Dreyecke ApC, BpC. Setzt man daher $\triangle$ ApC + $\triangle$ BpC = s, so ist s eine gegebene Größe.

3) Nach § 218 muß für jede bestimmte Grundfläche, wenn $\triangle$ APC + BPC ein Minimum seyn soll, der Punkt P so liegen, daß die Neigungswinkel Php, Pkp, der Seitenflächen APC, BPC, gegen die Grundfläche einander gleich werden. Es sey jeder dieser Neigungswinkel = φ, und die Summe der Dreyecke ABC, BPC, = S.

4) Alsdann ist $\triangle$ ApC = $\triangle$ APC . Cos. φ, $\triangle$ BpC = $\triangle$ BPC . Cos. φ; also $\triangle$ ApC + $\triangle$ BpC = ($\triangle$ APC + BPC) Cos. φ, oder s = S Cos. φ. Soll daher S ein Minimum seyn, so muß, da s gegeben ist (2), Cos. φ ein Maximum, folglich der Winkel φ ein Minimum seyn. Es ist aber Tang. $\varphi = \frac{Pp}{ph}$, und Pp gegeben; folglich wird Tang. φ, und also auch φ ein Minimum, wenn ph = pk ein Maximum wird.

5) Da $\triangle$ ApC = $\frac{1}{2}$ ph . AC, $\triangle$ BpC = $\frac{1}{2}$ pk . BC = $\frac{1}{2}$ph . BC, so ist s = $\frac{1}{2}$ (AC + BC) ph. Soll daher ph ein Maximum seyn, so muß AC + BC ein Minimum seyn, also auch die Summe der drey Seiten der Grundfläche AC + BC + AB. Unter allen Dreyecken von gegebener Größe und auf einer gegebenen Grundlinie hat aber das gleichschenklige den kleinsten Umfang; folglich ist das Dreyeck ABC gleichschenkelig, und zwar ist AC = BC.

6) Demnach ist die gesuchte Pyramide diejenige, für welche die Grundfläche gleichschenkelig, und ph = pk ist.

Zus. Wird in der Aufgabe die Bedingung, daß eine Seitenfläche der Größe nach gegeben sey, weggelassen; so kann

man eine jede der drey Seitenflächen und die ihr mit der Grundfläche gemeinschaftliche Seite, als gegeben angesehen, und dafür die kleinste Summe der Seitenflächen suchen. Alsdann werden AB = AC = BC, und ph = pk = pl seyn müssen. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Unter allen gleich hohen dreyseitigen Pyramiden auf einer der Größe nach gegebenen Grundfläche hat diejenige die kleinste Summe der Seitenflächen, welche ein gleichseitiges Dreyeck zur Grundfläche hat, und deren Spitze so liegt, daß ein Perpendikel aus dieser Spitze auf die Grundfläche herabgelassen, den Mittelpunkt derselben trifft, für welche daher die Seitenflächen gleiche Höhen und gleiche Neigung gegen die Grundfläche haben.

§ 220.

Aus dem Zusatze des vorigen §'s läßt sich nun der folgende Schlußsatz herleiten:

Unter allen gleich großen dreyseitigen Pyramiden hat das Tetraeder die kleinste Oberfläche.

Denn nimmt man eine der Gränzflächen für gegeben an, so muß diese gleichseitig seyn; weil, wenn dies nicht wäre, die Summe der Seitenflächen nicht die kleinste, also auch die Oberfläche nicht die kleinste seyn könnte. Da nun dies gilt, was für eine Gränzfläche man auch für die Grundfläche annehmen mag, so läßt sich schließen, daß alle gleichseitige Dreyecke seyn müssen.

§ 221.

Alle die bisher gefundenen Sätze für die Pyramide lassen sich auch umkehren, und auf die, nun schon hinlänglich bekannte Art, beweisen. So z. B. könnte man aus dem Satze des vorigen §'s den folgenden herleiten:

Unter

Unter allen dreyseitigen Pyramiden von gleicher Oberfläche hat das Tetraeder den größten Inhalt. Denn da das Tetraeder von gleichem Inhalte mit irgend einer anderen dreyseitigen Pyramide P, eine kleinere Oberfläche hat als diese; so muß ein Tetraeder von gleicher Oberfläche mit der Pyramide P einen größeren Inhalt haben; und da dies von jeder Pyramide P gilt, so hat das Tetraeder einen größeren Inhalt, als jede andere dreyseitige Pyramide von gleicher Oberfläche.

§ 222.

Aufg. Unter allen Pyramiden von gleicher Höhe, auf Grundflächen von einer gleichen Anzahl der Seiten, gleicher Peripherie und gleichem Inhalte, diejenige zu finden, in welcher die Summe der Seitenflächen, also auch die Oberfläche ein Minimum ist.

Aufl. 1) Es bezeichnen A, A', A'', ꝛc. die dreyeckigen Seitenflächen der gesuchten Pyramide; B, B', B'', die respektiven Projektionen derselben auf die Grundfläche; x, x', x'', ꝛc. die gemeinschaftlichen Grundlinien dieser Dreyecke, also die Seiten der Grundfläche; y, y', y'', ꝛc. die respektiven Höhen der Dreyecke A, A' A'', ꝛc. und z, z', z'', ꝛc. die respektiven Höhen der Dreyecke B, B', B'', ꝛc. Es sey ferner die gegebene Höhe der Pyramide $= h$, die gegebene Peripherie der Grundfläche $= p$, und ihr ebenfalls gegebener Inhalt $= q$.

2) Nach dieser Bezeichnung hat man,

$$2A = xy,\ 2A' = x'y',\ 2A'' = x''y'',\ \text{ꝛc.}$$
$$2B = xz,\ 2B' = x'z',\ 2B'' = x''z'',\ \text{ꝛc.}$$
$$y^2 = h^2 + z^2,\ y'^2 = h^2 + z'^2,\ y''^2 = h^2 + z''^2,\ \text{ꝛc.}$$

3) Die Aufgabe fordert, daß $x + x' + x'' +$ ꝛc. $= p$, $B + B' + B''$ ꝛc. $= q$, $A + A' + A'' +$ ꝛc., oder auch

$2A + 2A' + 2A'' +$ 2c. = Minimum. Werden hierin die Werthe aus 2 substituirt, so erhält man die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$x + x' + x'' + \text{ꝛc.} = p,$$
$$xz + x'z' + x''z'' + \text{ꝛc.} = 2q,$$
$$xy + x'y' + x''y'' + \text{ꝛc.} = \text{Minimum}.$$

4) Man quadrire diese drey Gleichungen; dies giebt

$$x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{ꝛc.} + 2xx' + 2xx'' + 2x'x'' + \text{ꝛc.} = p^2,$$
$$x^2z^2 + x'^2z'^2 + x''^2z''^2\ \text{ꝛc.} + 2xx'zz' + 2xx''zz'' + 2x'x''z'z'' + \text{ꝛc.}$$
$$= 4q^2.$$
$$x^2y^2 + x'^2y'^2 + x''^2y''^2\ \text{ꝛc.} + 2xx'yy' + 2xx''yy'' + 2x'x''y'y''$$
$$+ \text{ꝛc.} = \text{Minimum}.$$

5) Man multiplicire die erste dieser Gleichungen mit h^2, addire sie hierauf zur zweyten, und ziehe die Summe von der dritten ab; dies giebt,

$$x^2(y^2 - z^2 - h^2) + x'^2(y'^2 - z'^2 - h'^2) + x''^2(y''^2 - z''^2 - h^2) + \text{ꝛc.}$$
$$+ 2xx'(yy' - zz' - h^2) + 2xx''(yy'' - zz'' - h^2)$$
$$+ 2x'x''(y'y'' - z'z'' - h^2) + \text{ꝛc.} + h^2p^2 + 4q^2$$
$$= \text{Minimum}.$$

Wegen 2 ist aber

$$y^2 - z^2 - h^2 = 0,\ y'^2 - z'^2 - h^2 = 0,$$
$$y''^2 - z''^2 - h^2 = 0,\ \text{ꝛc.};$$

man hat also

$$2xx'(yy' - zz' - h^2) + 2xx''(yy'' - zz'' - h^2)$$
$$+ 2x'x''(y'y'' - z'z'' - h^2) + \text{ꝛc.} + h^2p^2 + 4q^2$$
$$= \text{Minimum}.$$

6) Dieser Bedingungsgleichung geschiehet aber ein Genüge, wenn man $yy' - zz' - h^2 = 0$, $yy'' - zz'' - h^2 = 0$, $y'y'' - z'z'' - h^2 = 0$, ꝛc. setzt, weil $h^2p^2 + 4q^2$ gegeben

ist. Negativ können die Ausdrücke $yy' - zz' - h^2$, $yy'' - zz'' - h^2$ nicht werden; dies läßt sich so beweisen.

7) Da $y^2y'^2 = z^2z'^2 + h^2(z^2 + z'^2) + h^4$ und immer $z^2 + z'^2 \geqq 2zz'$ (weil nämlich $(z - z')^2 = z^2 + z'^2 - 2zz'$ und $(z - z')^2$ immer eine positive Größe ist); so ist $y^2y'^2 \geqq z^2z'^2 + 2h^2zz' + h^4$, oder $y^2y'^2 \geqq (zz' + h^2)^2$; folglich auch $yy' \geqq zz' + h^2$. Es kann also yy' nie kleiner als $zz' + h^2$, und also auch $yy' - zz' - h^2$ nie negativ werden. Auf eine gleiche Art läßt es sich für die Ausdrücke $yy'' - zz'' - h^2$, $y'y'' - z'z'' - h^2$, ꝛc. beweisen.

8) Man hat demnach als Bedingung des Minimums die folgenden Gleichungen:

$yy' = zz' + h^2$, $yy'' = zz'' + h^2$, $y'y'' = z'z'' + h^2$, ꝛc.

Oder, wenn man diese Gleichungen quadrirt, für y^2, y'^2, y''^2, ꝛc. ihre Werthe aus 2 setzt, und das, was sich aufhebt, wegläßt, diese

$h^2(z^2 + z'^2 - 2zz') = 0$; $h^2(z^2 + z''^2 - 2zz'') = 0$, ꝛc.

Hieraus erhält man durch die Ausziehung der Wurzeln $z = z' = z'' =$ ꝛc.

9) Demnach ist die gesuchte Pyramide eine solche, in welcher die Höhen der Projektionen aller Seitenflächen einander gleich sind, in welcher folglich alle Seitenflächen eine gleiche Höhe und eine gleiche Neigung gegen die Grundfläche haben. Nimmt man ferner die Projektion der Spitze einer solchen Pyramide für den Mittelpunkt an, und beschreibt mit dem Halbmesser $z = z' = z''$ ꝛc. einen Kreis in der Ebene der Grundfläche, so berührt dieser Kreis die Seiten derselben, und es läßt sich demnach innerhalb der Grundfläche ein Kreis beschreiben.

Erst. Zus. Nennt man eine solche Pyramide, wie die hier beschriebene, eine gerade, so läßt sich das gefundene Resultat so ausdrucken:

Unter allen Pyramiden von gleicher Höhe, auf Grundflächen von einer gleichen Seitenzahl, gleicher Peripherie und gleichem Inhalte, hat die gerade Pyramide die kleinste Oberfläche.

Zweyt. Zus. Hieraus ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz:

Unter allen Pyramiden von gleicher Oberfläche, auf Grundflächen von gleicher Peripherie und gleichem Inhalte hat die gerade Pyramide die größte Höhe, also auch den größten Inhalt.

Denn da eine gerade Pyramide von gleicher Höhe auf einer Grundfläche von gleicher Peripherie und gleichem Inhalte mit irgend einer schiefen Pyramide P eine kleinere Oberfläche als diese hat; so muß die gerade Pyramide, wenn sie mit der schiefen P eine gleiche Oberfläche haben soll, eine größere Höhe haben. Da nun dies für jede Pyramide wie P gilt, so gilt es für alle.

Anmerk. Man vergleiche die hier gegebene analytische Auflösung mit dem synthetischen Verfahren von L'Huilier in dem Theil I. § 121 d. Samml. angeführten Werke p. 132 — 137.

§ 223.

Aufg. Unter allen geraden gleich hohen Pyramiden, auf Grundflächen von gleicher Größe und gleicher Seitenzahl, diejenige zu finden, welche die kleinste Summe der Seitenflächen, also auch die kleinste Oberfläche hat.

Aufl. In einer geraden Pyramide sind die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche alle gleich; folglich verhält sich die Summe aller Seitenflächen zur Sum-

me aller ihrer Projektionen, d. h. zur Grundfläche, wie jede einzelne Seitenfläche zu ihrer Projektion. Man hat also, wenn die Bezeichnung im vorigen § beybehalten, und noch überdies die Summe der Seitenflächen = S gesetzt wird, S : q = A : B = y : z, und daher

$$S = \frac{qy}{z} = q \frac{\sqrt{(h^2 + z^2)}}{z} = q \sqrt{\left(\frac{h^2}{z^2} + 1\right)}.$$

Soll daher S ein Minimum seyn; so muß, da q gegeben ist, $\sqrt{\left(\frac{h^2}{z^2} + 1\right)}$ ein Minimum, und also z ein Maximum seyn. Es ist aber in der geraden Pyramide q = pz; also muß, wenn z ein Maximum seyn soll, p ein Minimum seyn. Unter allen Vielecken von gleichem Inhalte und gleicher Seitenzahl hat aber das reguläre Vieleck die kleinste Peripherie; also ist die Grundfläche der gesuchten Pyramide ein reguläres Vieleck.

Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Unter allen geraden gleich hohen Pyramiden, auf Grundflächen von gleichem Inhalte und gleicher Seitenzahl, hat diejenige Pyramide, deren Grundfläche regulär ist, die kleinste Oberfläche.

§ 224.

Lehrsatz. Eine gerade Pyramide von gegebener Höhe, auf einer regulären, der Größe nach gegebenen Grundfläche hat eine desto kleinere Oberfläche, je größer die Seitenzahl der Grundfläche ist.

Bew. Die Bezeichnung des vorigen §'s beybehalten, ist $S = q \sqrt{\left(\frac{h^2}{z^2} + 1\right)}$. Es wird also S, und folglich auch die Oberfläche desto kleiner seyn, je größer z ist. Könnte

man daher beweisen, daß einem regulären Vielecke von einer größeren Seitenzahl, bey gleichem Inhalte, ein größeres zukommt, als einem eben solchen Vielecke von geringerer Seitenzahl; so wäre der Satz erwiesen.

Daß sich dies aber wirklich so verhalte, kann auf die folgende Art gezeigt werden.

Man denke sich um einem Kreise zwey verschiedene reguläre Vielecke beschrieben; alsdann wird dasjenige, welches die größere Seitenzahl hat, dem Kreise näher kommen, und daher auch einen kleineren Inhalt haben. Soll also ein Vieleck von einer größeren, mit dem von einer geringeren Seitenzahl, einen gleichen Inhalt haben; so muß der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, also z, größer seyn.

§ 225.

Aus § 222, 223, 224, erhält man die folgenden allgemeinen Sätze:

1) Eine gerade Pyramide auf einer regulären Grundfläche hat immer eine kleinere Oberfläche als jede andere, gerade oder schiefe Pyramide von gleicher Höhe, eben so großer, aber beliebig gestalteter Grundfläche, mit einer gleichen oder geringeren Seitenzahl.

Hieraus ferner:

2) Der gerade Kegel hat eine kleinere Oberfläche als jede gerade oder schiefe Pyramide von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche.

3) Der gerade Kegel hat eine kleinere Oberfläche als jeder schiefe Kegel von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche. (Dieser Satz kann auch aus § 216 abgeleitet werden.)

4) Der gerade Kegel hat eine kleinere Oberfläche als

jeder gerade oder schiefe kegelförmige Körper von gleicher Höhe und gleich großer Grundfläche.

Ein Kegel kann nämlich als eine Pyramide auf einer regulären Grundfläche von unendlich vielen Seiten, und ein kegelförmigen Körper, (d. h. ein solcher, welcher irgend eine beliebige krummlinige Figur zur Grundfläche hat) als eine Pyramide auf einer nicht regulären Grundfläche von unendlich vielen Seiten angesehen werden; was daher von dieser gilt, gilt auch von jenem.

§. 226.

Hülfssatz.

Wenn um einen geraden Kegel eine Pyramide beschrieben wird; so verhält sich der Inhalt und die Oberfläche des Kegels zu dem Inhalte und der Oberfläche der Pyramide, wie die Peripherie der Grundfläche des Kegels zur Peripherie der Grundfläche der Pyramide.

Beweis. 1) Da der Kegel und die umschriebene Pyramide eine gleiche Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen. Ein Kreis verhält sich aber zu seinem umschriebenen Vielecke, wie die Peripherie des Kreises zur Peripherie des Vieleckes; also verhalten sich auch jene Körper, wie die Peripherien ihrer Grundflächen.

2) Die Seite des Kegels ist zugleich die Höhe einer jeden Seitenfläche der Pyramide; also verhält sich die krumme Fläche des Kegels zur Summe der Seitenflächen der Pyramide, wie die Peripherie der Grundfläche des ersteren zur Peripherie der Grundfläche der letzteren. Eben so verhalten sich aber auch die Grundflächen selbst; also auch die Oberflächen der Körper.

Erst. Zus. Werden um zwey beliebige Kreise ähnliche Vielecke beschrieben; so hat die Peripherie eines jeden dieser

Kreise zur Peripherie seines Vieleckes einerley Verhältniß. Werden demnach um zwey beliebige Kegel Pyramiden mit ähnlichen Grundflächen beschrieben; so hat auch der Inhalt oder die Oberfläche eines jeden dieser Kegel zu dem Inhalte oder der Oberfläche seiner umschriebenen Pyramide einerley Verhältniß. Es verhalten sich demnach auch die Kegel, in Ansehung ihres Inhalts und ihrer Oberfläche, wie diese Pyramiden.

Zweyt. Zus. Sind demnach zwey Kegel an Inhalt gleich; so sind auch die umschriebenen Pyramiden auf ähnlichen Grundflächen an Inhalt gleich, und die Oberflächen dieser Kegel stehen in dem nämlichen Verhältnisse zu einander, als die Oberflächen ihrer Pyramiden. Sind umgekehrt die Kegel an Oberfläche gleich, so sind auch ihre Pyramiden an Oberfläche gleich, und die Kegel stehen in Ansehung ihres Inhalts in dem nämlichen Verhältnisse als ihre Pyramiden.

§ 227.

Aufg. Unter allen geraden Kegeln von gleichem Inhalte denjenigen zu finden, welcher die kleinste Oberfläche hat; und umgekehrt, unter allen geraden Kegeln von gleicher Oberfläche denjenigen zu finden, welcher den größten Inhalt hat.

Aufl. 1) Man denke sich um alle Kegel von gleichem Inhalte dreyseitige Pyramiden mit gleichseitigen Grundflächen beschrieben: alsdann sind nach dem vorigen § Zus. 2 die umschriebenen Pyramiden ebenfalls gleich, und ihre Oberflächen stehen in dem nämlichen Verhältnisse, als die Oberflächen der Kegel, um welche sie beschrieben sind. Soll daher die Oberfläche des Kegels ein Minimum seyn, so muß auch die Oberfläche seiner Pyramide ein Minimum seyn. Unter allen dreyseitigen Pyramiden von gleichem Inhalte hat aber

das Tetraeder die kleinste Oberfläche (§ 220); folglich hat auch der in dem Tetraeder eingeschriebene Kegel die kleinste Oberfläche.

2) Denkt man sich um alle Kegel von gleicher Oberfläche dreyseitige Pyramiden mit gleichseitigen Grundflächen beschrieben; so sind (§ 226 Zus. 2) die Oberflächen dieser Pyramiden ebenfalls gleich, und ihr Inhalt ist dem Inhalte der Kegel, um welche sie beschrieben sind, proportional. Soll daher dem Kegel das Maximum des Inhalts zukommen; so muß auch seine Pyramide ein Maximum seyn. Unter allen dreyseitigen Pyramiden von gleicher Oberfläche hat aber das Tetraeder den größten Inhalt (§ 221); folglich hat auch der in dem Tetraeder beschriebene Kegel den größten Inhalt.

Zus. Es ist nicht schwer einzusehen, daß die Seite des in einem Tetraeder eingeschriebenen Kegels dreymal so groß als der Halbmesser seiner Grundfläche sey. Demnach giebt ein Kegel, dessen Seite dreymal so groß als der Halbmesser seiner Grundfläche ist, ein Minimum der Oberfläche bey gleichem Inhalte, und ein Maximum des Inhalts bey gleicher Oberfläche.

§ 228.

Aus allen dem, was bisher gefunden worden, ergiebt sich nun der folgende Schlußsatz:

Ein gerader Kegel, dessen Seite dreymal so groß ist, als der Halbmesser seiner Grundfläche hat eine kleinere Oberfläche als jede Pyramide, oder als jeder Kegel und kegelförmige Körper von gleichem Inhalte, und umgekehrt, einen größern Inhalt als jede Pyramide, und als jeder Kegel und kegelförmige Körper von gleicher Oberfläche.

§. 229.

Wenn man aus dem Mittelpunkte O (Fig. 109) eines regulären Sechseckes ABCDEF nach den Endpunkten B, D, F, desselben die Linien OB, OD, OF ziehet, so erhält man drey gleiche und ähnliche Rhomben BAFO, BCDO, DEFO. Ist also ABCDEF die obere Fläche eines sechsseitigen Prismas, so läßt sich dasselbe in drey vierseitige Prismen mit rhombischen Grundflächen zerlegen, deren obere Flächen die vorher genannten Rhomben sind.

Es sey ABOFPQR eines dieser Prismen. Man ziehe die Diagonale BF, und lege durch diese Linie und durch einen beliebigen Punkt X der ihr gegenüber liegenden Seitenlinie AQ eine Ebene BXF. Die Pyramide XABF, welche hierdurch von dem Prisma abgeschnitten wird, lasse man sich um BF so lange drehen, bis das Dreyeck BAF auf das Dreyeck BOF fällt, und so die Pyramide XABF in X'BOF zu liegen kommt. Alsdann ist das Dreyeck BX'F dem Dreyecke BXF ähnlich gleich und mit ihm in einer Ebene; folglich BX'FX ein Rhombus. Das abgekürzte vierseitige Prisma BX'FXPQR, welches hieraus entstehet, ist dem Prisma ABOFPQR an Inhalt gleich, weil die abgeschnittene Pyramide XABF durch die hinzugekommene X'BOF ersetzt worden. Läßt man eben so in den beyden übrigen vierseitigen Prismen, deren obere Flächen die Rhomben BCDO, DEFO sind, die Grundflächen BCD, DEF, der abgeschnittenen Pyramiden sich um die Diagonalen BD, DF, drehen: so werden sich die Spitzen aller dieser Pyramiden in einen einzigen Punkt X' vereinigen, wodurch dieser Punkt die Spitze eines von drey Rhomben begränzten körperlichen Winkels wird.

Durch die angegebene Construktion erhält man nun einen sechsseitigen prismatischen Körper mit einem von Rhomben ge-

bildeten, in einer Spitze auslaufenden Dache, trapezischen und gleichen Seitenflächen, einer regulären Grundfläche und zweyerley Seitenlinien. Sein Inhalt ist dem Inhalte des sechsseitigen Prismas gleich, woraus er entstanden ist, aber seine Fläche ist verschieden.

§ 230.

Aufg. Unter allen Körpern von der im vorigen § beschriebenen Art, welche einen gleichen Inhalt und einerley Grundfläche haben, denjenigen zu finden, welcher die kleinste Oberfläche hat.

Aufl. Da alle Körper, für welche hier das Minimum der Oberfläche gesucht wird, einerley Inhalt und einerley Grundfläche haben sollen, so müssen sie alle aus demselben sechsseitigen Prisma erzeugt worden seyn. Soll nun die Oberfläche des Körpers ein Minimum werden, so muß auch, wegen der gegebenen Grundfläche, die Summe der Seitenflächen und der Rhomben des Daches, ein Minimum werden, oder, welches auf das Nämliche hinausläuft, es muß in jedem der vierseitigen Prismen, worin das sechsseitige zerlegt worden, die Summe der Flächen BX′FX, BXQP, FXQR, ein Minimum werden, und daher auch die Hälfte dieser Summe. Da nun △BXF = ½ Rhomb. BX′FX, und Trap. BXQP = Trap. FXQR; so ist △ BXF + Trap. BXQP = ½ [Rhomb. BX′FX + Trap. BXQP + Trap. FXQR]; es muß also auch △ BXF + Trap. BXQP ein Minimum werden. Es ist aber △ BXF + Trap. BXQP = △BXF + Prlg. ABPQ — △ ABX, und Prlgr. ABQP gegeben; folglich muß △ BXF — △ BAX ein Minimum werden. Die Aufgabe ist also darauf reducirt, den Punkt X zu finden, für welchen △ BXF — △ ABX ein Minimum wird.

Es sey die gegebene Linie AB = 2a, die gesuchte

$AX = x$. Man ziehe AK auf BF perpendikulär, und hierauf die Linie KX; so ist auch KX auf BF perpendikulär. Es ist also,

$$AK = AB \cdot \text{Sin. } ABK = 2a \text{ Sin. } 30^\circ = a$$
$$BF = 2 BK = 2 AB \text{ Cos. } 30^\circ = 2a\sqrt{3}$$
$$KX = \sqrt{(AK^2 + AX^2)} = \sqrt{(a^2 + x^2)}$$
$$\triangle ABX = \tfrac{1}{2} BA \cdot AX = ax$$
$$\triangle BXF = \tfrac{1}{2} BF \cdot KX = a\sqrt{(3a^2 + 3x^2)}$$
$$\triangle BXF - \triangle ABX = a\sqrt{(3a^2 + 3x^2)} - ax.$$

Es muß demnach $a\sqrt{(3a^2 + 3x^2)} - ax$, und folglich auch $\sqrt{(3a^2 + 3x^2)} - x$ ein Minimum werden. Man setze diesen Ausdruck $= u$; alsdann muß u ein Minimum werden. Die Auflösung der Gleichung

$$\sqrt{(3a^2 + 3x^2)} - x = u$$

giebt aber

$$x = \tfrac{1}{2}u \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(3u^2 - 6a^2)},$$

Da nun x nicht imaginär werden darf, so ist der kleinste Werth, den man für u annehmen kann, der, für welchen $3u^2 - 6a^2 = 0$, oder $u = a\sqrt{2}$. Diese Annahme giebt aber $x = \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; demnach ist für das Minimum $x = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Man hat also für den Körper, welchem die kleinste Oberfläche zukommt, wenn die Seite seiner regulären Grundfläche $= 2a$, und die längere Seitenlinie desselben oder $BP = l$ gesetzt wird, die folgenden Abmessungen:

$$AK = a$$
$$BF = 2a\sqrt{3}$$
$$AX = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}; \text{ also}$$
$$XQ = AQ - AX = l - \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}$$
$$KX = \sqrt{(AK^2 + AX^2)} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{6}$$

$BX = \sqrt{(AB^2 + AX^2)} = \frac{3}{2} a \sqrt{2}$

Cos. $BXA = AX : BX = \frac{1}{3}$

also $BXA = 70^\circ 31' 44''$, $BXQ = 109^\circ 28' 16''$

Cos. $BXK = KX : BX = \frac{1}{3} \sqrt{3}$

also $BXK = 54^\circ 44' 8''$, $BXF = 2 BXK = 109^\circ 28' 16''$

$\triangle ABX = \frac{1}{2} AB . AX = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{2}$

also Trap. $BXQP$ = Prlgr. $ABPQ - \triangle ABX = 2al - \frac{1}{2} a^2 \sqrt{2}$

$\triangle BXF = \frac{1}{2} BF . KX = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{2}$

also Rhomb. $BX'FX = 3 a^2 \sqrt{2}$.

Die ebenen Winkel BXF, BXQ, FXQ, welche die Ecke bey X bilden, sind also alle einander gleich, (nämlich jeder $= 109^\circ 28' 16''$) folglich sind auch die Neigungswinkel ihrer Ebenen einander gleich, und zwar ist jeder $= 120^\circ$ (weil nämlich der Neigungswinkel BAF der Ebenen BXQP, FXQR, $= 120^\circ$ ist).

Die Spitze X' des Daches wird von den nämlichen Winkeln gebildet als die Ecke X; also sind auch die Neigungswinkel ihrer Ebenen alle einander gleich und jeder $= 120^\circ$.

Die Rhomben des Daches sind daher sowohl gegen einander als gegen die Seitenflächen des Körpers unter einem Winkel von 120° geneigt.

Die Grundfläche des Körpers ist $= 6a^2 \sqrt{3}$; also der Inhalt desselben $= 6a^2 l \sqrt{3}$.

Die Oberfläche des Körpers bestehet aus sechs Trapezen wie BXQP, aus drey Rhomben wie BX'FX und aus der sechsseitigen Grundfläche. Sie ist demnach ohne die Grundfläche $= 12al + 6a^2 \sqrt{2}$, mit der Grundfläche $= 12al + 6a^2 (\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Die Oberfläche eines geraden Prismas von der Höhe l auf dieser Grundfläche ist ohne dieselbe $= 12al + 6a^2 \sqrt{3}$. Es verhält sich also die Oberfläche des Körpers zur Oberfläche

des Prismas (die Grundfläche nicht mitgerechnet,) wie $(2l + a\sqrt{2}) : (2l + a\sqrt{3})$.

Die Verringerung der Oberfläche, welche entstehet, wenn anstatt der oberen Fläche des Prismas das pyramidalische Dach gesetzt wird, ist $= 6a^2 (\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Anmerk. Unter den regulären Vielecken giebt es nicht mehr als drey, deren Polygonwinkel aliquote Theile von vier Rechten sind, oder mit andern Worten, deren Winkel so groß sind, daß sich eine gewisse Anzahl derselben genau um einen Punkt herum legen läßt; und diese sind das Dreyeck, das Quadrat und das Sechseck. Der Winkel eines necks ist nämlich $= \frac{2n-4}{n} R$; also muß $m \cdot \frac{2n-4}{n} R = 4R$, und m eine ganze Zahl seyn. Diese Gleichung giebt aber $m = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$; es muß demnach $\frac{4}{n-2}$ eine ganze Zahl seyn. Es kann aber $\frac{4}{n-2}$ nur dann eine ganze Zahl seyn, wenn $n = 3$, oder $n = 4$, oder $n = 6$.

Bezeichnet s die Seite, p den Umfang und q den Inhalt eines regulären Vielecks, so ist $p = ns$, $q = \frac{1}{4} ns^2 \text{Cot.} \frac{180^\circ}{n}$. Substituirt man den Werth von s aus der zweyten Gleichung in der ersten, so erhält man $p = 2\sqrt{q} \cdot \sqrt{n \text{ Tang.} \frac{180^\circ}{n}}$. Diese Formel giebt das Verhältniß zwischen dem Umfange und dem Inhalte eines jeden regulären Vieleckes. Man setze nun nach einander $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$; so erhält man $p = 2\sqrt{q} \cdot \sqrt{(3\sqrt{3})}$, $p = 2\sqrt{q} \cdot 2$, $p = 2\sqrt{q} \cdot \sqrt{(2\sqrt{3})}$. Es verhalten sich demnach bey gleichem Inhalte die Peripherien des Dreyecks, Vierecks und Sechseckes wie die Zahlen

$\sqrt{(3\sqrt{3})}$, 2, $\sqrt{(2\sqrt{3})}$. Da nun die letzte von diesen drey Zahlen die kleinste ist, so folgt, daß das Sechseck bey gleichem Inhalte einen kleineren Umfang hat, als das Dreyeck und Viereck.

Da die Bienenzellen gerade die sechsseitige Form haben, so wurde schon Pappus dadurch zu der Bemerkung veranlaßt, daß die Bienen unter allen den verschiedenen Formen, welche um einen Punkt herum den Raum ausfüllen, deshalb die sechsseitige gewählt hätten, weil sie merkten, daß diese Form mehr Raum gebe als die dreyseitige oder vierseitige.

Die Bienenzellen sind aber nicht bloß sechsseitig prismatisch geformt, sondern sie haben auch ein von Rhomben begränztes Dach, gerade wie die vorhin untersuchten Körper; und die Rhomben sind sowohl gegen einander als gegen die Seitenflächen des prismatischen Theiles der Zelle unter einem Winkel von 120° geneigt. Sie haben also gerade die Größe, welche sie haben müssen, wenn bey dem nämlichen innern Raume die Quantität des zur Construktion nöthigen Wachses am geringsten seyn soll. Mag auch die Ersparung an Wachs nicht Hauptzweck, nur Nebenzweck seyn; mag selbst, wie L'Huilier sehr richtig bemerkt, es noch andere Formen geben, wobey diese Ersparung noch weiter getrieben werden könnte: so bleibt doch immer dieser Bau bewundernswürdig genug, um einige Aufmerksamkeit zu verdienen. (Ueber die Geschichte dieses Gegenstandes, s. m. Klügels mathem. Wörterb. Th. II. S. 693 u. f.)

XV. Gleichungen für die gerade Linie, die Ebene, den Kreis und die Kugel; Gebrauch derselben bey der Auflösung geometrischer Aufgaben.

§ 231.

Wenn in irgend einer Ebene, die E heißen mag, eine gerade unbegränzte Linie AB (Fig. 110), und auf ihr ein Punkt A angenommen oder gegeben wird; so ist jeder andere Punkt M der Ebene E völlig bestimmt, wenn das positive oder negative Perpendikel Mm, welches von diesem Punkte auf die Linie AB herabgelassen wird, und zugleich die Entfernung Am des Punktes m von A gegeben ist. Diese Art, die Lage eines Punktes anzugeben, wurde schon Th. I. d. Samml. § 84 u. f. angewandt. Hier soll ein anderer Gebrauch davon gemacht werden.

Es schneide irgend eine gerade unbegränzte Linie PQ die Abscissenlinie AB unter dem Winkel QCB $= \alpha$; die Entfernung des Durchschnittspunktes C vom Punkte A sey $= d$. Es sey ferner M irgend ein Punkt auf der Linie PQ; die diesem Punkte zugehörige Abscisse Am $= x$, und seine Ordinate Mm $= y$. Alsdann ist Mm $=$ Cm . Tang. $\alpha =$ (Am $+$ AC) Tang. α, oder $y = (x + d)$ Tang. α. Setzt man Tang. $\alpha = a$, d Tang. $\alpha = b$; so erhält man

$$y = ax + b.$$

Diese Gleichung, durch welche die Beziehung zwischen den Coordinaten Am, Mm, eines jeden Punktes M auf der Linie PQ ausgedruckt wird, kann keinem anderen Punkte der

Ebene

Ebene E außerhalb dieser Linie zukommen; sie wird aus diesem Grunde die Gleichung der Linie PQ genannt.

Kennet man den Neigungswinkel einer geraden Linie gegen die Abscissenlinie, wie auch die Entfernung des Durchschnittspunktes vom Anfangspunkte der Abscissen; so läßt sich jedesmal die Gleichung für diese Linie finden.

Ist umgekehrt die Gleichung einer geraden Linie $y = ax + b$ gegeben; so läßt sich α und d aus den beyden Gleichungen

$$\text{Tang. } \alpha = a; \; d = \frac{b}{\text{Tang. } \alpha} = \frac{b}{a}$$

bestimmen.

Man kann auch, wenn man will, der Gleichung $y = ax + b$ die Form $Ax + By + C = 0$ geben. Die zweyte wird nämlich aus der ersten erhalten, wenn man diese mit B multiplicirt, alles auf eine Seite des Gleichheitszeichen bringt, und hierauf $-aB = A$, $-bB = C$ setzt; und in diesem Falle ist $\text{Tang. } \alpha = a = -\frac{A}{B}$, $d = \frac{b}{a} = \frac{C}{A}$. Man siehet hieraus, daß die Lage der geraden Linie, welche durch die Gleichung $Ax + By + C = 0$ gegeben ist, nicht sowohl von den wirklichen Zahlenwerthen der Größen A, B, C, als vielmehr von ihren Verhältnissen zu einander abhängt. Dies erhellet auch schon daraus, weil der Faktor B, womit die Gleichung $y = ax + b$ multiplicirt wird, willkührlich angenommen werden kann. Ich werde jedoch im Anfange, der Deutlichkeit wegen, die Gleichung $y = ax + b$ beybehalten.

§ 232.

Aufg. Die Gleichungen für zwey sich schneidende gerade Linien sind gegeben: man soll die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes finden.

Aufl. Es seyen

$$y = ax + b,\ y = a'x + b'$$

die Gleichungen der beyden geraden Linien, deren Durchschnittspunkt gesucht wird.

Da der Durchschnittspunkt den beyden Linien gemeinschaftlich ist; so müssen sich für x, y, solche Werthe finden lassen, welche den beyden Gleichungen zu gleicher Zeit ein Genüge thun. Bezeichnet man daher die Coordinaten des gesuchten Punktes durch x', y'; so muß für diesen Punkt $x = x'$, und $y = y'$ seyn. Man erhält also aus den obigen Gleichungen die folgenden:

$$y' = ax' + b,\ y' = a'x' + b'$$

und diese geben, mit einander verbunden,

$$x' = -\frac{b' - b}{a' - a},\ y' = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

§ 233.

Aufg. Eine Linie PQ (Fig. 110) soll durch zwey, vermittelst ihrer Coordinaten gegebenen Punkte M', M'', gehen: man soll die Gleichung dieser Linie, den Winkel, unter welchem sie die Abscissenlinie schneidet, wie auch die Länge des, zwischen den Punkten M' M'', liegenden Stückes M'M'' finden.

Aufl. Es seyen x', y', die gegebenen Coordinaten des Punktes M' und x'', y'', die ebenfalls gegebenen Coordinaten des Punktes M''. Es sey ferner $y = ax + b$ die gesuchte Gleichung der Linie PQ, in welcher die Größen a, b, für jetzt unbekannt sind.

1) Da die Punkte M', M'', in der Linie PQ liegen; so muß die angenommene Gleichung für beyde Punkte statt finden können; d. h. sie muß wahr werden, wenn man sowohl

x', y', als x'', y'', für x, y substituirt. Diese Substitutionen geben aber,

$$y' = ax' + b,\quad y'' = ax'' + b.$$

Man hat also zwey Gleichungen zwischen den unbekannten Größen a, b, und den bekannten x', y', x'', y''; es lassen sich also die ersteren aus den letzteren bestimmen. Durch die Auflösung dieser Gleichungen erhält man,

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'},\quad b = \frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}.$$

Die gesuchte Gleichung ist demnach

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\,x + \frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}.$$

2) Es sey α der Winkel, unter welchem die Linie PQ die Abscissenlinie schneidet; alsdann ist (§ 231.) Tang. $\alpha = a$. Nach 1 ist aber $a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$; man hat also,

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Dieses hätte man auch unmittelbar aus der Figur selbst finden können; denn ziehet man die Linie $M'p$ der AB parallel, so sind die Winkel $M''M'p$, QCB, einander gleich; man hat also

$$\text{Tang. } \alpha = \text{Tang. } M''M'p = \frac{M''p}{M'p} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

3) Da $M'M'' = \sqrt{[(M'p)^2 + (M''p)^2]}$, und $M'p = x'' - x'$, $M''p = y'' - y'$; so ist,

$$M'M'' = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2]}.$$

§ 234.

Aufg. Die Gleichungen für zwey gerade Linien sind

gegeben: man soll den Winkel finden, unter welchen sie sich schneiden.

Aufl. Es seyen $y = ax + b$, $y' = a'x + b'$, die gegebenen Gleichungen der Linien PQ, P'Q' (Fig. 111); die Winkel QXB, Q'X'B, unter welchen sie die Abscissenlinie schneiden, bezeichne man durch α, α', und den Winkel PMP', unter welchen sich die Linien selbst schneiden, durch φ.

Dies vorausgesetzt, hat man nach § 231, Tang. $\alpha = a$; Tang. $\alpha' = a'$. Es ist aber $\varphi = \alpha' - \alpha$; man hat also,

$$\text{Tang.}\ \varphi = \frac{\text{Tang.}\ \alpha' - \text{Tang.}\ \alpha}{1 + \text{Tang.}\ \alpha'\ \text{Tang.}\ \alpha} = \frac{a' - a}{1 + a'a}.$$

Erst. Zus. Sollen sich demnach die beyden Linien unter rechten Winkeln schneiden; so muß $\varphi = 90°$ seyn. In diesem Falle ist aber Tang. $\varphi = \infty$; es muß demnach der Nenner des für Tang. φ gefundenen Ausdruckes $= 0$ seyn. Man hat also $1 + a'a = 0$; woraus man $a' = -\frac{1}{a}$ erhält. Hieraus folgt, daß wenn die Linien P'Q', PQ auf einander perpendikulär stehen sollen, ihre Gleichungen nothwendig die folgende Form haben müssen:

$$y = ax + b,\ y = -\frac{1}{a}x + b'.$$

Zweyt. Zus. Sollen aber die beyden Linien einander parallel seyn; so muß φ, folglich auch Tang. $\varphi = 0$ seyn. Man hat also $\frac{a' - a}{1 + a'a} = 0$; woraus man $a' = a$ erhält. Die Gleichungen für parallele Linien müssen demnach die folgende Form haben,

$$y = ax + b,\ y' = ax + b'.$$

Man hätte dieses Resultat auch unmittelbar daraus herleiten

können, daß für parallele Linien die Winkel, unter welchen sie die Abscissenlinie schneiden, einander gleich sind, und daher Tang. $\alpha' =$ Tang. α, oder $a' = a$.

§ 235.

Aufg. Die Gleichung einer geraden Linie ist gegeben: man soll die Gleichung einer anderen finden, welche jene unter einem gegebenen Winkel schneidet, und durch einen gegebenen Punkt gehet.

Aufl. Die Coordinaten des gegebenen Punktes seyen x', y'; die Tangente des gegebenen Winkels sey $= t$; die Gleichung der gegebenen Linie $y = ax + b$; die Gleichung der gesuchten Linie $y = a'x + b'$. Es müssen nun a' und b' aus den gegebenen Bedingungen bestimmt werden.

1) Nach der Aufl. des vor. §'s ist $t = \frac{a' - a}{1 + a'a}$. Hieraus erhält man,

$$a' = \frac{t + a}{1 - at}.$$

2) Da die gesuchte Linie durch den Punkt gehen soll, dessen Coordinaten x', y', sind; so hat man $y' = a'x' + b'$; woraus man $b' = y' - a'x'$ erhält. Wird dieser Werth in der Gleichung $y = a'x + b'$ substituirt; so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$y = a'x + y' - a'x',$$

oder

$$y - y' = a'(x - x').$$

3) Wird hierin für a' sein Werth aus 1 substituirt; so erhält man

$$y - y' = \frac{t + a}{1 - at}(x - x');$$

und dies ist die Gleichung für die gesuchte Linie.

die Coordinaten des Punktes p angesehen werden, und eben so, die Linien Am'' (= y), m''p'' (= z), als die Coordinaten des Punktes p'', und Am' (= z), m'p' (= x) als die Coordinaten des Punktes p'. Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, kann man auch sagen, der Punkt M werde bestimmt, durch seinen Abstand von irgend einer der drey Ebenen, und durch die Coordinaten seiner Projektion auf diese Ebene.

Liegt der Punkt M in der Ebene BAC, so ist z = o; liegt er in der Ebene BAD, so ist y = o: liegt er in der Ebene CAD, so ist x = o. Für einen Punkt auf der Axe AB ist sowohl y als z = o; für einen Punkt auf der Axe AC ist x und z = o; für einen Punkt auf der Axe AD ist x und y = o.

§ 238.

Aufg. Die Gleichung einer Ebene zu finden.

Aufl. Es seyen wieder, wie in Fig. 112, ABC, BAD, CAD (Fig. 113), die koordinirten Ebenen; AB, AC, AD, die koordinirten Axen; und es werde zuerst die Gleichung einer Ebene HAK gesucht, von welcher angenommen wird, daß sie durch den Punkt A gehe. Es seyen AH, AK, die Schnitte dieser Ebene mit den Ebenen DAC, BAD.

1) Es sey M ein Punkt der Ebene HAK; Am, mp, pM, die Coordinaten dieses Punktes; also Am = x, mp = y, pM = z. Man ziehe pm'' der AB, und m''h, mk, der pM parallel, sie schneiden die Linien AH, AK, in h, k; mache hierauf pl = mk, und ziehe m''l, kl. Wird ferner Mh gezogen, so sind die Linien Mh, AK, als Schnitte zweyer parallelen Ebenen Mhm''l, KAB, durch eine dritte HAK, einander parallel.

2) Da pl der mk gleich und parallel ist; so sind die Linien mp, kl, mithin auch Am'' gleich und parallel; also ist

auch $m''l$ der Ak, und daher auch der Mh parallel; folglich ist $Mhm''l$ ein Parallelogramm, und daher $Ml = hm''$.

3) Die Winkel HAC, KAB, bleiben für alle Punkte der Ebene HAK dieselben; man kann sie daher als gegeben ansehen, also auch ihre Tangenten. Man setze Tang. $KAB = a$, Tang. $HAC = b$; alsdann ist in dem bey m rechtwinkeligen Dreyecke Amk, $mk = Am$. Tang. $KAB = ax$, und in dem bey m'' rechtwinkeligen Dreyecke hAm'', $hm'' = Am''$ Tang. $HAC = mp$. Tang. $HAC = by$.

4) Hieraus erhält man nun $Mp = Ml + lp = hm'' + mk = ax + by$. Es ist aber $Mp = z$; also $z = ax + by$; und dies ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt A gehet.

5) Gehet die Ebene, deren Gleichung gesucht wird, nicht durch den Punkt A, wie etwa die Ebene PQR; so kann man sich doch immer durch A eine Ebene der vorigen parallel gelegt denken, und für diese gilt die Gleichung $z = ax + by$. Nun ist aber jedes z für die Ebene PQR um das Stück AQ größer als für die Ebene HAK; setzt man demnach $AQ = c$; so ist die Gleichung für jede Ebene,

$$z = ax + by + c.$$

Erst. Zus. Um dieser Gleichung eine regelmäßigere Gestalt zu geben, multiplicire man sie mit irgend einer Größe C, und setze hierauf $-aC = A$, $-bC = B$, $-cC = D$; hierdurch verwandelt sie sich in die folgende:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Zweyt. Zus. Aus der Art, wie die Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ gefunden worden, erhellet zugleich, daß für jede Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten A gehet, c und folglich auch $D = 0$ ist, daß ferner,

wenn $Ax + By + Cz + D = o$, $A'x + B'y + C'z + D' = o$, die Gleichungen für zwey parallele Ebenen seyn sollen, $A' = A$, $B' = B$, und $C' = C$ seyn muß.

Dritt. Zus. Will man die Gleichungen für die Schnitte dieser Ebene mit den koordinirten Ebenen haben, so darf man nur nach und nach $x = o$, $y = o$, $z = o$ setzen. Man erhält alsdann für den Schnitt der Ebene mit der Ebene der y und z die Gleichung $By + Cz + D = o$; für den Schnitt mit der Ebene der x und z, die Gleichung $Ax + Cz + D = o$, und für den Schnitt mit der Ebene der x und y, die Gleichung $Ax + By + D = o$.

Viert. Zus. Man kann sich die Ebenen BAC, BAD, CAD, (Fig. 112) nach allen Seiten ohne Ende erweitert denken; es entstehen alsdann um den Punkt A herum acht körperliche Winkel, welche den Raum in eben so viele Gegenden abtheilen, in denen die x, y, z, genommen werden können. Sind nämlich in dem körperlichen Winkel, welcher von den ebenen Winkeln BAC, BAD, CAD eingeschlossen wird, die x, y, z, positiv, so sind in den übrigen sieben eine oder zwey von ihnen, oder auch alle drey negativ. Es liegt nämlich

$+x$, $+y$, $-z$, im Winkel BAC, CAd, BAd,
$+x$, $-y$, $+z$, im Winkel BAc, cAd, DAB,
$-x$, $+y$, $+z$, im Winkel bAC, CAD, bAD,
$+x$, $-y$, $-z$, im Winkel BAc, cAd, BAd,
$-x$, $-y$, $+z$, im Winkel bAc, cAD, bAD,
$-x$, $+y$, $-z$, im Winkel bAC, CAd, bAd,
$-x$, $-y$, $-z$, im Winkel bAc, cAd, bAd.

§ 239.

Aufg. Es sind die Gleichungen zweyer Ebenen ge-

geben: man soll die Gleichungen für die Projektionen ihres Schnittes auf die drey coordinirten Ebenen finden.

Aufl. Es seyen

$$Ax + By + Cz + D = o, \quad A'x + B'y + C'z + D' = o,$$

die Gleichungen der beyden gegebenen Ebenen, deren Schnitt gesucht wird.

1) Alle Punkte des Schnittes sind beyden Ebenen gemeinschaftlich. Es müssen daher die Coordinaten des Schnittes ein solches Verhältniß gegen einander haben, daß dadurch den beyden gegebenen Gleichungen zu gleicher Zeit ein Genüge geschiehet. Es können daher nicht, wie bey einer Ebene, zwey der Größen x, y, z, willkührlich angenommen werden, um daraus die dritte zu erhalten; denn sobald eine derselben bestimmt ist, so sind es vermöge dieser Gleichungen auch die beyden anderen. Jede zwey von den dreyen Coordinaten des Schnittes haben demnach eine bestimmte Relation, wofür sich eine Gleichung finden lassen muß; und diese Gleichung kann keine andere, als die ihrer Projektion auf die Ebene dieser zwey Coordinaten seyn.

2) Wenn man aus den beyden gegebenen Gleichungen nach und nach z, y, x eliminirt, so erhält man die folgenden:

$$(A'C - AC')\,x + (B'C - BC')\,y + CD' - C'D = o,$$
$$(BC' - B'C)\,z + (A'B - AB')\,x + BD' - B'D = o,$$
$$(AB' - A'B)\,y + (AC' - A'C)\,z + AD' - A'D = o.$$

oder, wenn man zur Abkürzung $A'C - AC' = \alpha$, $BC' - B'C = \beta$, $AB' - A'B = \gamma$, $CD' - C'D = \delta$, $BD' - B'D = \varepsilon$, $AD' - A'D = \zeta$ setzt,

$$\alpha x - \beta y + \delta = o,$$
$$\beta z - \gamma x + \varepsilon = o,$$
$$\gamma y - \alpha z + \zeta = o;$$

Aufl. Es seyen

$$y = ax + b,\ y = a'x + b'$$

die Gleichungen der beyden geraden Linien, deren Durchschnittspunkt gesucht wird.

Da der Durchschnittspunkt den beyden Linien gemeinschaftlich ist; so müssen sich für x, y, solche Werthe finden lassen, welche den beyden Gleichungen zu gleicher Zeit ein Genüge thun. Bezeichnet man daher die Coordinaten des gesuchten Punktes durch x', y'; so muß für diesen Punkt $x = x'$, und $y = y'$ seyn. Man erhält also aus den obigen Gleichungen die folgenden:

$$y' = ax' + b,\ y' = a'x' + b'$$

und diese geben, mit einander verbunden,

$$x' = -\frac{b' - b}{a' - a},\ y' = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

§ 233.

Aufg. Eine Linie PQ (Fig. 110) soll durch zwey, vermittelst ihrer Coordinaten gegebenen Punkte M', M'', gehen: man soll die Gleichung dieser Linie, den Winkel, unter welchem sie die Abscissenlinie schneidet, wie auch die Länge des, zwischen den Punkten M' M'', liegenden Stückes $M'M''$ finden.

Aufl. Es seyen x', y', die gegebenen Coordinaten des Punktes M' und x'', y'', die ebenfalls gegebenen Coordinaten des Punktes M''. Es sey ferner $y = ax + b$ die gesuchte Gleichung der Linie PQ, in welcher die Größen a, b, für jetzt unbekannt sind.

1) Da die Punkte M', M'', in der Linie PQ liegen; so muß die angenommene Gleichung für beyde Punkte statt finden können; d. h. sie muß wahr werden, wenn man sowohl

x', y', als x'', y'', für x, y substituirt. Diese Substitutionen geben aber,

$$y' = ax' + b,\ y'' = ax'' + b.$$

Man hat also zwey Gleichungen zwischen den unbekannten Größen a, b, und den bekannten x', y', x'', y''; es lassen sich also die ersteren aus den letzteren bestimmen. Durch die Auflösung dieser Gleichungen erhält man,

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'},\quad b = \frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}.$$

Die gesuchte Gleichung ist demnach

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\,x + \frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}.$$

2) Es sey α der Winkel, unter welchem die Linie PQ die Abscissenlinie schneidet; alsdann ist (§ 231.) Tang. $\alpha = a$. Nach 1 ist aber $a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$; man hat also,

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Dieses hätte man auch unmittelbar aus der Figur selbst finden können; denn ziehet man die Linie $M'p$ der AB parallel, so sind die Winkel $M''M'p$, QCB, einander gleich; man hat also

$$\text{Tang. } \alpha = \text{Tang. } M''M'p = \frac{M''p}{M'p} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

3) Da $M'M'' = \sqrt{[(M'p)^2 + (M''p)^2]}$, und $M'p = x'' - x'$, $M''p = y'' - y'$; so ist,

$$M'M'' = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2]}.$$

§ 234.

Aufg. Die Gleichungen für zwey gerade Linien sind

gegeben: man soll den Winkel finden, unter welchen sie sich schneiden.

Aufl. Es seyen $y = ax + b$, $y' = a'x + b'$, die gegebenen Gleichungen der Linien PQ, P'Q' (Fig. 111); die Winkel QXB, Q'X'B, unter welchen sie die Abscissenlinie schneiden, bezeichne man durch α, α', und den Winkel PMP', unter welchen sich die Linien selbst schneiden, durch φ.

Dies vorausgesetzt, hat man nach § 231, Tang. $\alpha = a$; Tang. $\alpha' = a'$. Es ist aber $\varphi = \alpha' - \alpha$; man hat also,

$$\text{Tang. } \varphi = \frac{\text{Tang. } \alpha' - \text{Tang. } \alpha}{1 + \text{Tang. } \alpha' \text{ Tang. } \alpha} = \frac{a' - a}{1 + a'a}.$$

Erst. Zus. Sollen sich demnach die beyden Linien unter rechten Winkeln schneiden; so muß $\varphi = 90^\circ$ seyn. In diesem Falle ist aber Tang. $\varphi = \infty$; es muß demnach der Nenner des für Tang. φ gefundenen Ausdruckes $= 0$ seyn. Man hat also $1 + a'a = 0$; woraus man $a' = -\frac{1}{a}$ erhält. Hieraus folgt, daß wenn die Linien P'Q', PQ auf einander perpendikulär stehen sollen, ihre Gleichungen nothwendig die folgende Form haben müssen:

$$y = ax + b, \; y = -\frac{1}{a} x + b'.$$

Zweyt. Zus. Sollen aber die beyden Linien einander parallel seyn; so muß φ, folglich auch Tang. $\varphi = 0$ seyn. Man hat also $\frac{a' - a}{1 + a'a} = 0$; woraus man $a' = a$ erhält. Die Gleichungen für parallele Linien müssen demnach die folgende Form haben,

$$y = ax + b, \; y' = ax + b'.$$

Man hätte dieses Resultat auch unmittelbar daraus herleiten

können, daß für parallele Linien die Winkel, unter welchen sie die Abscissenlinie schneiden, einander gleich sind, und daher Tang. α' = Tang. α, oder $a' = a$.

§ 235.

Aufg. Die Gleichung einer geraden Linie ist gegeben: man soll die Gleichung einer anderen finden, welche jene unter einem gegebenen Winkel schneidet, und durch einen gegebenen Punkt gehet.

Aufl. Die Coordinaten des gegebenen Punktes seyen x', y'; die Tangente des gegebenen Winkels sey $= t$; die Gleichung der gegebenen Linie $y = ax + b$; die Gleichung der gesuchten Linie $y = a'x + b'$. Es müssen nun a' und b' aus den gegebenen Bedingungen bestimmt werden.

1) Nach der Aufl. des vor. §'s ist $t = \frac{a' - a}{1 + a'a}$. Hieraus erhält man,

$$a' = \frac{t + a}{1 - at}.$$

2) Da die gesuchte Linie durch den Punkt gehen soll, dessen Coordinaten x', y', sind; so hat man $y' = a'x' + b'$; woraus man $b' = y' - a'x'$ erhält. Wird dieser Werth in der Gleichung $y = a'x + b'$ substituirt; so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$y = a'x + y' - a'x',$$

oder

$$y - y' = a'(x - x').$$

3) Wird hierin für a' sein Werth aus 1 substituirt; so erhält man

$$y - y' = \frac{t + a}{1 - at}(x - x');$$

und dies ist die Gleichung für die gesuchte Linie.

§ 236.

Aufg. Die Gleichung für eine gerade Linie ist gegeben; auch sind die Coordinaten eines Punktes gegeben; man soll die Gleichung für das Perpendikel finden, welches aus diesem Punkte auf jene Linie herabgelassen wird, wie auch die Länge dieses Perpendikels.

Aufl. 1) Um die Gleichung des Perpendikels zu finden, darf man nur in der Gleichung in 3 des vorigen §'s $t = \text{Tang.}\, 90^\circ = \infty$ setzen; hierdurch verwandelt sie sich in

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

2) Es seyen nun x'', y'', die unbekannten Coordinaten des Durchschnittspunktes; alsdann hat man für diesen Punkt die beyden Gleichungen,

$$y'' - y' = -\frac{1}{a}(x'' - x')$$

$$y'' = ax'' + b;$$

und diese geben,

$$x'' = \frac{ay' + x' - ab}{1 + a^2},\ y'' = \frac{a^2y' + ax' + b}{1 + a^2};$$

also,

$$x'' - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2},\ y'' - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}.$$

3) Nach § 233. 3 ist, wenn l die Länge der, zwischen dem gegebenen und dem Durchschnittspunkte enthaltenen Linie, das heißt, die Länge des gesuchten Perpendikels bezeichnet, $l = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2]}$. Werden hierin die Werthe von $x'' - x'$, $y'' - y'$ aus 2 substituirt; so erhält man,

$$l = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{(1 + a^2)}}.$$

§ 237.

So wie die geraden Linien, so lassen sich auch die Ebenen und ihre Schnitte durch Gleichungen angeben, und zwar auf die folgende Art.

Es wurde schon in § 2 gezeigt, daß die Lage eines Punktes im Raume durch seine bekannten Entfernungen von drey der Lage nach gegebenen Ebenen bestimmt wird. Da es nun gleichgültig ist, welche Lage diese Ebenen haben mögen, so kann man sie, der leichteren Behandlung wegen, auf einander perpendikulär annehmen. Es seyen daher BAC, BAD, CAD (Fig. 112) drey auf einander perpendikuläre Ebenen; AB, AC, AD, ihre Schnitte. Man nehme nun irgend einen Punkt M an, und projicire ihn in p, p′, p″, auf die drey erwähnten Ebenen; so sind Mp, Mp′, Mp″, die Abstände dieses Punktes von den respektiven Ebenen BAC, BAD, CAD. Kennet man daher diese Abstände, so kennet man auch die Lage des Punktes. Werden die Linien p′m, p″m″, der Mp, die Linien pm, p″m′, der Mp′, und die Linien pm″, p′m′, der Mp″ parallel gezogen; so ist $Mp'' = p'm' = Am$, und $Mp' = mp$. Der Punkt M ist demnach auch gegeben, wenn die drey Linien Am, mp, pM, gegeben sind.

Die Linien Am, mp, pM, heißen die Coordinaten des Punktes M; sie sollen, so lange sie auf keinen bestimmten Punkt bezogen werden, durch x, y, z, bezeichnet werden; nämlich $Am = x$, $mp = y$, $pM = z$. Die Ebenen BAC, BAD, CAD, heißen die koordinirten Ebenen, und die Linien AB, AC, AD, die koordinirten Axen; die ersteren sollen in der Ordnung, wie sie hier genannt worden, die Ebenen der x, y, der x, z, und der y, z, die letzteren die Axen der x, der y und der z heißen.

Die Linien Am ($= x$), mp ($= y$), können auch als

die Coordinaten des Punktes p angesehen werden, und eben so, die Linien Am'' ($= y$), $m''p''$ ($= z$), als die Coordinaten des Punktes p'', und Am' ($= z$), $m'p'$ ($= x$) als die Coordinaten des Punktes p'. Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, kann man auch sagen, der Punkt M werde bestimmt, durch seinen Abstand von irgend einer der drey Ebenen, und durch die Coordinaten seiner Projektion auf diese Ebene.

Liegt der Punkt M in der Ebene BAC, so ist $z = 0$; liegt er in der Ebene BAD, so ist $y = 0$: liegt er in der Ebene CAD, so ist $x = 0$. Für einen Punkt auf der Axe AB ist sowohl y als $z = 0$; für einen Punkt auf der Axe AC ist x und $z = 0$; für einen Punkt auf der Axe AD ist x und $y = 0$.

§ 238.

Aufg. Die Gleichung einer Ebene zu finden.

Aufl. Es seyen wieder, wie in Fig. 112, ABC, BAD, CAD (Fig. 113), die koordinirten Ebenen; AB, AC, AD, die koordinirten Axen; und es werde zuerst die Gleichung einer Ebene HAK gesucht, von welcher angenommen wird, daß sie durch den Punkt A gehe. Es seyen AH, AK, die Schnitte dieser Ebene mit den Ebenen DAC, BAD.

1) Es sey M ein Punkt der Ebene HAK; Am, mp, pM, die Coordinaten dieses Punktes; also $Am = x$, $mp = y$, $pM = z$. Man ziehe pm'' der AB, und $m''h$, mk, der pM parallel, sie schneiden die Linien AH, AK, in h, k; mache hierauf $pl = mk$, und ziehe $m''l$, kl. Wird ferner Mh gezogen, so sind die Linien Mh, AK, als Schnitte zweyer parallelen Ebenen $Mhm''l$, KAB, durch eine dritte HAK, einander parallel.

2) Da pl der mk gleich und parallel ist; so sind die Linien mp, kl, mithin auch Am'' gleich und parallel; also ist

auch $m''l$ der Ak, und daher auch der Mh parallel; folglich ist $Mhm''l$ ein Parallelogramm, und daher $Ml = hm''$.

3) Die Winkel HAC, KAB, bleiben für alle Punkte der Ebene HAK dieselben; man kann sie daher als gegeben ansehen, also auch ihre Tangenten. Man setze $\text{Tang. } KAB = a$, $\text{Tang. } HAC = b$; alsdann ist in dem bey m rechtwinkeligen Dreyecke Amk, $mk = Am \,.\, \text{Tang. } KAB = ax$, und in dem bey m'' rechtwinkeligen Dreyecke hAm'', $hm'' = Am'' \,\text{Tang. } HAC = mp \,.\, \text{Tang. } HAC = by$.

4) Hieraus erhält man nun $Mp = Ml + lp = hm'' + mk = ax + by$. Es ist aber $Mp = z$; also $z = ax + by$; und dies ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt A gehet.

5) Gehet die Ebene, deren Gleichung gesucht wird, nicht durch den Punkt A, wie etwa die Ebene PQR; so kann man sich doch immer durch A eine Ebene der vorigen parallel gelegt denken, und für diese gilt die Gleichung $z = ax + by$. Nun ist aber jedes z für die Ebene PQR um das Stück AQ größer als für die Ebene HAK; setzt man demnach $AQ = c$; so ist die Gleichung für jede Ebene,

$$z = ax + by + c.$$

Erst. Zus. Um dieser Gleichung eine regelmäßigere Gestalt zu geben, multiplicire man sie mit irgend einer Größe C, und setze hierauf $-aC = A$, $-bC = B$, $-cC = D$; hierdurch verwandelt sie sich in die folgende:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Zweyt. Zus. Aus der Art, wie die Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ gefunden worden, erhellet zugleich, daß für jede Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten A gehet, c und folglich auch $D = 0$ ist, daß ferner,

wenn $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, die Gleichungen für zwey parallele Ebenen seyn sollen, $A' = A$, $B' = B$, und $C' = C$ seyn muß.

Dritt. Zus. Will man die Gleichungen für die Schnitte dieser Ebene mit den koordinirten Ebenen haben; so darf man nur nach und nach $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ setzen. Man erhält alsdann für den Schnitt der Ebene mit der Ebene der y und z die Gleichung $By + Cz + D = 0$; für den Schnitt mit der Ebene der x und z, die Gleichung $Ax + Cz + D = 0$, und für den Schnitt mit der Ebene der x und y, die Gleichung $Ax + By + D = 0$.

Viert. Zus. Man kann sich die Ebenen BAC, BAD, CAD, (Fig. 112) nach allen Seiten ohne Ende erweitert denken; es entstehen alsdann um den Punkt A herum acht körperliche Winkel, welche den Raum in eben so viele Gegenden abtheilen, in denen die x, y, z, genommen werden können. Sind nämlich in dem körperlichen Winkel, welcher von den ebenen Winkeln BAC, BAD, CAD eingeschlossen wird, die x, y, z, positiv; so sind in den übrigen sieben eine oder zwey von ihnen, oder auch alle drey negativ. Es liegt nämlich

$+x$, $+y$, $-z$, im Winkel BAC, CAd, BAd,
$+x$, $-y$, $+z$, im Winkel BAc, cAd, DAB,
$-x$, $+y$, $+z$, im Winkel bAC, CAD, bAD,
$+x$, $-y$, $-z$, im Winkel BAc, cAd, BAd,
$-x$, $-y$, $+z$, im Winkel bAc, cAD, bAD,
$-x$, $+y$, $-z$, im Winkel bAC, CAd, bAd,
$-x$, $-y$, $-z$, im Winkel bAc, cAd, bAd.

§ 239.

Aufg. Es sind die Gleichungen zweyer Ebenen ge-

geben: man soll die Gleichungen für die Projektionen ihres Schnittes auf die drey koordinirten Ebenen finden.

Aufl. Es seyen

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

die Gleichungen der beyden gegebenen Ebenen, deren Schnitt gesucht wird.

1) Alle Punkte des Schnittes sind beyden Ebenen gemeinschaftlich. Es müssen daher die Coordinaten des Schnittes ein solches Verhältniß gegen einander haben, daß dadurch den beyden gegebenen Gleichungen zu gleicher Zeit ein Genüge geschiehet. Es können daher nicht, wie bey einer Ebene, zwey der Größen x, y, z, willkührlich angenommen werden, um daraus die dritte zu erhalten; denn sobald eine derselben bestimmt ist, so sind es vermöge dieser Gleichungen auch die beyden anderen. Jede zwey von den dreyen Coordinaten des Schnittes haben demnach eine bestimmte Relation, wofür sich eine Gleichung finden lassen muß; und diese Gleichung kann keine andere, als die ihrer Projektion auf die Ebene dieser zwey Coordinaten seyn.

2) Wenn man aus den beyden gegebenen Gleichungen nach und nach z, y, x eliminirt, so erhält man die folgenden:

$$(A'C - AC')\,x + (B'C - BC')\,y + CD' - C'D = 0,$$
$$(BC' - B'C)\,z + (A'B - AB')\,x + BD' - B'D = 0,$$
$$(AB' - A'B)\,y + (AC' - A'C)\,z + AD' - A'D = 0.$$

oder, wenn man zur Abkürzung $A'C - AC' = \alpha$, $BC' - B'C = \beta$, $AB' - A'B = \gamma$, $CD' - C'D = \delta$, $BD' - B'D = \varepsilon$, $AD' - A'D = \zeta$ setzt,

$$\alpha x - \beta y + \delta = 0,$$
$$\beta z - \gamma x + \varepsilon = 0,$$
$$\gamma y - \alpha z + \zeta = 0;$$

und dies sind die Gleichungen für die respektiven Projektionen des Schnittes auf die drey koordinirten Ebenen.

Zus. Nach § 5 ist eine Linie gegeben, wenn die Projektionen derselben auf zwey Ebenen von bekannter Lage gegeben sind; es reichen demnach schon zwey Projektionen zur Bestimmung des Schnittes hin. Da wir nun hier Gleichungen für drey Projektionen gefunden haben; so müssen jede zwey derselben die dritte in sich schliessen, und diese muß sich daher aus jenen herleiten lassen. Um sich hiervon zu überzeugen, darf man nur eine der veränderlichen Größen, etwa x, eliminiren. Man erhält alsdann aus der ersten und zweyten Gleichung, $\alpha\beta z - \beta\gamma y + \alpha\varepsilon + \gamma\delta = 0$, und aus der dritten durch die Multiplikation mit $-\beta$, $\alpha\beta z - \beta\gamma y - \beta\zeta = 0$; diese beyden Gleichungen müssen demnach identisch seyn; es muß folglich $\alpha\varepsilon + \gamma\delta = -\beta\zeta$; oder $\alpha\varepsilon + \gamma\delta + \beta\zeta = 0$ seyn; und dies ist auch wirklich richtig, wie sich ergiebt, wenn für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, ihre Werthe gesetzt werden.

§ 240.

Aufg. Es sind drey Punkte vermittelst ihrer Coordinaten gegeben: man soll die Gleichung für die Ebene finden, welche durch sie gelegt werden kann.

Aufl. Es seyen $x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z'''$, die Coordinaten dieser Punkte. Es sey ferner $Ax + By + Cz + D = 0$, die gesuchte Gleichung der Ebene; A, B, C, D, sind angenommene Größen deren Verhältniß vermittelst der drey gegebenen Punkte bestimmt werden muß.

Da die drey gegebenen Punkte in dieser Ebene liegen sollen, so müssen die folgenden drey Gleichungen statt haben:

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0,$$
$$Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0.$$

Man dividire diese Gleichungen durch D, und betrachte $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, als die unbekannten Größen derselben. Durch die Auflösung erhält man alsdann

$$\frac{A}{D} = \frac{z'(y''-y''') - z''(y'-y''') + z'''(y'-y'')}{x'(y''z''' - y'''z'') - x''(y'z''' - y'''z') + x'''(y'z'' - y''z')}$$

$$\frac{B}{D} = \frac{x'(z''-z''') - x''(z'-z''') + x'''(z'-z'')}{x'(y''z''' - y'''z'') - x''(y'z''' - y'''z') + x'''(y'z'' - y''z')}$$

$$\frac{C}{D} = \frac{y'(x''-x''') - y''(x'-x''') + y'''(x'-x'')}{x'(y''z''' - y'''z'') - x''(y'z''' - y'''z') + x'''(y'z'' - y''z')}$$

Da es hier bloß auf die Verhältnisse der Größen A, B, C, D, und nicht auf ihre wirkliche Größe ankommt; so kann man zur Vermeidung der Brüche setzen,

$$A = z'(y'' - y''') - z''(y' - y''') + z'''(y' - y'')$$
$$B = x'(z'' - z''') - x''(z' - z''') + x'''(z' - z'')$$
$$C = y'(x'' - x''') - y''(x' - x''') + y'''(x' - x'')$$
$$D = x'(y''z''' - y'''z'') - x''(y'z''' - y'''z') + x'''(y'z'' - y''z').$$

Werden diese Werthe in der Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ substituirt, so erhält man die gesuchte Gleichung der Ebene.

§ 241.

Aufg. Die Gleichungen für die Projektionen zweyer Linien auf zwey der koordinirten Ebenen sind gegeben: man soll die Bedingungen angeben, unter welchen sich

diese Linien schneiden, und den Ort, wo sie sich schneiden, wenn diese Bedingungen statt finden.

Aufl. 1) Es seyen

$$x = az + b,\ x = a'z + b',$$

die Gleichungen für die Projektionen der zwey Linien auf die Ebene der x, z, und

$$y = cz + d,\ y = c'z + d',$$

die Gleichungen für die Projektionen auf die Ebene der y, z.

2) Giebt es nun einen Punkt, wo sich die Linien schneiden, und bezeichnet man die Coordinaten dieses Punktes durch x', y', z'; so müssen für denselben die folgenden vier Gleichungen zu gleicher Zeit statt haben:

$$x' = az' + b,\ x' = a'z' + b'$$
$$y' = cz' + d,\ y' = c'z' + d';$$

also auch die folgenden:

$$az' + b = a'z' + b'$$
$$cz' + d = c'z' + d'.$$

3) Soll es daher einen Durchschnittspunkt geben, so müssen die hieraus für z' gezogenen Werthe einander gleich seyn. Man hat daher die Bedingungsgleichung,

$$\frac{b' - b}{a' - a} = \frac{d' - d}{c' - c}$$

oder $(a' - a)(d' - d) = (b' - b)(c' - c)$.

4) Findet die angegebene Beziehung zwischen den Größen $a, b, c, d, a', b', c', d'$ statt, so giebt es einen Durchschnittspunkt, und seine Coordinaten sind,

$$z' = \frac{b' - b}{a - a'} = \frac{d' - d}{c - c'}$$
$$y' = cz' + d = c'z' + d'.$$
$$x' = az' + b = a'z' + b'.$$

§ 242.

Aufg. Die Gleichung einer Ebene ist gegeben: man soll die Gleichung einer anderen Ebene finden, welche jener parallel ist, und durch einen gegebenen Punkt gehet.

Aufl. Es sey $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung der gegebenen Ebene; so kann die Gleichung der gesuchten Ebene keine andere Form als diese haben: $Ax + By + Cz + D' = 0$ (§ 238 Zus. 2); worin weiter nichts als das Glied D' unbekannt ist.

Es seyen x', y', z', die Coordinaten des gegebenen Punktes. Da dieser Punkt in der gesuchten Ebene liegen soll, so hat man die Gleichung $Ax' + By' + Bz' + D' = 0$. Wird diese Gleichung von der angenommenen abgezogen, so erhält man,

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0;$$

und dies ist die Gleichung der gesuchten Ebene.

§ 243.

Aufg. Es ist eine gerade Linie gegeben: man soll durch einen gegebenen Punkt eine Ebene legen, welche auf dieser Linie perpendikulär stehet.

Aufl. In § 10 wurde gezeigt, daß wenn eine Linie auf einer Ebene perpendikulär stehen soll, ihre Projektionen ebenfalls perpendikulär auf den Schnitten der Ebene mit den Projektionsebenen seyn müssen. Hierauf gründet sich die folgende Auflösung.

1) Es sey $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung der gesuchten Ebene. Nach § 238 Zus. 3 sind alsdann die Gleichungen für die Schnitte dieser Ebene mit den Ebenen der x, z, und der y, z,

$$Ax + Cz + D = 0, \text{ oder } x = -\frac{C}{A}z - \frac{D}{A}$$

$$By + Cz + D = 0, \text{ oder } y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B}$$

2) Es seyen nun $x = az + b$, $y = a'z + b'$, die Gleichungen für die Projektionen der gegebenen Linie auf die Ebenen der x, z, und der y, z. Da diese Projektionen auf den Schnitten in 1 perpendikulär stehen müssen; so hat man nach § 234 Zus. 1, $-\frac{1}{a} = -\frac{C}{A}$, $-\frac{1}{a'} = -\frac{C}{B}$, u. daher $A = aC$, $B = a'C$. Werden diese Werthe in der Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ substituirt, so erhält man die Gleichung

$$C(ax + a'y + z) + D = 0, \text{ oder } ax + a'y + z + \frac{D}{C} = 0.$$

3) Da die Ebene durch einen gegebenen Punkt gehen soll; so seyen x', y', z', die Coordinaten dieses Punktes; man hat alsdann auch

$$ax' + a'y' + z' + \frac{D}{C} = 0.$$

Wird diese Gleichung von der vorigen abgezogen, so erhält man

$$a(x - x') + a'(y - y') + z - z' = 0;$$

und dies ist die Gleichung für die gesuchte Ebene.

Zus. Ist im Gegentheil $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung einer gegebenen Ebene, und wird die Linie gesucht, welche auf dieser Ebene perpendikulär stehet, und durch einen gegebenen Punkt gehet, so darf man nur für a, a', ihre Werthe $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, aus 2 in den Gleichungen $y = az + b$, $y = a'z + b'$ substituiren. Man erhält hierdurch die Gleichungen

$x =$

$$x = \frac{A}{C} z + b, \; y = \frac{B}{C} z + b'.$$

Da nun auch das Perpendikel durch einen gegebenen Punkt gehen soll, dessen Coordinaten x', y', z', seyn mögen; so hat man,

$$x' = \frac{A}{C} z' + b, \; y' = \frac{B}{C} z' + b'.$$

Werden diese Gleichungen von den vorigen abgezogen, so verschwindet b und b', und man erhält,

$$x - x' = \frac{A}{C} (z - z'), \; y - y' = \frac{B}{C} (z - z'):$$

dies sind also die Gleichungen für die Projektionen des Perpendikels.

§ 244.

Aufg. Es sind zwey Punkte vermittelst ihrer Coordinaten gegeben: man soll ihren Abstand finden.

Aufl. Es seyen M, M′, (Fig. 114), die beyden Punkte; Am, mp, pM oder x, y, z die Coordinaten des ersten, Am′, m′p′, p′M′ oder x', y', z', die Coordinaten des zweyten; es soll MM′ gefunden werden.

Man ziehe pq der Axe AB parallel, ferner die Linie pp′, und Mr ihr parallel. Alsdann ist in dem bey q rechtwinkeligen Dreyecke pqp′, $(pp')^2 = (pq)^2 + (qp')^2$, oder, da $pq = Am' - Am = x' - x$, $qp' = m'p' - mp = y' - y$ ist, $(pp')^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$. In dem bey r rechtwinkeligen Dreyecke MrM′ ist ferner $(MM')^2 = (Mr)^2 + (M'r)^2$, oder, da $(Mr)^2 = (pp')^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$, $M'r = M'p' - Mp = z' - z$, also $(M'r)^2 = (z' - z)^2$ ist, $(MM')^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$, und daher

$$MM' = \sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]};$$

oder auch, da $(x' - x)^2 = (x - x')^2$ rc.

$$MM' = \sqrt{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]}.$$

Zus. Fällt der Punkt M' in A, so ist $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, und man erhält den Abstand MA des Punktes M vom Anfangspunkte der Coordinaten; es ist nämlich

$$AM = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

§ 245.

Aufg. Es sind zwey Punkte vermittelst ihrer rechtwinkeligen Coordinaten gegeben: man soll den Winkel finden, welchen zwey aus dem Anfangspunkte der Coordinaten durch diese Punkte gezogenen Linien einschließen.

Aufl. Man denke sich in Fig. 124 die Linien AM, AM', durch die gegebenen Punkte M, M', gezogen; es soll alsdann der Winkel MAM' gefunden werden.

Es seyen x, y, z, die Coordinaten des Punktes M, und x', y', z', die Coordinaten des Punktes M'. Nach dem vor. § ist alsdann, $(AM)^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $(AM')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, $(MM')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$. In dem Dreyecke MAM' ist aber

$$\text{Cos. } MAM' = \frac{(AM)^2 + (AM')^2 - (MM')^2}{2\,AM\,.\,AM'};$$

werden daher in diesem Ausdrucke für die Linien AM, AM', MM', ihre Werthe substituirt, so erhält man .... (φ)

$$\text{Cos. } MAM' = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}\,.\,\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}$$

Erst. Zus. Die Linie AM macht mit den drey Axen die Winkel MAB, MAC, MAD, welche nach der Ordnung, wie sie hier genannt worden, durch α, β, γ, bezeichnet werden sollen. Um diese Winkel zu finden, stelle man sich vor, der Punkt M' werde zuerst in die Axe AB, hierauf in die Axe

AC, und endlich in die Axe AD versetzt. Bey der ersten dieser Versetzungen wird $y' = o$, $z' = o$, und der Winkel MAM' gehet in MAB $= \alpha$ über; bey der zweyten wird $x' = o$, $z' = o$, und der Winkel MAM' gehet in MAC $= \beta$ über; bey der dritten Versetzung endlich wird $x' = o$, $y' = o$, und der Winkel MAM' gehet in MAD $= \gamma$ über. Durch diese dreyerley Substitutionen erhält man aus dem vorhin für Cos. MAM' gefundenen Ausdrucke,

$$\text{Cos.}\,\alpha = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}},\ \text{Cos.}\,\beta = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$$

$$\text{Cos.}\,\gamma = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}.$$

Vermittelst dieser Ausdrücke lassen sich also die Winkel finden, welche eine Linie, aus dem Anfangspunkte der Coordinaten durch einen gegebenen Punkt gezogen, mit den drey Axen bildet.

Zweyt. Zus. Quadrirt man diese Gleichungen und addiret sie hierauf zusammen, so erhält man:

$$\text{Cos.}\,\alpha^2 + \text{Cos.}\,\beta^2 + \text{Cos.}\,\gamma^2 = 1;$$

d. h. die Summe der Quadrate von den Cosinussen der Winkel, welche eine aus dem Anfangspunkte der Coordinaten gezogene Linie mit den drey Axen bildet, ist immer der Einheit gleich.

Dritt. Zus. Bezeichnen die Buchstaben α', β', γ', die Winkel, welche die Linie AM' mit den drey Axen AB, AC, AD, macht; so hat man auch nach dem Vorhergehenden,

$$\text{Cos.}\,\alpha' = \frac{x'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}},\ \text{Cos.}\,\beta' = \frac{y'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}},$$

$$\text{Cos.}\,\gamma' = \frac{z'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}.$$

wenn $Ax + By + Cz + D = o$, $A'x + B'y + C'z + D' = o$, die Gleichungen für zwey parallele Ebenen seyn sollen, $A' = A$, $B' = B$, und $C' = C$ seyn muß.

Dritt. Zus. Will man die Gleichungen für die Schnitte dieser Ebene mit den koordinirten Ebenen haben, so darf man nur nach und nach $x = o$, $y = o$, $z = o$ setzen. Man erhält alsdann für den Schnitt der Ebene mit der Ebene der y und z die Gleichung $By + Cz + D = o$; für den Schnitt mit der Ebene der x und z, die Gleichung $Ax + Cz + D = o$, und für den Schnitt mit der Ebene der x und y, die Gleichung $Ax + By + D = o$.

Viert. Zus. Man kann sich die Ebenen BAC, BAD, CAD, (Fig. 112) nach allen Seiten ohne Ende erweitert denken; es entstehen alsdann um den Punkt A herum acht körperliche Winkel, welche den Raum in eben so viele Gegenden abtheilen, in denen die x, y, z, genommen werden können. Sind nämlich in dem körperlichen Winkel, welcher von den ebenen Winkeln BAC, BAD, CAD eingeschlossen wird, die x, y, z, positiv, so sind in den übrigen sieben eine oder zwey von ihnen, oder auch alle drey negativ. Es liegt nämlich

$+x$, $+y$, $-z$, im Winkel BAC, CAd, BAd,
$+x$, $-y$, $+z$, im Winkel BAc, cAd, DAB,
$-x$, $+y$, $+z$, im Winkel bAC, CAD, bAD,
$+x$, $-y$, $-z$, im Winkel BAc, cAd, BAd,
$-x$, $-y$, $+z$, im Winkel bAc, cAD, bAD,
$-x$, $+y$, $-z$, im Winkel bAC, CAd, bAd,
$-x$, $-y$, $-z$, im Winkel bAc, cAd, bAd.

§ 239.

Aufg. Es sind die Gleichungen zweyer Ebenen ge-

geben: man soll die Gleichungen für die Projektionen ihres Schnittes auf die drey Koordinirten Ebenen finden.

Aufl. Es seyen

$Ax + By + Cz + D = o$, $A'x + B'y + C'z + D' = o$,

die Gleichungen der beyden gegebenen Ebenen, deren Schnitt gesucht wird.

1) Alle Punkte des Schnittes sind beyden Ebenen gemeinschaftlich. Es müssen daher die Coordinaten des Schnittes ein solches Verhältniß gegen einander haben, daß dadurch den beyden gegebenen Gleichungen zu gleicher Zeit ein Genüge geschiehet. Es können daher nicht, wie bey einer Ebene, zwey der Größen x, y, z, willkührlich angenommen werden, um daraus die dritte zu erhalten; denn sobald eine derselben bestimmt ist, so sind es vermöge dieser Gleichungen auch die beyden anderen. Jede zwey von den dreyen Coordinaten des Schnittes haben demnach eine bestimmte Relation, wofür sich eine Gleichung finden lassen muß; und diese Gleichung kann keine andere, als die ihrer Projektion auf die Ebene dieser zwey Coordinaten seyn.

2) Wenn man aus den beyden gegebenen Gleichungen nach und nach z, y, x eliminirt, so erhält man die folgenden:

$$(A'C - AC')\, x + (B'C - BC')\, y + CD' - C'D = o,$$
$$(BC' - B'C)\, z + (A'B - AB')\, x + BD' - B'D = o,$$
$$(AB' - A'B)\, y + (AC' - A'C)\, z + AD' - A'D = o.$$

oder, wenn man zur Abkürzung $A'C - AC' = \alpha$, $BC' - B'C = \beta$, $AB' - A'B = \gamma$, $CD' - C'D = \delta$, $BD' - B'D = \varepsilon$, $AD' - A'D = \zeta$ setzt,

$$\alpha x - \beta y + \delta = o,$$
$$\beta z - \gamma x + \varepsilon = o,$$
$$\gamma y - \alpha z + \zeta = o;$$

und dies sind die Gleichungen für die respektiven Projektionen des Schnittes auf die drey koordinirten Ebenen.

Zus. Nach § 5 ist eine Linie gegeben, wenn die Projektionen derselben auf zwey Ebenen von bekannter Lage gegeben sind; es reichen demnach schon zwey Projektionen zur Bestimmung des Schnittes hin. Da wir nun hier Gleichungen für drey Projektionen gefunden haben; so müssen jede zwey derselben die dritte in sich schließen, und diese muß sich daher aus jenen herleiten lassen. Um sich hiervon zu überzeugen, darf man nur eine der veränderlichen Größen, etwa x, eliminiren. Man erhält alsdann aus der ersten und zweyten Gleichung, $\alpha\beta z - \beta\gamma y + \alpha\varepsilon + \gamma\delta = 0$, und aus der dritten durch die Multiplikation mit $-\beta$, $\alpha\beta z - \beta\gamma y - \beta\zeta = 0$; diese beyden Gleichungen müssen demnach identisch seyn; es muß folglich $\alpha\varepsilon + \gamma\delta = -\beta\zeta$; oder $\alpha\varepsilon + \gamma\delta + \beta\zeta = 0$ seyn; und dies ist auch wirklich richtig, wie sich ergiebt, wenn für α, β, γ, δ, ε, ζ, ihre Werthe gesetzt werden.

§ 240.

Aufg. Es sind drey Punkte vermittelst ihrer Coordinaten gegeben: man soll die Gleichung für die Ebene finden, welche durch sie gelegt werden kann.

Aufl. Es seyen x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', die Coordinaten dieser Punkte. Es sey ferner $Ax + By + Cz + D = 0$, die gesuchte Gleichung der Ebene; A, B, C, D, sind angenommene Größen deren Verhältniß vermittelst der drey gegebenen Punkte bestimmt werden muß.

Da die drey gegebenen Punkte in dieser Ebene liegen sollen, so müssen die folgenden drey Gleichungen statt haben:

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0,$$
$$Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0.$$

Man dividire diese Gleichungen durch D, und betrachte $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, als die unbekannten Größen derselben. Durch die Auflösung erhält man alsdann

$$\frac{A}{D} =$$

$$\frac{z'(y''-y''') - z''(y'-y''') + z'''(y'-y'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')}$$

$$\frac{B}{D} =$$

$$\frac{x'(z''-z''') - x''(z'-z''') + x'''(z'-z'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')}$$

$$\frac{C}{D} =$$

$$\frac{y'(x''-x''') - y''(x'-x''') + y'''(x'-x'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')}$$

Da es hier bloß auf die Verhältnisse der Größen A, B, C, D, und nicht auf ihre wirkliche Größe ankommt; so kann man zur Vermeidung der Brüche setzen,

$$A = z'(y''-y''') - z''(y'-y''') + z'''(y'-y'')$$
$$B = x'(z''-z''') - x''(z'-z''') + x'''(z'-z'')$$
$$C = y'(x''-x''') - y''(x'-x''') + y'''(x'-x'')$$
$$D = x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z').$$

Werden diese Werthe in der Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ substituirt, so erhält man die gesuchte Gleichung der Ebene.

§ 241.

Aufg. Die Gleichungen für die Projektionen zweyer Linien auf zwey der koordinirten Ebenen sind gegeben: man soll die Bedingungen angeben, unter welchen sich

diese Linien schneiden, und den Ort, wo sie sich schneiden, wenn diese Bedingungen statt finden.

Aufl. 1) Es seyen

$$x = az + b,\ x = a'z + b',$$

die Gleichungen für die Projektionen der zwey Linien auf die Ebene der x, z, und

$$y = cz + d,\ y = c'z + d',$$

die Gleichungen für die Projektionen auf die Ebene der y, z.

2) Giebt es nun einen Punkt, wo sich die Linien schneiden, und bezeichnet man die Coordinaten dieses Punktes durch x', y', z'; so müssen für denselben die folgenden vier Gleichungen zu gleicher Zeit statt haben:

$$x' = az' + b,\ x' = a'z' + b'$$
$$y' = cz' + d,\ y' = c'z' + d';$$

also auch die folgenden:

$$az' + b = a'z' + b'$$
$$cz' + d = c'z' + d'.$$

3) Soll es daher einen Durchschnittspunkt geben, so müssen die hieraus für z' gezogenen Werthe einander gleich seyn. Man hat daher die Bedingungsgleichung,

$$\frac{b' - b}{a' - a} = \frac{d' - d}{c' - c}$$

oder $(a' - a)(d' - d) = (b' - b)(c' - c)$.

4) Findet die angegebene Beziehung zwischen den Größen a, b, c, d, a', b', c', d' statt, so giebt es einen Durchschnittspunkt, und seine Coordinaten sind,

$$z' = \frac{b' - b}{a - a'} = \frac{d' - d}{c - c'}$$
$$y' = cz' + d = c'z' + d'.$$
$$x' = az' + b = a'z' + b'.$$

§ 242.

Aufg. Die Gleichung einer Ebene ist gegeben: man soll die Gleichung einer anderen Ebene finden, welche jener parallel ist, und durch einen gegebenen Punkt gehet.

Aufl. Es sey $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung der gegebenen Ebene; so kann die Gleichung der gesuchten Ebene keine andere Form als diese haben: $Ax + By + Cz + D' = 0$ (§ 238 Zus. 2); worin weiter nichts als das Glied D' unbekannt ist.

Es seyen x', y', z', die Coordinaten des gegebenen Punktes. Da dieser Punkt in der gesuchten Ebene liegen soll, so hat man die Gleichung $Ax' + By' + Bz' + D' = 0$. Wird diese Gleichung von der angenommenen abgezogen, so erhält man,

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0;$$

und dies ist die Gleichung der gesuchten Ebene.

§ 243.

Aufg. Es ist eine gerade Linie gegeben: man soll durch einen gegebenen Punkt eine Ebene legen, welche auf dieser Linie perpendikulär stehet.

Aufl. In § 10 wurde gezeigt, daß wenn eine Linie auf einer Ebene perpendikulär stehen soll, ihre Projektionen ebenfalls perpendikulär auf den Schnitten der Ebene mit den Projektionsebenen seyn müssen. Hierauf gründet sich die folgende Auflösung.

1) Es sey $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung der gesuchten Ebene. Nach § 238 Zus. 3 sind alsdann die Gleichungen für die Schnitte dieser Ebene mit den Ebenen der x, z, und der y, z,

$$Ax + Cz + D = 0, \text{ oder } x = -\frac{C}{A}z - \frac{D}{A}$$

$$By + Cz + D = 0, \text{ oder } y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B}$$

2) Es seyen nun $x = az + b$, $y = a'z + b'$, die Gleichungen für die Projektionen der gegebenen Linie auf die Ebenen der x, z, und der y, z. Da diese Projektionen auf den Schnitten in 1 perpendikulär stehen müssen; so hat man nach § 234 Zus. 1, $-\frac{1}{a} = -\frac{C}{A}$, $-\frac{1}{a'} = -\frac{C}{B}$, u. daher $A = aC$, $B = a'C$. Werden diese Werthe in der Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ substituirt, so erhält man die Gleichung

$$C(ax + a'y + z) + D = 0, \text{ oder } ax + a'y + z + \frac{D}{C} = 0.$$

3) Da die Ebene durch einen gegebenen Punkt gehen soll; so seyen x', y', z', die Coordinaten dieses Punktes; man hat alsdann auch

$$ax' + a'y' + z' + \frac{D}{C} = 0.$$

Wird diese Gleichung von der vorigen abgezogen, so erhält man

$$a(x - x') + a'(y - y') + z - z' = 0;$$

und dies ist die Gleichung für die gesuchte Ebene.

Zus. Ist im Gegentheil $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung einer gegebenen Ebene, und wird die Linie gesucht, welche auf dieser Ebene perpendikulär stehet, und durch einen gegebenen Punkt gehet, so darf man nur für a, a', ihre Werthe $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, aus 2 in den Gleichungen $y = az + b$, $y = a'z + b'$ substituiren. Man erhält hierdurch die Gleichungen

x =

$$x = \frac{A}{C} z + b, \; y = \frac{B}{C} z + b'.$$

Da nun auch das Perpendikel durch einen gegebenen Punkt gehen soll, dessen Coordinaten x', y', z', seyn mögen; so hat man,

$$x' = \frac{A}{C} z' + b, \; y' = \frac{B}{C} z' + b'.$$

Werden diese Gleichungen von den vorigen abgezogen, so verschwindet b und b', und man erhält,

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \; y - y' = \frac{B}{C}(z - z'):$$

dies sind also die Gleichungen für die Projektionen des Perpendikels.

§ 244.

Aufg. Es sind zwey Punkte vermittelst ihrer Coordinaten gegeben: man soll ihren Abstand finden.

Aufl. Es seyen M, M', (Fig. 114), die beyden Punkte; Am, mp, pM oder x, y, z die Coordinaten des ersten, Am', m'p', p'M' oder x', y', z', die Coordinaten des zweyten; es soll MM' gefunden werden.

Man ziehe pq der Axe AB parallel, ferner die Linie pp', und Mr ihr parallel. Alsdann ist in dem bey q rechtwinkeligen Dreyecke pqp', $(pp')^2 = (pq)^2 + (qp')^2$, oder, da $pq = Am' - Am = x' - x$, $qp' = m'p' - mp = y' - y$ ist, $(pp')^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$. In dem bey r rechtwinkeligen Dreyecke MrM' ist ferner $(MM')^2 = (Mr)^2 + (M'r)^2$, oder, da $(Mr)^2 = (pp')^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$, $M'r = M'p' - Mp = z' - z$, also $(M'r)^2 = (z' - z)^2$ ist, $(MM')^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$, und daher

$$MM' = \sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]};$$

oder auch, da $(x' - x)^2 = (x - x')^2$ ꝛc.

$$MM' = \sqrt{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]}.$$

Zus. Fällt der Punkt M′ in A, so ist $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, und man erhält den Abstand MA des Punktes M vom Anfangspunkte der Coordinaten; es ist nämlich

$$AM = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

§ 245.

Aufg. Es sind zwey Punkte vermittelst ihrer rechtwinkeligen Coordinaten gegeben: man soll den Winkel finden, welchen zwey aus dem Anfangspunkte der Coordinaten durch diese Punkte gezogenen Linien einschließen.

Aufl. Man denke sich in Fig. 124 die Linien AM, AM′, durch die gegebenen Punkte M, M′, gezogen; es soll alsdann der Winkel MAM′ gefunden werden.

Es seyen x, y, z, die Coordinaten des Punktes M, und x', y', z', die Coordinaten des Punktes M′. Nach dem vor. § ist alsdann, $(AM)^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $(AM')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, $(MM')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$. In dem Dreyecke MAM′ ist aber

$$\text{Cos. } MAM' = \frac{(AM)^2 + (AM')^2 - (MM')^2}{2\,AM \,.\, AM'};$$

werden daher in diesem Ausdrucke für die Linien AM, AM′, MM′, ihre Werthe substituirt, so erhält man .... (φ)

$$\text{Cos. } MAM' = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \,.\, \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}$$

Erst. Zus. Die Linie AM macht mit den drey Axen die Winkel MAB, MAC, MAD, welche nach der Ordnung, wie sie hier genannt worden, durch α, β, γ, bezeichnet werden sollen. Um diese Winkel zu finden, stelle man sich vor, der Punkt M′ werde zuerst in die Axe AB, hierauf in die Axe

AC, und endlich in die Axe AD versetzt. Bey der ersten dieser Versetzungen wird $y' = o$, $z' = o$, und der Winkel MAM′ gehet in MAB = α über; bey der zweyten wird $x' = o$, $z' = o$, und der Winkel MAM′ gehet in MAC = β über; bey der dritten Versetzung endlich wird $x' = o$, $y' = o$, und der Winkel MAM′ gehet in MAD = γ über. Durch diese dreyerley Substitutionen erhält man aus dem vorhin für Cos. MAM′ gefundenen Ausdrucke,

$$\text{Cos. } \alpha = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}, \quad \text{Cos. } \beta = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$$

$$\text{Cos. } \gamma = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}.$$

Vermittelst dieser Ausdrücke lassen sich also die Winkel finden, welche eine Linie, aus dem Anfangspunkte der Coordinaten durch einen gegebenen Punkt gezogen, mit den drey Axen bildet.

Zweyt. Zus. Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie hierauf zusammen, so erhält man:

$$\text{Cos. } \alpha^2 + \text{Cos. } \beta^2 + \text{Cos. } \gamma^2 = 1;$$

d. h. die Summe der Quadrate von den Cosinussen der Winkel, welche eine aus dem Anfangspunkte der Coordinaten gezogene Linie mit den drey Axen bildet, ist immer der Einheit gleich.

Dritt. Zus. Bezeichnen die Buchstaben α', β', γ', die Winkel, welche die Linie AM′ mit den drey Axen AB, AC, AD, macht; so hat man auch nach dem Vorhergehenden,

$$\text{Cos. } \alpha' = \frac{x'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}, \quad \text{Cos. } \beta' = \frac{y'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}},$$

$$\text{Cos. } \gamma' = \frac{z'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}.$$

Hieraus und aus den vorhin für Cos. α, Cos. β, Cos. γ, gefundenen Ausdrücken erhält man,

$$\text{Cos.}\,\alpha\ \text{Cos.}\,\alpha' = \frac{xx'}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\cdot\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}},$$

$$\text{Cos.}\,\beta\ \text{Cos.}\,\beta' = \frac{yy'}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\cdot\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}},$$

$$\text{Cos.}\,\gamma\ \text{Cos.}\,\gamma' = \frac{zz'}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\cdot\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}}.$$

Die Summe dieser drey Gleichungen giebt mit Hülfe der Gleichung (φ),

$$\text{Cos.}\,MAM' = \text{Cos.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\alpha' + \text{Cos.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\beta' + \text{Cos.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\gamma'.$$

Kennet man also die Winkel, welche zwey aus dem Anfangspunkte der Coordinaten gezogene Linien mit den drey Axen machen, so läßt sich auch vermittelst dieser Gleichung der Winkel finden, welchen sie mit einander machen.

Anmerk. Die hier gefundenen Resultate sind in der höheren Mechanik von der größten Wichtigkeit; man wird daher wohl thun, sich mit ihnen vertraut zu machen.

§ 246.

Aufg. Die Gleichung einer Ebene ist gegeben; auch sind die Coordinaten eines Punktes gegeben: man soll die Länge des Perpendikels finden, welches von diesem Punkte auf jene Ebene herabgelassen wird.

Aufl. 1) Ist $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung der gegebenen Ebene, und sind x', y', z', die Coordinaten des gegebenen Punktes, so sind nach § 243 Zus.

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z'),$$

die Gleichungen für die Projektion des Perpendikels.

2) Es bezeichnen von nun an x, y, z, die unbekannten

Coordinaten des Punktes, wo das Perpendikel die Ebene trifft, und l die Länge dieses Perpendikels. Nach §. 245 ist alsdann $l = \sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}$, oder, wenn für $x-x'$, $y-y'$, ihre Werthe aus 1 substituirt werden,

$$l = \frac{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}{C}(z-z').$$

Es kommt also jetzt bloß darauf an $z-z'$ zu finden.

3) Der Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ läßt sich die folgende Form geben:

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') + Ax' + By' + Cz' + D = 0.$$

Man substituire in dieser Gleichung für $x-x'$, $y-y'$ ihre Werthe aus 1, und suche hierauf $z-z'$; dies giebt,

$$z-z' = -\frac{C(Ax' + By' + Cz' + D)}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

4) Wird dieser Werth von $z-z'$ in dem Ausdrucke für l substituirt, so erhält man,

$$l = -\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}},$$

und dies ist die Länge des gesuchten Perpendikels.

Anmerk. Das Zeichen — in dem für l gefundenen Ausdrucke kann auch weggelassen werden, weil uns hier bloß um die Bestimmung der Länge und nicht der Lage des Perpendikels zu thun war, wie auch die Zweydeutigkeit der Wurzelgröße im Nenner zu erkennen giebt. Sollen indessen fernere Rechnungen sich darauf gründen, so muß es beybehalten werden.

§. 247.

Aufg. Es sind n Punkte gegeben: man soll die Gleichung einer Ebene finden, welcher die Eigenschaft zu-

kommt, daß, wenn von jedem der gegebenen Punkte ein Perpendikel auf diese Ebene herabgelassen wird, die Summe aller Perpendikel auf der einen Seite der Ebene eben so groß sey, als die Summe der Perpendikel auf der anderen Seite; oder mit anderen Worten, daß die algebraische Summe aller auf der Ebene gezogenen Perpendikel = o sey.

Aufl. Es sey $Ax + By + Cz + D = o$ die gesuchte Gleichung der Ebene. Es seyen ferner x', y', z', die Coordinaten des ersten Punktes x'', y'', z'', die des zweyten, x''', y''', z''' die des dritten 2c. Bezeichnet man nun die Perpendikel, welche von dem ersten, zweyten, dritten 2c. Punkte herabgelassen werden, nach der Ordnung durch p', p'', p''', 2c.; so hat man nach dem vor. §

$$p' = -\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}},$$

$$p'' = -\frac{Ax'' + By'' + Cz'' + D}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}},$$

$$p''' = -\frac{Ax''' + By''' + Cz''' + D}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}},$$

2c.

Nach der Aufgabe soll aber $p' + p'' + p''' +$ 2c. $= o$ seyn; man erhält also die Gleichung,

$$A(x' + x'' + x''' \text{ 2c.}) + B(y' + y'' + y''' + \text{2c.}) + C(z' + z'' + z''' + \text{2c.}) + nD = o;$$

und diese Gleichung giebt die Beziehung an, welche zwischen den angenommenen Größen A, B, C, D, statt finden muß, wenn der Aufgabe ein Genüge geschehen soll.

Zus. Hieraus erhellet zugleich, daß die Aufgabe, wie sie vorgetragen worden, zu den unbestimmten gehöret, weil es

unendlich viele Werthe der Grössen A, B, C, D, giebt, welche der gefundenen Bedingungsgleichung Genüge thun, also auch unendlich viele Ebenen, welche die geforderte Eigenschaft besitzen. Soll daher die Aufgabe zu einer bestimmten werden, so müssen, da eine der Grössen A, B, C, D, willkührlich angenommen werden kann, noch zwey Bedingungen gegeben seyn, wie z. B. die, daß die gesuchte Ebene durch zwey gegebene Punkte gehen solle.

Es sey der Anfangspunkt der Coordinaten der eine dieser Punkte; der andere sey durch die Coordinaten x^{1}, y^{1}, z^{1}, gegeben. Die erste Bedingung wird erfüllt, wenn $D = 0$ ist, die zweyte giebt die Gleichung $Ax^{1} + By^{1} + Cz^{1} = 0$. Wird also, der Kürze wegen, $x' + x'' + x''' + \text{etc.} = X^{1}$, $y' + y'' + y''' + \text{etc.} = Y^{1}$, $z' + z'' + z''' + \text{etc.} = Z^{1}$ gesetzt; so hat man die beyden Gleichungen:

$$AX^{1} + BY^{1} + CZ^{1} = 0,$$
$$Ax^{1} + By^{1} + Cz^{1} = 0,$$

und diese geben,

$$B = \frac{x^{1}Z^{1} - z^{1}X^{1}}{z^{1}Y^{1} - y^{1}Z^{1}} A, \quad C = \frac{y^{1}X^{1} - x^{1}Y^{1}}{z^{1}Y^{1} - y^{1}Z^{1}} A;$$

oder, wenn $A = z^{1}Y^{1} - y^{1}Z^{1}$ gesetzt wird,

$$B = x^{1}Z^{1} - z^{1}X^{1}, \quad C = y^{1}X^{1} - x^{1}Y^{1}.$$

Die gesuchte Gleichung der Ebene ist demnach unter den angegebenen Bedingungen folgende:

$$(z^{1}Y^{1} - y^{1}Z^{1})x + (x^{1}Z^{1} - z^{1}X^{1})y + (y^{1}X^{1} - x^{1}Y^{1})z = 0.$$

§ 248.

Die Aufgabe des vor. §'s schließt die folgende in sich.

Aufg. Es sind n Punkte gegeben, welche alle in einer Ebene liegen: man soll in dieser Ebene eine gerade

Linie von solcher Lage finden, daß die algebraische Summe aller, aus den gegebenen Punkten auf ihr herabgelassenen Perpendikel, $= 0$ sey.

Aufl. Denn man darf nur die Coordinaten z, z', z'', z''', ꝛc., $= 0$ setzen, so verwandelt sich die Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ der gesuchten Ebene in die Gleichung $Ax + By + D = 0$ der gesuchten Linie, und die Beziehungsgleichung der Grössen A, B, C, D, in die folgende:
$A(x' + x'' + x''' + \text{ꝛc.}) + B(y' + y'' + y''' + \text{ꝛc.}) + nD = 0$.

Zus. Es giebt also unendlich viele geraden Linien, welche der Aufgabe Genüge thun. Man kann daher um die Aufgabe aus einer unbestimmten zu einer bestimmten zu machen, noch eine Bedingung hinzufügen, z. B. die, daß die gesuchte Linie durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen solle. Für diesen Fall ist $D = 0$. Die Gleichung für die gesuchte Linie verwandelt sich in $Ax + By = 0$, oder, wenn $-\frac{A}{B} = a$ gesetzt wird, in $y = ax$, und es ist

$$a = -\frac{A}{B} = \frac{y' + y'' + y''' + \text{ꝛc.}}{x' + x'' + x''' + \text{ꝛc.}}$$

Da $a = \text{Tang.}\ \alpha$ (§ 231), so läßt sich die Linie auch durch eine sehr leichte Construktion finden.

§ 249.

Aufg. Es sind n Punkte gegeben: man soll einen Punkt finden, welcher so beschaffen ist, daß, wenn man aus demselben ein Perpendikel auf irgend eine Ebene, sie sey welche sie wolle, herabläßt, dieses Perpendikel n mal genommen, immer so groß sey als die algebraische Summe aller der Perpendikel, welche aus den n gegebenen Punkten auf diese Ebene herabgelassen werden.

Aufl. Es sey $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung irgend einer nach Willkühr angenommenen Ebene; x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', rc. seyen die Coordinaten der n gegebenen Punkte, und p', p'', p''', rc. die Perpendikel aus diesen Punkten auf jene Ebene; ferner x, y, z, die Coordinaten des gesuchten Punktes, und P sein Perpendikel. Alsdann ist, (§ 246)

$$P = -\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}},$$

und die Perpendikel p', p'', p''', rc., haben die in § 247 an gegebenen Werthe.

Nach den Bedingungen der Aufgabe soll aber $nP = p' + p'' + p''' +$ rc. seyn; man hat also

$$n(Ax + By + Cz + D) =$$
$$A(x' + x'' + x''' + \text{rc.}) + B(y' + y'' + y''' + \text{rc.})$$
$$+ C(z' + z'' + z''' + \text{rc.}) + nD.$$

oder,

$$n(Ax + By + Cz) =$$
$$A(x' + x'' + x''' + \text{rc.}) + B(y' + y'' + y''' + \text{rc.})$$
$$+ C(z' + z'' + z''' + \text{rc.}).$$

Die Aufgabe fordert aber, daß die angegebene Eigenschaft des gesuchten Punktes für jede Ebene statt finden solle; also muß auch diese Gleichung für jede beliebige Werthe der Größen A, B, C, richtig seyn. Da nun dies nur alsdann statt haben kann, wenn die beyden Theile der Gleichung identisch sind; so muß seyn,

$$nx = x' + x'' + x''' + \text{rc.}$$
$$ny = y' + y'' + y''' + \text{rc.}$$
$$nz = z' + z'' + z''' + \text{rc.}$$

und daher,

$$x = (x' + x'' + x''' + \text{ꝛc.}) : n$$
$$y = (y' + y'' + y''' + \text{ꝛc.}) : n$$
$$z = (z' + z'' + z''' + \text{ꝛc.}) : n.$$

§ 250.

Aufg. Es sind n Punkte gegeben, und von diesen Punkten auf irgend eine Ebene die Perpendikel p', p'', p''', ꝛc. herabgelassen worden; es sind ferner eben so viele Zahlen m', m'', m''', ꝛc. gegeben: man soll einen Punkt finden, dessen Perpendikel P, die Ebene sey welche sie wolle, jedesmal eine solche Größe hat, daß $m'p' + m''p'' + m'''p''' + \text{ꝛc.} = (m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.}) P$ sey.

Aufl. Werden die Bezeichnungen des vor. §'s beybehalten, und für p', p'', p''', ꝛc. ihre Werthe aus § 247, desgleichen für P sein Werth aus dem vor. § in der Gleichung $m'p' + m''p'' + m'''p''' + \text{ꝛc.} = (m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.}) P$ substituirt: so erhält man die Gleichung,

$$(m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.}) (Ax + By + Cz + D) =$$
$$A (m'x' + m''x'' + m'''x''' + \text{ꝛc.}) + B (m'y' + m''y'' + m'''y''' + \text{ꝛc.})$$
$$+ C (m'z' + m''z'' + m'''z''' + \text{ꝛc.}) + (m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.}) D.$$

oder,

$$(m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.}) (Ax + By + Cz) =$$
$$A (m'x' + m''x'' + m'''x''' + \text{ꝛc.}) + B (m'y' + m''y'' + m'''y''' + \text{ꝛc.})$$
$$+ C (m'z' + m''z'' + m'''z''' + \text{ꝛc.})$$

Da diese Gleichung richtig seyn muß, was auch A, B, C, für Werthe haben mögen, weil die verlangte Eigenschaft des gesuchten Punktes für jede Ebene gelten soll; so muß sie identisch seyn. Man hat daher

$$(m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.}) x = m'x' + m''x'' + m'''x''' + \text{ꝛc.}$$
$$(m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.}) y = m'y' + m''y'' + m'''y''' + \text{ꝛc.}$$
$$(m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.}) z = m'z' + m''z'' + m'''z''' + \text{ꝛc.}$$

und hieraus

$$x = \frac{m'x' + m''x'' + m'''x''' + \text{2c.}}{m' + m'' + m''' + \text{2c.}}$$

$$y = \frac{m'y' + m''y'' + m'''y''' \text{2c.}}{m' + m'' + m''' + \text{2c.}}$$

$$z = \frac{m'z' + m''z'' + m'''z''' + \text{2c.}}{m' + m'' + m''' + \text{2c.}}.$$

Anmerk. Die Aufgabe des vorigen §'s ist nur ein einzelner Fall von dieser weit allgemeineren, und die daselbst angegebenen Ausdrücke für x, y, z, ergeben sich aus diesen, wenn $m' = m'' = m''' =$ 2c. gesetzt wird; denn alsdann wird $m' + m'' + m''' +$ 2c. $=$ nm, und

$$m'x' + m''x'' + m'''x''' + \text{2c.} = m\,(x' + x'' + x''' + \text{2c.}),$$
$$m'y' + m''y'' + m'''y''' + \text{2c.} = m\,(y' + y'' + y''' + \text{2c.}),$$
$$m'z' + m''z'' + m'''z''' + \text{2c.} = m\,(z' + z'' + z''' + \text{2c.}).$$

Der Punkt, der hier gefunden worden, ist kein anderer als der Schwerpunkt: denn denkt man sich unter m', m'', m''' 2c., Massen anstatt Zahlen, (welches zu thun erlaubt ist, weil Massen sich immer durch Zahlen ausdrucken lassen,) so sind die Zähler der für x, y, z, gefundenen Ausdrücke die Summen der Momente dieser Massen in Beziehung auf die drey koordinirten Ebenen, und diese Summen dividirt durch die Summen der Massen geben, wie bekannt, die Entfernungen des Schwerpunktes von jenen Ebenen.

Die Haupteigenschaft des Schwerpunktes, daß für jede Ebene die Summe der Momente der einzelnen Massen dem Momente ihres Schwerpunktes, wenn man sich alle Massen in demselben vereinigt denkt, gleich sey, ist also hier ohne Hülfe statischer Principien erwiesen worden. Man siehet hieraus, daß dieser Punkt eben so gut der Geometrie als der Sta-

til angehöre, und daß man sich seiner bey geometrischen Untersuchungen ohne Verstoß wider die Methode bedienen darf, wenn die Kürze oder die Deutlichkeit es fordert.

§ 251.

Aufg. Es sind n Ebenen der Lage nach gegeben: man soll den Ort aller der Punkte finden, welche die Eigenschaft besitzen, daß, wenn man von einem dieser Punkte auf jene n Ebenen die Perpendikel p', p'', p''' ꝛc. herabläßt, und jedes dieser Perpendikel mit einer der respektiven Zahlen m', m'', m''', ꝛc., multiplicirt, die algebraische Summe aller dieser Produkte einer gegebenen Größe q gleich sey; d. h. daß $m'p' + m''p'' + m'''p''' +$ ꝛc. $= q$ sey.

Aufl. Es seyen

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$
$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0,$$
$$A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0,$$
ꝛc.

die Gleichungen der gegebenen Ebenen, und x', y', z', die Coordinaten des gesuchten Punktes; so ist, wenn der Kürze wegen,

$$\frac{1}{\sqrt{(A'^2 + B'^2 + C'^2)}} = k', \quad \frac{1}{\sqrt{(A''^2 + B''^2 + C''^2)}} = k'',$$
$$\frac{1}{\sqrt{(A'''^2 + B'''^2 + C'''^2)}} = k''',$$

gesetzt wird, (§ 246)

$$p' = -k'(A'x' + B'y' + C'z' + D')$$
$$p'' = -k''(A''x' + B''y' + C''z' + D'')$$
$$p''' = -k'''(A'''y' + B'''y' + C'''z' + D''').$$

Werden diese Werthe in der Gleichung

$$m'p' + m''p'' + m'''p''' + \text{rc.} - q = o$$

substituirt, so erhält man,

$$(m'k'A' + m''k''A'' + m'''k'''A''' + \text{rc.})\, x' +$$
$$(m'k'B' + m''k''B'' + m'''k'''B''' + \text{rc.})\, y' +$$
$$(m'k'C' + m''k''C'' + m'''k'''C''' + \text{rc.})\, z' +$$
$$(m'k'D' + m''k''D'' + m'''k'''D''' + \text{rc.} + q)$$
$$= o.$$

Die Coordinaten x', y', z', des gesuchten Punktes müssen demnach eine solche Beziehung gegen einander haben, wie sie diese Gleichung angiebt. Für jede zwey nach Willkühr angenommene Coordinaten läßt sich aber jedesmal die dritte so bestimmen, daß sie dieser Gleichung Genüge thut. Es giebt also unendlich viele Punkte, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, und alle diese Punkte liegen in einer Ebene, deren Gleichung $(A)\,x + (B)\,y + (C)\,z + (D) = o$ ist, wenn

$$(A) = m'k'A' + m''k''A'' + m'''k'''A''' + \text{rc.}$$
$$(B) = m'k'B' + m''k''B'' + m'''k'''B''' + \text{rc.}$$
$$(C) = m'k'C' + m''k''C'' + m'''k'''C''' + \text{rc.}$$
$$(D) = m'k'D' + m''k''D'' + m'''k'''D''' + \text{rc.} + q$$

gesetzt wird.

Erst. Zus. Da hier q bloß in dem letzten Gliede der Gleichung $(A)\,x + (B)\,y + (C)\,z + (D) = o$ vorkommt; so folgt, daß für die nämlichen gegebenen Ebenen und für die nämlichen Zahlen m', m'', m''', rc., die Ebenen, deren Punkte die Eigenschaft besitzen, daß die Summe $m'p' + m''p'' + m'''p''' + \text{rc.}$ für jede derselben stimmer gleich bleibt, alle einander parallel sind.

Zweyt. Zus. Setzt man $C' = C'' = C''' = \text{rc.} = o$, so verwandeln sich die Gleichungen der gegebenen Ebenen in die Gleichungen $A'x + B'y + D' = o$, $A''x + B''y + D'' = o$, rc.,

für gegebene gerade Linien; alsdann wird aber auch zugleich (C) = o, und die Gleichung $(A)x + (B)y + (C)z + (D) = o$ der gesuchten Ebene verwandelt sich in die Gleichung $(A)x + (B)y + (D) = o$ für die gesuchte Linie. Hierdurch wird also die Aufgabe aufgelöst: wenn n in einer Ebene liegende gerade Linien der Lage nach gegeben sind, den Ort aller der Punkte zu finden, deren jeder die Eigenschaft besitzt, daß, wenn von denselben auf jene Linien die Perpendikel p', p'', p''', ꝛc. herabgelassen werden, immer $m'p' + m''p'' + m'''p'''$ + ꝛc. = q sey. (Ueber diese Aufgabe insbesondere sehe man den Anhang zur *polygonometrie ou de la mesure des figures rectilignes &c. par S. Lhuilier*, Geneve 1789, desgleichen Apollonius ebene Oerter, übers. von Camerer, Leipzig 1796, S. 146 — 171.)

§ 252.

Nach der gewöhnlichen Definition ist die Kugel ein Körper, welcher von einer Fläche begränzt wird, in der alle Punkte von einem gewissen anderen Punkte, welcher der Mittelpunkt genannt wird, gleich weit entfernt sind. Diese Definition analytisch ausgedruckt, giebt unmittelbar die Gleichung der Kugel. Denn bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunktes durch α, β, γ; so ist nach § 245 seine Entfernung von jedem anderen Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, $= \sqrt{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2]}$. Setzt man nun den Halbmesser der Kugel = r, so muß für alle Punkte der Kugelfläche eine solche Beziehung zwischen x, y, z, statt finden, daß dieser Ausdruck = r wird. Man hat also die Gleichung

$$\sqrt{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2]} = r,$$

oder $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2.$$

Setzt man z und $\gamma = o$, so verwandelt sich die Glei-

chung für die Kugel in eine Gleichung für den Kreis. Die Gleichung für den Kreis ist demnach,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Soll eine Gleichung zwischen x, y, z, der Kugel zugehören, so muß sie mit der oben angegebenen identisch seyn, weil sonst nicht für jeden beliebigen Werth zweyer Coordinaten die dritte denselben Werth erhalten könnte. Die Entwickelung der obigen Gleichung für die Kugel giebt aber

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0.$$

Es kann also die Gleichung, welche der Kugel zugehören soll, keine andere Form als diese haben:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ist umgekehrt eine solche Gleichung gegeben, so läßt sich jedesmal die Kugel bestimmen, welcher sie zugehört; denn da sie mit jener identisch seyn muß, so muß seyn

$$-2\alpha = A,\ -2\beta = B,\ -2\gamma = C,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = D.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man $\alpha = -\frac{1}{2}A$, $\beta = -\frac{1}{2}B$, $\gamma = -\frac{1}{2}C$, und wenn man diese Werthe in der dritten Gleichung substituirt, $r = \sqrt{\left(\frac{A^2 + B^2 + C^2}{4} - D\right)}$.

Hieraus ergiebt sich zugleich, daß, wenn die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ der Kugel zugehören soll, D nicht größer als $\frac{A^2 + B^2 + C^2}{4}$ seyn darf, weil sonst r imaginär werden würde. Ist $D = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{4}$, so ist $r = 0$, und die Kugel verwandelt sich in einen Punkt.

Alles, was hier von der Kugel gesagt worden, gilt auch mit einigen Abänderungen für den Kreis. Die Gleichung für

den Kreis ist nämlich $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$, oder entwickelt $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2$. Die Gleichung für den Kreis kann also keine andere Form als diese haben,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

und man hat alsdann $\alpha = -\frac{1}{2}A$, $\beta = -\frac{1}{2}B$,

$$r = \sqrt{\left(\frac{A^2 + B^2}{4} - C\right)}.$$

Die nämlichen Resultate würde man aber auch erhalten haben, wenn man in denen für die Kugel C und $z = 0$, und hierauf C anstatt D gesetzt hätte.

§ 253.

Aufg. Es sind n Punkte gegeben: man soll den Ort eines Punktes finden, der so beschaffen ist, daß, wenn von demselben Linien nach den gegebenen Punkten gezogen werden, die Summe der Quadrate aller dieser Linien einem gegebenen Quadrate gleich sey.

Aufl. Es seyen x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', rc. die Coordinaten der gegebenen Punkte, und x, y, z, die Coordinaten des gesuchten Punktes. Es seyen ferner L', L'', L''', rc., die unbekannten Linien, welche aus dem gesuchten Punkte nach den gegebenen gezogen worden, und q^2 das Quadrat, dem die Summe der Quadrate aller dieser Linien gleich seyn soll. Alsdann ist,

$$L'^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$
$$L''^2 = (x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2$$
$$L'''^2 = (x-x''')^2 + (y-y''')^2 + (z-z''')^2$$

rc.

oder entwickelt,

$L'^2 =$

$$L'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x'x - 2y'y - 2z'z + x'^2 + y'^2 + z'^2$$
$$L''^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x''x - 2y''y - 2z''z + x''^2 + y''^2 + z''^2$$
$$L'''^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x'''x - 2y'''y - 2z'''z + x'''^2 + y'''^2 + z'''^2, \text{ꝛc.}$$

Nach der Aufgabe soll aber $L'^2 + L''^2 + L'''^2 + \text{ꝛc.} = q$ seyn; man hat also die Gleichung,

$$n(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x' + x'' + x''' + \text{ꝛc.})x - 2(y' + y'' + y''' + \text{ꝛc.})y - 2(z' + z'' + z''' + \text{ꝛc.})z + x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \text{ꝛc.} + y'^2 + y''^2 + y'''^2 + \text{ꝛc.} + z'^2 + z''^2 + z'''^2 + \text{ꝛc.} = q^2,$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{n}(x' + x'' + x''' + \text{ꝛc.})x - \frac{2}{n}(y' + y'' + y''' + \text{ꝛc.})y - \frac{2}{n}(z' + z'' + z''' + \text{ꝛc.})z - \frac{1}{n}\left[q^2 - (x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \text{ꝛc.} + y'^2 + y''^2 + y'''^2 + \text{ꝛc.} + z'^2 + z''^2 + z'''^2 + \text{ꝛc.})\right] = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichung erkennet man, daß der gesuchte Ort eine Kugelfläche sey.

Hält man sie mit der allgemeinen Gleichung für die Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0$$

zusammen, so ergiebt sich aus der Vergleichung

$$\alpha = \frac{1}{n}(x' + x'' + x''' + \text{ꝛc.})$$

$$\beta = \frac{1}{n}(y' + y'' + y''' + \text{ꝛc.})$$

$$\gamma = \frac{1}{n}(z' + z'' + z''' + \text{ꝛc.})$$

woraus sich die Coordinaten des Mittelpunktes bestimmen lassen. Der Halbmesser r ergiebt sich aus der Gleichung,

$$r^2 = \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \\ \frac{1}{n}\left[q^2 - (x'^2 + x''^2 + \text{ꝛc.} + y'^2 + y''^2 + \text{ꝛc.} \right. \\ \left. + z'^2 + z''^2 + \text{ꝛc.})\right] \end{array} \right\}$$

Erst. Zus. Vergleicht man die hier für die Coordinaten α, β, γ, gefundenen Ausdrücke mit denen, welche im § 249 für die Coordinaten des Schwerpunktes gefunden worden; so ergiebt sich, daß der Mittelpunkt des gesuchten Ortes kein anderer als der Schwerpunkt der gegebenen Punkte sey, wenn man sich diese als gleich schwer denkt.

Zweyt. Zus. Da man q jedesmal so bestimmen kann, daß r einen gegebenen Werth erhält, so ergiebt sich der folgende merkwürdige Lehrsatz:

Wenn so viele Punkte, als man will, im Raume gegeben sind, und aus ihrem Schwerpunkte mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugel beschrieben wird, und wenn alsdann aus irgend einem Punkte der Kugelfläche nach den gegebenen Punkten gerade Linien gezogen werden: so ist die Summe der Quadrate aller dieser Linien für jeden Punkt der Kugelfläche immer von einerley Größe.

Dritt. Zus. Aus diesem Satze läßt sich der folgende, als ein einzelner Fall desselben, herleiten:

Wenn so viele Punkte, als man will, in einer Ebene gegeben sind, und aus ihrem Schwerpunkte mit einem beliebigen Halbmesser ein Kreis beschrieben wird, und wenn alsdann aus irgend einem Punkte auf der Peripherie dieses Kreises nach den gegebenen Punkten gerade Linien gezogen werden, so ist die Summe der

Quadrate aller dieser Linien für jeden Punkt der Kreisperipherie immer von einerley Größe.

Anmerk. Den Ort, aber nur für den Kreis und für Punkte, welche in einer Ebene liegen, fand Apollonius (m. s. die oben angef. Uebers. S. 263 — 310) wie sich von selbst verstehet, geometrisch; die Bemerkung Zus. 1, aber nur für den Kreis und für drey Punkte, welche in einer Ebene liegen) machte Fermat in einem Briefe an Roberval (m. s. feine Var. Op. Math. p. 151); der Satz Zus. 3 ist von Huygen (Horologium oscillatorium. Prop. 12); der Satz Zus. 2 ist zwar neu, gereicht mir aber zu keiner Ehre, weil er auf dem analytischen Wege, den ich eingeschlagen habe, leicht zu finden war.

§ 254.

Aufg. Es sind n Punkte gegeben; man soll den Ort eines anderen Punktes finden, der so beschaffen ist, daß wenn von diesem Punkte gerade Linien nach den gegebenen Punkten gezogen werden, und hierauf jedes dieser Quadrate mit einer gewissen gegebenen Zahl multiplicirt wird, die Summe aller hierdurch erhaltenen Producte einer gegebenen Größe gleich sey.

Aufl. Man behalte die Bezeichnungen des vor. §'s bey, und bezeichne noch überdies die Zahlen, durch welche die Quadrate der Linien multiplicirt werden sollen, durch m', m'', m''', ꝛc. Die Bedingungen der Aufgabe analytisch ausgedrückt, geben alsdenn die Gleichung

$$m'L'^2 + m''L''^2 + m'''L'''^2 + \text{ꝛc.} = q^2.$$

Werden hierin für L'^2, L''^2, L'''^2, ꝛc., ihre Werthe aus dem vor. § substituirt, so erhält man die Gleichung,

$$(m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.})(x^2 + y^2 + z^2) -$$
$$2(m'x' + m''x'' + m'''x''' + \text{ꝛc.})x - 2(m'y' + m''y'' + m'''y''' + \text{ꝛc.})y$$
$$- 2(m'z' + m''z'' + m'''z''' + \text{ꝛc.})z + m'x'^2 + m''x''^2 + m'''x'''^2$$
$$+ \text{ꝛc.} + m'y'^2 + m''y''^2 + m'''y'''^2 + \text{ꝛc.} +$$
$$m'z'^2 + m''z''^2 + m'''z'''^2 + \text{ꝛc.} - q^2 = 0.$$

Wird diese Gleichung durch $m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.}$ dividirt, so erhält sie die Form einer Gleichung für die Kugel, und man findet

$$\alpha = \frac{m'x' + m''x'' + m'''x''' + \text{ꝛc.}}{m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.}}$$
$$\beta = \frac{m'y' + m''y'' + m'''y''' + \text{ꝛc.}}{m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.}}$$
$$\gamma = \frac{m'z' + m''z'' + m'''z''' + \text{ꝛc.}}{m' + m'' + m''' + \text{ꝛc.}}$$

woraus sich ferner der Ausdruck für r finden läßt.

Zus. Denkt man sich unter m', m'', m''', ꝛc., Massen anstatt Zahlen; so sind (§ 250) α, β, γ, die Coordinaten ihres Schwerpunktes. Hieraus ergiebt sich der folgende höchst merkwürdige Satz:

Wenn so viele schwere Punkte als man will, von gleichem oder ungleichem Gewichte, im Raume gegeben sind, und aus dem Schwerpunkte derselben mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugel beschrieben wird; wenn ferner aus irgend einem Punkte der Kugelfläche nach jenen Punkten gerade Linien gezogen werden, und das Quadrat einer jeden dieser Linien mit dem Gewichte des Punktes, nach welchem sie gezogen ist, multiplicirt wird: so ist die Summe dieser Producte für alle Punkte der Kugelfläche von einerley Größe.

XVI. Relationen zwischen den Coordinaten dreyer Punkte. Gebrauch derselben bei der Auflösung einiger, die dreyseitigen Pyramiden betreffenden Aufgaben.

Der berühmte Lagrange, dessen Bekanntschaft zu machen wir hier zuerst Gelegenheit haben, giebt in einer meisterhaften Abhandlung über die Pyramide (s. Mem. de l'acad. roy. des Scienc. et des bell. letr. de Berlin 1773. p. 149 — 176) einige Relationen zwischen den Coordinaten dreyer Punkte, und zeigt hierauf die Anwendung derselben auf den Hauptgegenstand der Abhandlung, nämlich auf die Analyse der dreyseitigen Pyramide. Abgesehen von diesen Anwendungen, sind aber jene Relationen auch schon an sich merkwürdig, und können in vielen Fällen, vorzüglich in der Theorie der Gleichungen und in einigen Theilen der Mechanik ihren Nutzen haben. Ich habe daher kein Bedenken getragen, sie hier, als an dem schicklichsten Orte, aufzunehmen, und ihren Gebrauch durch einige Aufgaben zu erläutern.

§ 255.

Es seyn x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', die Coordinaten dreyer Punkte, oder überhaupt neun willkührliche Grössen. Aus diesen Grössen formirt man die Ausdrücke, wie sie hier unten in I, II, III, IV, V, VI angegeben werden, indem man, der Kürze und der leichtern Uebersicht wegen, den jedesmal erhaltenen Ausdrücken einzelne Buchstaben substituirt. Es werden alsdann unter diesen Ausdrücken die Relationen statt finden, die in VII, VIII, ..., XX, angegeben sind. Die Art, wie sie daraus hergeleitet werden, findet man weiter unten erklärt.

a) Formirte Ausdrücke.

I.

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \alpha' \qquad x''x''' + y''y''' + z''z''' = \beta'$$
$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \alpha'' \qquad x'x''' + y'y''' + z'z''' = \beta''$$
$$x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = \alpha''' \qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = \beta'''$$

II.

$$y''z''' - z''y''' = \xi' \qquad z''x''' - x''z''' = \eta'$$
$$z'y''' - y'z''' = \xi'' \qquad x'z''' - z'x''' = \eta''$$
$$y'z'' - z'y'' = \xi''' \qquad z'x'' - x'z'' = \eta'''$$
$$x''y''' - y''x''' = \zeta'$$
$$y'x''' - x'y''' = \zeta''$$
$$x'y'' - y'x'' = \zeta'''$$

III.

$$x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x'''$$
$$= \lambda$$

IV.

$$\alpha''\alpha''' - \beta'^2 = a' \qquad \beta''\beta''' - \alpha'\beta' = b'$$
$$\alpha'\alpha''' - \beta''^2 = a'' \qquad \beta'\beta''' - \alpha''\beta'' = b''$$
$$\alpha'\alpha'' - \beta'''^2 = a''' \qquad \beta'\beta'' - \alpha'''\beta''' = b'''$$

V.

$$a''a''' - b'^2 = A' \qquad b''b''' - a'b' = B'$$
$$a'a''' - b''^2 = A'' \qquad b'b''' - a''b'' = B''$$
$$a'a'' - b'''^2 = A''' \qquad b'b'' - a'''b''' = B'''$$

VI.

$$\eta''\zeta''' - \zeta''\eta''' = X' \qquad \zeta''\xi''' - \xi''\zeta''' = Y'$$
$$\zeta'\eta''' - \eta'\zeta''' = X'' \qquad \xi'\zeta''' - \zeta'\xi''' = Y''$$
$$\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' = X''' \qquad \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' = Y'''$$
$$\xi''\eta''' - \eta''\xi''' = Z'$$
$$\eta'\xi''' - \xi'\eta''' = Z''$$
$$\xi'\eta'' - \eta'\xi'' = Z'''$$

b) Relationen.

VII.

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = a' \qquad \xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = b'$$
$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = a'' \qquad \xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = b''$$
$$\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = a''' \qquad \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = b'''$$

VIII.

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = A'$$
$$X''^2 + Y''^2 + Z''^2 = A''$$
$$X'''^2 + Y'''^2 + Z'''^2 = A'''$$
$$X''X''' + Y''Y''' + Z''Z''' = B'$$
$$X'X''' + Y'Y''' + Z'Z''' = B''$$
$$X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' = B'''$$

IX.

$$X' = \lambda x' \qquad Y' = \lambda y' \qquad Z' = \lambda z'$$
$$X'' = \lambda x'' \qquad Y'' = \lambda y'' \qquad Z'' = \lambda z''$$
$$X''' = \lambda x''' \qquad Y''' = \lambda y''' \qquad Z''' = \lambda z'''$$

X.

$$A' = \lambda^2 \alpha' \qquad B' = \lambda^2 \beta'$$
$$A'' = \lambda^2 \alpha'' \qquad B'' = \lambda^2 \beta''$$
$$A''' = \lambda^2 \alpha''' \qquad B''' = \lambda^2 \beta'''$$

XI.

$$\lambda^2 = \alpha'\alpha''\alpha''' + 2\beta'\beta''\beta''' - \alpha'\beta'^2 - \alpha''\beta''^2 - \alpha'''\beta'''^2$$

XII.

$$\lambda^2 = \frac{a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + 2(b'\beta' + b''\beta'' + b'''\beta''')}{3}$$

XIII.

$$\lambda^4 = \frac{A'a' + A''a'' + A'''a''' + 2(B'b' + B''b'' + B'''b''')}{3}$$

für gegebene gerade Linien; alsdann wird aber auch zugleich (C) = o, und die Gleichung (A)x + (B)y + (C)z + (D) = o der gesuchten Ebene verwandelt sich in die Gleichung (A)x + (B)y + (D) = o für die gesuchte Linie. Hierdurch wird also die Aufgabe aufgelöst: wenn n in einer Ebene liegende gerade Linien der Lage nach gegeben sind, den Ort aller der Punkte zu finden, deren jeder die Eigenschaft besitzt, daß, wenn von denselben auf jene Linien die Perpendikel p', p'', p''', rc. herabgelassen werden, immer $m'p' + m''p'' + m'''p'''$ + rc. = q sey. (Ueber diese Aufgabe insbesondere sehe man den Anhang zur *polygonometrie ou de la mesure des figures rectilignes &c. par S. Lhuilier*, Geneve 1789, desgleichen Apollonius ebene Oerter, übers. von Camerer, Leipzig 1796, S. 146 — 171.)

§ 252.

Nach der gewöhnlichen Definition ist die Kugel ein Körper, welcher von einer Fläche begränzt wird, in der alle Punkte von einem gewissen anderen Punkte, welcher der Mittelpunkt genannt wird, gleich weit entfernt sind. Diese Definition analytisch ausgedruckt, giebt unmittelbar die Gleichung der Kugel. Denn bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunktes durch α, β, γ; so ist nach § 245 seine Entfernung von jedem anderen Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, $= \sqrt{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2]}$. Setzt man nun den Halbmesser der Kugel = r, so muß für alle Punkte der Kugelfläche eine solche Beziehung zwischen x, y, z, statt finden, daß dieser Ausdruck = r wird. Man hat also die Gleichung

$$\sqrt{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2]} = r,$$

oder $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2.$$

Setzt man z und $\gamma = o$, so verwandelt sich die Glei-

chung für die Kugel in eine Gleichung für den Kreis. Die Gleichung für den Kreis ist demnach,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Soll eine Gleichung zwischen x, y, z, der Kugel zugehören, so muß sie mit der oben angegebenen identisch seyn, weil sonst nicht für jeden beliebigen Werth zweyer Coordinaten die dritte denselben Werth erhalten könnte. Die Entwickelung der obigen Gleichung für die Kugel giebt aber

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0.$$

Es kann also die Gleichung, welche der Kugel zugehören soll, keine andere Form als diese haben:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ist umgekehrt eine solche Gleichung gegeben, so läßt sich jedesmal die Kugel bestimmen, welcher sie zugehört; denn da sie mit jener identisch seyn muß, so muß seyn

$$-2\alpha = A, \quad -2\beta = B, \quad -2\gamma = C,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = D.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man $\alpha = -\frac{1}{2}A$, $\beta = -\frac{1}{2}B$, $\gamma = -\frac{1}{2}C$, und wenn man diese Werthe in der dritten Gleichung substituirt, $r = \sqrt{\left(\frac{A^2 + B^2 + C^2}{4} - D\right)}$.

Hieraus ergiebt sich zugleich, daß, wenn die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ der Kugel zugehören soll, D nicht größer als $\frac{A^2 + B^2 + C^2}{4}$ seyn darf, weil sonst r imaginär werden würde. Ist $D = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{4}$, so ist $r = 0$, und die Kugel verwandelt sich in einen Punkt.

Alles, was hier von der Kugel gesagt worden, gilt auch mit einigen Abänderungen für den Kreis. Die Gleichung für

den Kreis ist nämlich $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$, oder entwickelt $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2$. Die Gleichung für den Kreis kann also keine andere Form als diese haben,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

und man hat alsdann $\alpha = -\frac{1}{2}A$, $\beta = -\frac{1}{2}B$,

$$r = \sqrt{\left(\frac{A^2 + B^2}{4} - C\right)}.$$

Die nämlichen Resultate würde man aber auch erhalten haben, wenn man in denen für die Kugel C und $z = 0$, und hierauf C anstatt D gesetzt hätte.

§ 253.

Aufg. Es sind n Punkte gegeben: man soll den Ort eines Punktes finden, der so beschaffen ist, daß, wenn von demselben Linien nach den gegebenen Punkten gezogen werden, die Summe der Quadrate aller dieser Linien einem gegebenen Quadrate gleich sey.

Aufl. Es seyen x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', ꝛc. die Coordinaten der gegebenen Punkte, und x, y, z, die Coordinaten des gesuchten Punktes. Es seyen ferner L', L'', L''', ꝛc., die unbekannten Linien, welche aus dem gesuchten Punkte nach den gegebenen gezogen worden, und q^2 das Quadrat, dem die Summe der Quadrate aller dieser Linien gleich seyn soll. Alsdann ist,

$$L'^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$
$$L''^2 = (x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2$$
$$L'''^2 = (x-x''')^2 + (y-y''')^2 + (z-z''')^2$$
ꝛc.

oder entwickelt,

L'² =

$$L'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x'x - 2y'y - 2z'z + x'^2 + y'^2 + z'^2$$
$$L''^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x''x - 2y''y - 2z''z + x''^2 + y''^2 + z''^2$$
$$L'''^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x'''x - 2y'''y - 2z'''z + x'''^2 + y'''^2 + z'''^2, \text{ ꝛc.}$$

Nach der Aufgabe soll aber $L'^2 + L''^2 + L'''^2 + \text{ꝛc.} = q^2$ seyn; man hat also die Gleichung

$$n(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x' + x'' + x''' + \text{ꝛc.})x - 2(y' + y'' + y''' + \text{ꝛc.})y - 2(z' + z'' + z''' + \text{ꝛc.})z + x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \text{ꝛc.} + y'^2 + y''^2 + y'''^2 + \text{ꝛc.} + z'^2 + z''^2 + z'''^2 + \text{ꝛc.} = q^2,$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{n}(x' + x'' + x''' + \text{ꝛc.})x - \frac{2}{n}(y' + y'' + y''' + \text{ꝛc.})y - \frac{2}{n}(z' + z'' + z''' + \text{ꝛc.})z - \frac{1}{n}\left[q^2 - (x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \text{ꝛc.} + y'^2 + y''^2 + y'''^2 + \text{ꝛc.} + z'^2 + z''^2 + z'''^2 + \text{ꝛc.})\right] = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichung erkennet man, daß der gesuchte Ort eine Kugelfläche sey.

Hält man sie mit der allgemeinen Gleichung für die Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0$$

zusammen, so ergiebt sich aus der Vergleichung

$$\alpha = \frac{1}{n}(x' + x'' + x''' + \text{ꝛc.})$$

$$\beta = \frac{1}{n}(y' + y'' + y''' + \text{ꝛc.})$$

$$\gamma = \frac{1}{n}(z' + z'' + z''' + \text{ꝛc.})$$

woraus sich die Coordinaten des Mittelpunktes bestimmen lassen. Der Halbmesser r ergiebt sich aus der Gleichung,

$$r^2 = \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \\ \frac{1}{n}\left[q^2 - (x'^2 + x''^2 + \text{etc.} + y'^2 + y''^2 + \text{etc.} \right. \\ \left. + z'^2 + z''^2 + \text{etc.})\right] \end{array} \right\}$$

Erst. Zus. Vergleicht man die hier für die Coordinaten α, β, γ gefundenen Ausdrücke mit denen, welche in § 249 für die Coordinaten des Schwerpunktes gefunden worden, so ergiebt sich, daß der Mittelpunkt des gesuchten Ortes kein anderer als der Schwerpunkt der gegebenen Punkte sey, wenn man sich diese als gleich schwer denkt.

Zweyte Zus. Da man q jedesmal so bestimmen kann, daß r einen gegebenen Werth erhält, so ergiebt sich der folgende merkwürdige Lehrsatz:

Wenn so viele Punkte, als man will, im Raume gegeben sind, und aus ihrem Schwerpunkte mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugel beschrieben wird, und wenn alsdann aus irgend einem Punkte der Kugelfläche nach den gegebenen Punkten gerade Linien gezogen werden: so ist die Summe der Quadrate aller dieser Linien für jeden Punkt der Kugelfläche immer von einerley Größe.

Dritt. Zus. Aus diesem Satze läßt sich der folgende, als ein einzelner Fall desselben, herleiten:

Wenn so viele Punkte, als man will, in einer Ebene gegeben sind, und aus ihrem Schwerpunkte mit einem beliebigen Halbmesser ein Kreis beschrieben wird, und wenn alsdann aus irgend einem Punkte auf der Peripherie dieses Kreises nach den gegebenen Punkten gerade Linien gezogen werden, so ist die Summe der

Quadrate aller dieser Linien für jeden Punkt der Kreisperipherie immer von einerley Größe.

Anmerk. Den Ort, aber nur für den Kreis und für Punkte, welche in einer Ebene liegen, fand Apollonius (m. s. die oben angef. Uebers. S. 263 — 310) wie sich von selbst verstehet, geometrisch; die Bemerkung Zus. 1, aber nur für den Kreis und für drey Punkte, welche in einer Ebene liegen, machte Fermat in einem Briefe an Roberval (m. s. seine Var. Op. Math. p. 151); der Satz Zus. 3 ist von Huygen (Horologium oscillatorium. Prop. 12); der Satz Zus. 2 ist zwar neu, gereicht mir aber zu keiner Ehre, weil er auf dem analytischen Wege, den ich eingeschlagen habe, leicht zu finden war.

§ 254.

Aufg. Es sind n Punkte gegeben; man soll den Ort eines andern Punktes finden, der so beschaffen ist, daß, wenn von diesem Punkte gerade Linien nach den gegebenen Punkten gezogen werden, und hierauf jedes dieser Quadrate mit einer gewissen gegebenen Zahl multiplicirt wird, die Summe aller hierdurch erhaltenen Producte einer gegebenen Größe gleich sey.

Aufl. Man behalte die Bezeichnungen des vor. §'s bey, und bezeichne noch überdies die Zahlen, durch welche die Quadrate der Linien multiplicirt werden sollen, durch m', m'', m''', ꝛc. Die Bedingungen der Aufgabe analytisch ausgedrückt, geben alsdenn die Gleichung

$$m'L'^2 + m''L''^2 + m'''L'''^2 + \text{ꝛc.} = q^2.$$

Werden hierin für L'^2, L''^2, L'''^2, ꝛc., ihre Werthe aus dem vor. § substituirt, so erhält man die Gleichung

$$(m' + m'' + m''' + \text{rc.})(x^2 + y^2 + z^2) -$$
$$2(m'x' + m''x'' + m'''x''' + \text{rc.})x - 2(m'y' + m''y'' + m'''y''' + \text{rc.})y$$
$$- 2(m'z' + m''z'' + m'''z''' + \text{rc.})z + m'x'^2 + m''x''^2 + m'''x'''^2$$
$$+ \text{rc.} + m'y'^2 + m''y''^2 + m'''y'''^2 + \text{rc.} +$$
$$m'z'^2 + m''z''^2 + m'''z'''^2 + \text{rc.} - q^2 = 0.$$

Wird diese Gleichung durch $m' + m'' + m''' + \text{rc.}$ dividirt, so erhält sie die Form einer Gleichung für die Kugel, und man findet

$$\alpha = \frac{m'x' + m''x'' + m'''x''' + \text{rc.}}{m' + m'' + m''' + \text{rc.}}$$

$$\beta = \frac{m'y' + m''y'' + m'''y''' + \text{rc.}}{m' + m'' + m''' + \text{rc.}}$$

$$\gamma = \frac{m'z' + m''z'' + m'''z''' + \text{rc.}}{m' + m'' + m''' + \text{rc.}}$$

woraus sich ferner der Ausdruck für r finden läßt.

Zus. Denkt man sich unter m', m'', m''', rc., Massen anstatt Zahlen; so sind (§ 250) α, β, γ, die Coordinaten ihres Schwerpunktes. Hieraus ergiebt sich der folgende höchst merkwürdige Satz:

Wenn so viele schwere Punkte als man will, von gleichem oder ungleichem Gewichte, im Raume gegeben sind, und aus dem Schwerpunkte derselben mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugel beschrieben wird; wenn ferner aus irgend einem Punkte der Kugelfläche nach jenen Punkten gerade Linien gezogen werden, und das Quadrat einer jeden dieser Linien mit dem Gewichte des Punktes, nach welchem sie gezogen ist, multiplicirt wird: so ist die Summe dieser Produkte für alle Punkte der Kugelfläche von einerley Größe.

XVI. Relationen zwischen den Coordinaten dreyer Punkte. Gebrauch derselben bei der Auflösung einiger, die dreyseitigen Pyramiden betreffenden Aufgaben.

Der berühmte Lagrange, dessen Bekanntschaft zu machen wir hier zuerst Gelegenheit haben, giebt in einer meisterhaften Abhandlung über die Pyramide (s. Mem. de l'acad. roy. des Scienc. et des bell. lett. de Berlin 1773. p. 149 — 176) einige Relationen zwischen den Coordinaten dreyer Punkte, und zeigt hierauf die Anwendung derselben auf den Hauptgegenstand der Abhandlung, nämlich auf die Analyse der dreyseitigen Pyramide. Abgesehen von diesen Anwendungen, sind aber jene Relationen auch schon an sich merkwürdig, und können in vielen Fällen, vorzüglich in der Theorie der Gleichungen und in einigen Theilen der Mechanik ihren Nutzen haben. Ich habe daher kein Bedenken getragen, sie hier, als an dem schicklichsten Orte, aufzunehmen, und ihren Gebrauch durch einige Aufgaben zu erläutern.

§ 255.

Es seyn x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', die Coordinaten dreyer Punkte, oder überhaupt neun willkührliche Größen. Aus diesen Größen formire man die Ausdrücke, wie sie hier unten in I, II, III, IV, V, VI angegeben werden, indem man, der Kürze und der leichtern Uebersicht wegen, den jedesmal erhaltenen Ausdrücken einzelne Buchstaben substituirt. Es werden alsdann unter diesen Ausdrücken die Relationen statt finden, die in VII, VIII, ..., XX, angegeben sind. Die Art, wie sie daraus hergeleitet werden, findet man weiter unten erklärt.

a) Formirte Ausdrücke.

I.

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \alpha' \qquad x''x''' + y''y''' + z''z''' = \beta'$$
$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \alpha'' \qquad x'x''' + y'y''' + z'z''' = \beta''$$
$$x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = \alpha''' \qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = \beta'''$$

II.

$$y''z''' - z''y''' = \xi' \qquad z''x''' - x''z''' = \eta'$$
$$z'y''' - y'z''' = \xi'' \qquad x'z''' - z'x''' = \eta''$$
$$y'z'' - z'y'' = \xi''' \qquad z'x'' - x'z'' = \eta'''$$
$$x''y''' - y''x''' = \zeta'$$
$$y'x''' - x'y''' = \zeta''$$
$$x'y'' - y'x'' = \zeta'''$$

III.

$$x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x'''$$
$$= \lambda$$

IV.

$$\alpha''\alpha''' - \beta'^2 = a' \qquad \beta''\beta''' - \alpha'\beta' = b'$$
$$\alpha'\alpha''' - \beta''^2 = a'' \qquad \beta'\beta''' - \alpha''\beta'' = b''$$
$$\alpha'\alpha'' - \beta'''^2 = a''' \qquad \beta'\beta'' - \alpha'''\beta''' = b'''$$

V.

$$a''a''' - b'^2 = A' \qquad b''b''' - a'b' = B'$$
$$a'a''' - b''^2 = A'' \qquad b'b''' - a''b'' = B''$$
$$a'a'' - b'''^2 = A''' \qquad b'b'' - a'''b''' = B'''$$

VI.

$$\eta''\zeta''' - \zeta''\eta''' = X' \qquad \zeta''\xi''' - \xi''\zeta''' = Y'$$
$$\zeta'\eta''' - \eta'\zeta''' = X'' \qquad \xi'\zeta''' - \zeta'\xi''' = Y''$$
$$\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' = X''' \qquad \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' = Y'''$$
$$\xi''\eta''' - \eta''\xi''' = Z'$$
$$\eta'\xi''' - \xi'\eta''' = Z''$$
$$\xi'\eta'' - \eta'\xi'' = Z'''$$

b) Relationen.

VII.

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = a' \qquad \xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = b'$$
$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = a'' \qquad \xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = b''$$
$$\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = a''' \qquad \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = b'''$$

VIII.

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = A'$$
$$X''^2 + Y''^2 + Z''^2 = A''$$
$$X'''^2 + Y'''^2 + Z'''^2 = A'''$$
$$X''X''' + Y''Y''' + Z''Z''' = B'$$
$$X'X''' + Y'Y''' + Z'Z''' = B''$$
$$X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' = B'''$$

IX.

$$X' = \lambda x' \qquad Y' = \lambda y' \qquad Z' = \lambda z'$$
$$X'' = \lambda x'' \qquad Y'' = \lambda y'' \qquad Z'' = \lambda z''$$
$$X''' = \lambda x''' \qquad Y''' = \lambda y''' \qquad Z''' = \lambda z'''$$

X.

$$A' = \lambda^2 \alpha' \qquad B' = \lambda^2 \beta'$$
$$A'' = \lambda^2 \alpha'' \qquad B'' = \lambda^2 \beta''$$
$$A''' = \lambda^2 \alpha''' \qquad B''' = \lambda^2 \beta'''$$

XI.

$$\lambda^2 = \alpha'\alpha''\alpha''' + 2\beta'\beta''\beta''' - \alpha'\beta'^2 - \alpha''\beta''^2 - \alpha'''\beta'''^2$$

XII.

$$\lambda^3 = \frac{a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + 2(b'\beta' + b''\beta'' + b'''\beta''')}{3}$$

XIII.

$$\lambda^4 = \frac{A'a' + A''a'' + A'''a''' + 2(B'b' + B''b'' + B'''b''')}{3}$$

XIV.

$$\lambda^4 = a'a''a''' + 2b'b''b''' - a'b'^2 - a''b''^2 - a'''b'''^2$$

XV.

$$\lambda^2 = \xi'\eta''\zeta''' + \eta'\zeta''\xi''' + \zeta'\xi''\eta''' - \xi'\zeta''\eta''' - \eta'\xi''\zeta''' - \zeta'\eta''\xi'''$$

XVI.

$$\alpha' = \frac{A'}{\lambda^2} \qquad \beta' = \frac{B'}{\lambda^2}$$

$$\alpha'' = \frac{A''}{\lambda^2} \qquad \beta'' = \frac{B''}{\lambda^2}$$

$$\alpha''' = \frac{A'''}{\lambda^2} \qquad \beta''' = \frac{B'''}{\lambda^2}$$

XVII.

$$x'\xi' + x''\xi'' + x'''\xi''' = \lambda \qquad y'\xi' + y''\xi'' + y'''\xi''' = 0$$

$$x'\eta' + x''\eta'' + x'''\eta''' = 0 \qquad y'\eta' + y''\eta'' + y'''\eta''' = \lambda$$

$$x'\zeta' + x''\zeta'' + x'''\zeta''' = 0 \qquad y'\zeta' + y''\zeta'' + y'''\zeta''' = 0$$

$$z'\xi' + z''\xi'' + z'''\xi''' = 0$$

$$z'\eta' + z''\eta'' + z'''\eta''' = 0$$

$$z'\zeta' + z''\zeta'' + z'''\zeta''' = \lambda$$

XVIII.

$$x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta' = \lambda \qquad x''\xi' + y''\eta' + z''\zeta' = 0$$

$$x'\xi'' + y'\eta'' + z'\zeta'' = 0 \qquad x''\xi'' + y''\eta'' + z''\zeta'' = \lambda$$

$$x'\xi''' + y'\eta''' + z'\zeta''' = 0 \qquad x''\xi''' + y''\eta''' + z''\zeta''' = 0$$

$$x'''\xi' + y'''\eta' + z'''\zeta' = 0$$

$$x'''\xi'' + y'''\eta'' + z'''\zeta'' = 0$$

$$x'''\xi''' + y'''\eta''' + z'''\zeta''' = \lambda$$

XIX.

$$\xi' = \frac{a'x' + b'''x'' + b''x'''}{\lambda} \qquad \eta' = \frac{a'y' + b'''y'' + b''y'''}{\lambda}$$

$$\xi'' = \frac{b'''x' + a''x'' + b'x'''}{\lambda} \qquad \eta'' = \frac{b'''y' + a''y'' + b'y'''}{\lambda}$$

$$\xi''' = \frac{b''x' + b'x'' + a'''x'''}{\lambda} \qquad \eta''' = \frac{b''y' + b'y'' + a'''y'''}{\lambda}$$

$$\zeta' = \frac{a'z' + b'''z'' + b''z'''}{\lambda}$$

$$\zeta'' = \frac{b'''z' + a''z'' + b'z'''}{\lambda}$$

$$\zeta''' = \frac{b''z' + b'z'' + a'''z'''}{\lambda}$$

XX.

$$x' = \frac{\alpha'\xi' + \beta'''\xi'' + \beta''\xi'''}{\lambda} \qquad y' = \frac{\alpha'\eta' + \beta'''\eta'' + \beta''\eta'''}{\lambda}$$

$$x'' = \frac{\beta'''\xi' + \alpha''\xi'' + \beta'\xi'''}{\lambda} \qquad y'' = \frac{\beta'''\eta' + \alpha''\eta'' + \beta'\eta'''}{\lambda}$$

$$x''' = \frac{\beta''\xi' + \beta'\xi'' + \alpha'''\xi'''}{\lambda} \qquad y''' = \frac{\beta''\eta' + \beta'\eta'' + \alpha'''\eta'''}{\lambda}$$

$$z' = \frac{\alpha'\zeta' + \beta'''\zeta'' + \beta''\zeta'''}{\lambda}$$

$$z'' = \frac{\beta'''\zeta' + \alpha''\zeta'' + \beta'\zeta'''}{\lambda}$$

$$z''' = \frac{\beta''\zeta' + \beta'\zeta'' + \alpha'''\zeta'''}{\lambda}$$

c) Art der Herleitung.

1) Da $a' = \alpha''\alpha''' - \beta'^2$ (IV.); so ist, wenn für α'', α''', β', ihre Werthe aus I. substituirt werden, $a' = y''^2 z'''^2 - 2y''y'''z''z''' + z''^2 y'''^2 + z''^2 x'''^2 - 2x''x'''z''z''' + x''^2 z'''^2 + x''^2 y'''^2 - 2x''x'''y''y''' + y''^2 x'''^2 = (y''z''' - z''y''')^2 + (z''x''' - x''z''')^2 + (x''y''' - y''x''')^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ (II.).

Da ferner $b' = \beta''\beta''' - \alpha'\beta'$ (IV.); so ist, wenn man für α', β', β'', β''', ihre Werthe aus I. substituirt, $b' = y'y'''z'z'' - y'^2 z''z''' - y''y'''z'^2 + y'y''z'z''' + x'x''z'z''' - x'^2 z''z''' - x''x'''z'^2 + x'x'''z'z'' + x'x'''y'y'' - x'^2 y''y''' - x''x'''y'^2 + x'x''y'y''' = (z'y''' - y'z''')(y'z'' - z'y'') + (x'z''' - z'x''')(z'x'' - x'z'') + (y'x''' - x'y''')(x'y'' - y'x'') = \xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta'''$ (II.).

Man hat also die beiden Relationen in VII, welche sich in der ersten Horizontalreihe befinden. Auf eine ähnliche Art lassen sich die übrigen daselbst angegebenen finden.

2) Vergleicht man I, II, IV, mit VII, VI, V; so zeigt sich, daß die Größen X', X'', X''', Y', Y'', ꝛc., A', A'', A''', B', B'', B''', auf die nämliche Art aus ξ', ξ'', ξ''', η', η'', ꝛc. zusammengesetzt sind, als die Größen ξ', ξ'', ξ''', η', η'', ꝛc. a', a'', a''', b', b'', b''', aus x', x'', x''', y', y'', ꝛc. Es müssen daher zwischen jenen Größen die nämlichen Relationen statt finden, als zwischen diesen. Man kann daher auch in den Relationen VII. die Größen ξ', ξ'', ξ''', η', ꝛc., mit X', X'', X''', Y', ꝛc., desgleichen a', a'', a''', b', b'', b''', mit A', A'', A''', B', B'', B''', vertauschen, wodurch man die Relationen VIII. erhält.

3) Wenn man in den Gleichungen VI. für die Größen ξ',

x'', x''', y', rc., ihre Werthe aus II. substituirt; so erhält man mit Hülfe von III. die Relationen IX.

4) Substituirt man in der Gleichung $A' = X'^2 + Y'^2 + Z'^2$ (VIII.) für X', Y', Z', ihre Werthe aus IX, so erhält man $A' = \lambda^2 x'^2 + \lambda^2 y'^2 + \lambda^2 z'^2 = \lambda^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2)$, oder (I.) $A' = \lambda^2 \alpha'$, welches die erste Relation in X. ist. Die übrigen erhält man eben so aus VIII. vermittelst der Relationen IX. und I.

5) Aus X. erhält man $\lambda^2 = \frac{A'}{\alpha'}$; oder, wenn für A' sein Werth aus V. substituirt wird, $\lambda^2 = \frac{a''a''' - b'^2}{\alpha'}$. Werden hierin für a'', a''', b', ihre Werthe aus IV. gesetzt, so erhält man den in XI. für λ^2 angegebenen Ausdruck. Den nämlichen Ausdruck würde man auch aus jeder anderen Gleichung in X. erhalten haben.

6) Multiplicirt man die Gleichungen der ersten Vertikal-Columne in IV. nach der Ordnung, wie sie unter einander stehen, durch α', α'', α''', ferner die in der zweyten Vertikal-Columne durch $2\beta'$, $2\beta''$, $2\beta'''$, und addirt hierauf alles zusammen; so erhält man $3\alpha'\alpha''\alpha''' + 6\beta'\beta''\beta''' - 3\alpha'\beta'^2 - 3\alpha''\beta''^2 - 3\alpha'''\beta'''^2 = a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + 2(b'\beta' + b''\beta'' + b'''\beta''')$. Der erste Theil dieser Gleichung ist $= 3\lambda^2$ (XI.). Man hat also $3\lambda^2 = a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + 2(b'\beta' + b''\beta'' + b'''\beta''')$, und hieraus den in XII. angegebenen Ausdruck.

7) Multiplicirt man die Gleichung XII. mit λ^2, und setzt hierauf für $\lambda^2\alpha'$, $\lambda^2\alpha''$, $\lambda^2\alpha'''$, $\lambda^2\beta'$, $\lambda^2\beta''$, $\lambda^2\beta'''$, ihre Werthe aus X, so erhält man die Gleichung XIII.

8) Substituirt man in XIII. den Größen A', A'', A''',

B', B'', B''', ihre Werthe aus V, so erhält man die Gleichung in XIV.

Aus der Vergleichung von XI. und XIV. ergiebt sich, daß λ^2 und λ^4 ähnliche Ausdrücke haben, jenes in α', α'', α''', β', β'', β''', dieses in a', a'', a''', b', b'', b'''.

9) Werden die Werthe von λ aus III. und IX. einander gleich gesetzt, so erhält man

$$x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x''' = \sqrt{(\alpha'\alpha''\alpha''' + 2\beta'\beta''\beta''' - \alpha'\beta'^2 - \alpha''\beta''^2 - \alpha'''\beta'''^2)}.$$

Aus I. und VII. erhellet aber, daß die Größen x', x'', x''', y', y'', y''', z', z'', z''', α', α'', α''', β', β'', β''', die nämliche Beziehung gegen einander haben, als die Größen ξ', ξ'', ξ''', η', η'', η''', ζ', ζ'', ζ''', a', a'', a''', b', b'', b'''; man kann also auch jene mit diesen vertauschen, und alsdann erhält man $\xi'\eta''\zeta''' + \eta'\zeta''\xi''' + \zeta'\xi''\eta''' - \xi'\zeta''\eta''' - \eta'\xi''\zeta''' - \zeta'\eta''\xi''' = \sqrt{(a'a''a''' + 2b'b''b''' - a'b'^2 - a''b''^2 - a'''b'''^2)}$. Der Theil zur Rechten dieser Gleichung ist $= \lambda^2$ (XIV.); woraus sich die Gleichung XV. ergiebt.

10) Die Relationen XVI. ergeben sich unmittelbar aus denen in X. Sie können dazu dienen, die Größen α', α'', α''', β', β'', β''', aus a', a'', a''', b', b'', b''', zu bestimmen, wenn diese gegeben sind; denn die Größen A', A'', A''', B', B'', B''' hat man aus V. und λ^2 aus XIV.

11) Die Gleichungen XVII. erhält man aus denen in II, wenn man diese mit x', x'', x''', y', y'', y''', z', z'', z''', in einer leicht zu erkennenden Ordnung multiplicirt.

12) Eben so erhält man die Gleichungen XVIII.

13) Multiplicirt man die Gleichungen der ersten Vertikal-Columne in XVII. mit ξ', η', ζ', und zwar die erste mit ξ', die zweite mit η', und die dritte mit ζ', und addiret die

Produkte zusammen, so erhält man $x'(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + x''(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'') + x'''(\xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''') = \lambda\xi'$, oder (VII.) $a'x' + b'''x'' + b''x''' = \lambda\xi'$, also $\xi' = \frac{a'x' + b'''x'' + b''x'''}{\lambda}$; welches die erste Gleichung der ersten Vertikal-Columne in XIX. ist. Die beyden anderen Gleichungen erhält man eben so, wenn man nur mit ξ'', η'', ζ'', und hierauf mit ξ''', η''', ζ''', auf die nämliche Art wie vorher mit ξ', η', ζ', multiplicirt. Auf die nämliche Art, wie hier die erste Vertikal-Columne in XIX. aus der in XVII. abgeleitet worden, kann man auch die beyden anderen Vertikal-Columnen von einander ableiten.

14) Multiplicirt man hingegen die erste Horizontalreihe der Gleichungen in XVII. mit x', y', z', nämlich die erste mit x', die zweite mit y', die dritte mit z', und addiret hierauf alles zusammen, so erhält man $\xi'(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \xi''(x'x'' + y'y'' + z'z'') + \xi'''(x'x''' + y'y''' + z'z''') = \lambda x'$, oder, (I.) $\alpha'\xi' + \beta'''\xi'' + \beta''\xi''' = \lambda x'$; also

$$x' = \frac{\alpha'\xi' + \beta'''\xi'' + \beta''\xi'''}{\lambda};$$

und dies ist die erste Gleichung in XX. Eben so erhält man, wenn mit x'', y'', z'', und x''', y''', z''', multiplicirt wird, die beyden anderen Gleichungen der ersten Vertikal-Columne in XX. Verfährt man mit den beyden anderen Horizontalreihen von Gleichungen in XVII. eben so, wie hier mit der ersten geschehen ist, so erhält man die beyden anderen Vertikal-Columnen in XX.

§ 256.

Aufg. Die Kanten einer dreyseitigen Pyramide aus den Coordinaten ihrer Eckpunkte zu finden.

Aufl. Es sey $AM'M''M'''$ (Fig. 115) irgend eine Pyramide, und eine ihrer Ecken, etwa A, für die Spitze und zugleich für den Anfangspunkt der Coordinaten angenommen. Es seyen ferner x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', die Coordinaten der drey Eckpunkte M', M'', M'''. Alsdann hat man nach § 244 und § 255. I.

$$AM' = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)} = \sqrt{\alpha'}$$
$$AM'' = \sqrt{(x''^2 + y''^2 + z''^2)} = \sqrt{\alpha''}$$
$$AM''' = \sqrt{(x'''^2 + y'''^2 + z'''^2)} = \sqrt{\alpha'''}$$

$$M'M'' = \sqrt{[(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2]}$$
$$= \sqrt{(\alpha' + \alpha'' - 2\beta''')}$$
$$M'M''' = \sqrt{[(x' - x''')^2 + (y' - y''')^2 + (z' - z''')^2]}$$
$$= \sqrt{(\alpha' + \alpha''' - 2\beta'')}$$
$$M''M''' = \sqrt{[(x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 + (z'' - z''')^2]}$$
$$= \sqrt{(\alpha'' + \alpha''' - 2\beta')}$$

Bezeichnet man daher die Seitenlinien AM', AM'', AM''', durch k', k'', k''', und die Seiten der Grundfläche $M'M''$, $M'M'''$, $M''M'''$ durch $\sqrt{l'}$, $\sqrt{l''}$, $\sqrt{l'''}$, so hat man,

$$k' = \sqrt{\alpha'},\quad k'' = \sqrt{\alpha''},\quad k''' = \sqrt{\alpha'''},$$
$$l' = \alpha' + \alpha'' - 2\beta''',\quad l'' = \alpha' + \alpha''' - 2\beta'',$$
$$l''' = \alpha'' + \alpha''' - 2\beta'.$$

Zus. Aus den drey letzten Gleichungen erhält man,

$$\beta' = \frac{\alpha'' + \alpha''' - l'''}{2},\quad \beta'' = \frac{\alpha' + \alpha''' - l''}{2},$$
$$\beta''' = \frac{\alpha' + \alpha'' - l'}{2},$$

welche Ausdrücke in der Folge von Nutzen seyn werden. Man

muß hierbey nicht vergessen, daß l', l'', l''', nicht die Seiten der Grundfläche selbst, sondern ihre Quadrate bezeichnen.

§ 257.

Aufg. Die Gränzflächen einer dreyseitigen Pyramide durch die Coordinaten ihrer Eckpunkte auszudrücken.

Aufg. Wenn f, g, h, die drei Seiten eines Dreyeckes bezeichnen, so ist, wie bekannt, der Inhalt desselben $= \frac{1}{4}\sqrt{[4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2]}$. Um daher den Inhalt des Dreyeckes $AM'M''$ zu finden, muß man (§ 256) $f = \sqrt{\alpha'}$, $g = \sqrt{\alpha''}$, $h = \sqrt{(\alpha' + \alpha'' - 2\beta''')}$ setzen; dies giebt $\triangle AM'M'' = \frac{1}{4}\sqrt{(4\alpha'\alpha'' - 4\beta'''^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha'\alpha'' - \beta'''^2)}$ $=$ (§ 255 IV.) $\frac{\sqrt{a'''}}{2}$. Eben so findet man $\triangle AM'M'''$ $= \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha'\alpha''' - \beta''^2)} = \frac{\sqrt{a''}}{2}$, und $\triangle AM''M''' =$ $\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha''\alpha''' - \beta'^2)} = \frac{\sqrt{a'}}{2}$. Bezeichnet man daher die Seitenflächen $AM'M''$, $AM'M'''$, $AM''M'''$ durch f', f'', f''', so ist,

$$f' = \frac{\sqrt{a'''}}{2},\ f'' = \frac{\sqrt{a''}}{2},\ f''' = \frac{\sqrt{a'}}{2}.$$

Es bleibt nun noch übrig, die Grundfläche $M'M''M'''$ zu berechnen, deren Seiten (§ 256) $\sqrt{l'}$, $\sqrt{l''}$, $\sqrt{l'''}$ sind. Substituirt man diese Werthe für f, g, h, so erhält man, wenn $\triangle M'M''M''' = q$ gesetzt wird,

$$q = \frac{1}{4}\sqrt{[4l'l'' - (l' + l'' - l''')^2]},$$

oder

$$16q^2 = 4l'l'' - (l' + l'' - l''')^2.$$

Hierin setze man für l', l'', l''', ihre Werthe aus dem vor. §; dies giebt,

a) Formirte Ausdrücke.

I.

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \alpha'$ $\quad$ $x''x''' + y''y''' + z''z''' = \beta'$

$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \alpha''$ $\quad$ $x'x''' + y'y''' + z'z''' = \beta''$

$x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = \alpha'''$ $\quad$ $x'x'' + y'y'' + z'z'' = \beta'''$

II.

$y''z''' - z''y''' = \xi'$ $\quad$ $z''x''' - x''z''' = \eta'$

$z'y''' - y'z''' = \xi''$ $\quad$ $x'z''' - z'x''' = \eta''$

$y'z'' - z'y'' = \xi'''$ $\quad$ $z'x'' - x'z'' = \eta'''$

$x''y''' - y''x''' = \zeta'$

$y'x''' - x'y''' = \zeta''$

$x'y'' - y'x'' = \zeta'''$

III.

$$x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x''' = \lambda$$

IV.

$\alpha''\alpha''' - \beta'^2 = a'$ $\quad$ $\beta''\beta''' - \alpha'\beta' = b'$

$\alpha'\alpha''' - \beta''^2 = a''$ $\quad$ $\beta'\beta''' - \alpha''\beta'' = b''$

$\alpha'\alpha'' - \beta'''^2 = a'''$ $\quad$ $\beta'\beta'' - \alpha'''\beta''' = b'''$

V.

$a''a''' - b'^2 = A'$ $\quad$ $b''b''' - a'b' = B'$

$a'a''' - b''^2 = A''$ $\quad$ $b'b''' - a''b'' = B''$

$a'a'' - b'''^2 = A'''$ $\quad$ $b'b'' - a'''b''' = B'''$

VI.

$\eta''\zeta''' - \zeta''\eta''' = X'$ $\quad$ $\zeta''\xi''' - \xi''\zeta''' = Y'$

$\zeta'\eta''' - \eta'\zeta''' = X''$ $\quad$ $\xi'\zeta''' - \zeta'\xi''' = Y''$

$\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' = X'''$ $\quad$ $\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' = Y'''$

$\xi''\eta''' - \eta''\xi''' = Z'$

$\eta'\xi''' - \xi'\eta''' = Z''$

$\xi'\eta'' - \eta'\xi'' = Z'''$

b) Relationen.

VII.

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = a' \qquad \xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = b'$$
$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = a'' \qquad \xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = b''$$
$$\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = a''' \qquad \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = b'''$$

VIII.

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = A'$$
$$X''^2 + Y''^2 + Z''^2 = A''$$
$$X'''^2 + Y'''^2 + Z'''^2 = A'''$$
$$X''X''' + Y''Y''' + Z''Z''' = B'$$
$$X'X''' + Y'Y''' + Z'Z''' = B''$$
$$X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' = B'''$$

IX.

$$X' = \lambda x' \qquad Y' = \lambda y' \qquad Z' = \lambda z'$$
$$X'' = \lambda x'' \qquad Y'' = \lambda y'' \qquad Z'' = \lambda z''$$
$$X''' = \lambda x''' \qquad Y''' = \lambda y''' \qquad Z''' = \lambda z'''$$

X.

$$A' = \lambda^2 \alpha' \qquad B' = \lambda^2 \beta'$$
$$A'' = \lambda^2 \alpha'' \qquad B'' = \lambda^2 \beta''$$
$$A''' = \lambda^2 \alpha''' \qquad B''' = \lambda^2 \beta'''$$

XI.

$$\lambda^2 = \alpha'\alpha''\alpha''' + 2\beta'\beta''\beta''' - \alpha'\beta'^2 - \alpha''\beta''^2 - \alpha'''\beta'''^2$$

XII.

$$\lambda^2 = \frac{a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + 2(b'\beta' + b''\beta'' + b'''\beta''')}{3}$$

XIII.

$$\lambda^4 = \frac{A'a' + A''a'' + A'''a''' + 2(B'b' + B''b'' + B'''b''')}{3}$$

XIV.

$$\lambda^4 = a'a''a''' + 2b'b''b''' - a'b'^2 - a''b''^2 - a'''b'''^2$$

XV.

$$\lambda^2 = \xi'\eta''\zeta''' + \eta'\zeta''\xi''' + \zeta'\xi''\eta''' - \xi'\zeta''\eta''' - \eta'\xi''\zeta''' - \zeta'\eta''\xi'''$$

XVI.

$$\alpha' = \frac{A'}{\lambda^2} \qquad \beta' = \frac{B'}{\lambda^2}$$
$$\alpha'' = \frac{A''}{\lambda^2} \qquad \beta'' = \frac{B''}{\lambda^2}$$
$$\alpha''' = \frac{A'''}{\lambda^2} \qquad \beta''' = \frac{B'''}{\lambda^2}$$

XVII.

$$x'\xi' + x''\xi'' + x'''\xi''' = \lambda \qquad y'\xi' + y''\xi'' + y'''\xi''' = 0$$
$$x'\eta' + x''\eta'' + x'''\eta''' = 0 \qquad y'\eta' + y''\eta'' + y'''\eta''' = \lambda$$
$$x'\zeta' + x''\zeta'' + x'''\zeta''' = 0 \qquad y'\zeta' + y''\zeta'' + y'''\zeta''' = 0$$
$$z'\xi' + z''\xi'' + z'''\xi''' = 0$$
$$z'\eta' + z''\eta'' + z'''\eta''' = 0$$
$$z'\zeta' + z''\zeta'' + z'''\zeta''' = \lambda$$

XVIII.

$$x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta' = \lambda \qquad x''\xi' + y''\eta' + z''\zeta' = 0$$
$$x'\xi'' + y'\eta'' + z'\zeta'' = 0 \qquad x''\xi'' + y''\eta'' + z''\zeta'' = \lambda$$
$$x'\xi''' + y'\eta''' + z'\zeta''' = 0 \qquad x''\xi''' + y''\eta''' + z''\zeta''' = 0$$
$$x'''\xi' + y'''\eta' + z'''\zeta' = 0$$
$$x'''\xi'' + y'''\eta'' + z'''\zeta'' = 0$$
$$x'''\xi''' + y'''\eta''' + z'''\zeta''' = \lambda$$

XIX.

$$\xi' = \frac{a'x' + b'''x'' + b''x'''}{\lambda} \qquad \eta' = \frac{a'y' + b'''y'' + b''y'''}{\lambda}$$

$$\xi'' = \frac{b'''x' + a''x'' + b'x'''}{\lambda} \qquad \eta'' = \frac{b'''y' + a''y'' + b'y'''}{\lambda}$$

$$\xi''' = \frac{b''x' + b'x'' + a'''x'''}{\lambda} \qquad \eta''' = \frac{b''y' + b'y'' + a'''y'''}{\lambda}$$

$$\zeta' = \frac{a'z' + b'''z'' + b''z'''}{\lambda}$$

$$\zeta'' = \frac{b'''z' + a''z'' + b'z'''}{\lambda}$$

$$\zeta''' = \frac{b''z' + b'z'' + a'''z'''}{\lambda}$$

XX.

$$x' = \frac{\alpha'\xi' + \beta'''\xi'' + \beta''\xi'''}{\lambda} \qquad y' = \frac{\alpha'\eta' + \beta'''\eta'' + \beta''\eta'''}{\lambda}$$

$$x'' = \frac{\beta'''\xi' + \alpha''\xi'' + \beta'\xi'''}{\lambda} \qquad y'' = \frac{\beta'''\eta' + \alpha''\eta'' + \beta'\eta'''}{\lambda}$$

$$x''' = \frac{\beta''\xi' + \beta'\xi'' + \alpha'''\xi'''}{\lambda} \qquad y''' = \frac{\beta''\eta' + \beta'\eta'' + \alpha'''\eta'''}{\lambda}$$

$$z' = \frac{\alpha'\zeta' + \beta'''\zeta'' + \beta''\zeta'''}{\lambda}$$

$$z'' = \frac{\beta'''\zeta' + \alpha''\zeta'' + \beta'\zeta'''}{\lambda}$$

$$z''' = \frac{\beta''\zeta' + \beta'\zeta'' + \alpha'''\zeta'''}{\lambda}$$

c) Art der Herleitung.

1) Da $a' = \alpha''\alpha''' - \beta'^2$ (IV.); so ist, wenn für α'', α''', β', ihre Werthe aus I. substituirt werden, $a' = y''^2z'''^2 - 2y''y'''z''z''' + z''^2y'''^2 + z''^2x'''^2 - 2x''x'''z''z''' + x''^2z'''^2 + x''^2y'''^2 - 2x''x'''y''y''' + y''^2x'''^2 = (y''z''' - z''y''')^2 + (z''x''' - x''z''')^2 + (x''y''' - y''x''')^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ (II.).

Da ferner $b' = \beta''\beta''' - \alpha'\beta'$ (IV.); so ist, wenn man für α', β', β'', β''', ihre Werthe aus I. substituirt, $b' = y'y'''z'z'' - y'^2z''z''' - y''y'''z'^2 + y'y''z'z''' + x'x''z'z''' - x'^2z''z''' - x''x'''z'^2 + x'x'''z'z'' + x'x'''y'y'' - x'^2y''y''' - x''x'''y'^2 + x'x''y'y''' = (z'y''' - y'z''')(y'z'' - z'y'') + (x'z''' - z'x''')(z'x'' - x'z'') + (y'x''' - x'y''')(x'y'' - y'x'') = \xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta'''$ (II.).

Man hat also die beiden Relationen in VII, welche sich in der ersten Horizontalreihe befinden. Auf eine ähnliche Art lassen sich die übrigen daselbst angegebenen finden.

2) Vergleicht man I., II, IV, mit VII, VI, V; so zeigt sich, daß die Größen X', X'', X''', Y', Y'', rc., A', A'', A''', B', B'', B''', auf die nämliche Art aus ξ', ξ'', ξ''', η', η'', rc. zusammengesetzt sind, als die Größen ξ', ξ'', ξ''', η', η'', rc. a', a'', a''', b', b'', b''', aus x', x'', x''', y', y'', rc. Es müssen daher zwischen jenen Größen die nämlichen Relationen statt finden, als zwischen diesen. Man kann daher auch in den Relationen VII. die Größen ξ', ξ'', ξ''', η', rc., mit X', X'', X''', Y', rc., desgleichen a', a'', a''', b', b'', b''', mit A', A'', A''', B', B'', B''', vertauschen, wodurch man die Relationen VIII, erhält.

3) Wenn man in den Gleichungen VI. für die Größen ξ',

ξ'', ξ''', v', ꝛc., ihre Werthe aus II. substituirt; so erhält man mit Hülfe von III. die Relationen IX.

4) Substituirt man in der Gleichung $A' = X'^2 + Y'^2 + Z'^2$ (VIII.) für X', Y', Z', ihre Werthe aus IX, so erhält man $A' = \lambda^2 x'^2 + \lambda^2 y'^2 + \lambda^2 z'^2 = \lambda^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2)$, oder (I.) $A' = \lambda^2 \alpha'$, welches die erste Relation in X. ist. Die übrigen erhält man eben so aus VIII. vermittelst der Relationen IX. und I.

5) Aus X. erhält man $\lambda^2 = \frac{A'}{\alpha'}$; oder, wenn für A' sein Werth aus V. substituirt wird, $\lambda^2 = \frac{a''a''' - b'^2}{\alpha'}$. Werden hierin für a'', a''', b', ihre Werthe aus IV. gesetzt, so erhält man den in XI. für λ^2 angegebenen Ausdruck. Den nämlichen Ausdruck würde man auch aus jeder anderen Gleichung in X. erhalten haben.

6) Multiplicirt man die Gleichungen der ersten Vertikal-Columne in IV. nach der Ordnung, wie sie unter einander stehen, durch α', α'', α''', ferner die in der zweyten Vertikal-Columne durch $2\beta'$, $2\beta''$, $2\beta'''$, und addirt hierauf alles zusammen; so erhält man $3\alpha'\alpha''\alpha''' + 6\beta'\beta''\beta''' - 3\alpha'\beta'^2 - 3\alpha''\beta''^2 - 3\alpha'''\beta'''^2 = a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + 2(b'\beta' + b''\beta'' + b'''\beta''')$. Der erste Theil dieser Gleichung ist $= 3\lambda^2$ (XI.). Man hat also $3\lambda^2 = a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + 2(b'\beta' + b''\beta'' + b'''\beta''')$, und hieraus den in XII. angegebenen Ausdruck.

7) Multiplicirt man die Gleichung XII. mit λ^2, und setzt hierauf für $\lambda^2\alpha'$, $\lambda^2\alpha''$, $\lambda^2\alpha'''$, $\lambda^2\beta'$, $\lambda^2\beta''$, $\lambda^2\beta'''$, ihre Werthe aus X, so erhält man die Gleichung XIII.

8) Substituirt man in XIII. den Größen A', A'', A''',

B', B'', B''', ihre Werthe aus V, so erhält man die Gleichung in XIV.

Aus der Vergleichung von XI. und XIV. ergiebt sich, daß λ^2 und λ^4 ähnliche Ausdrücke haben, jenes in α', α'', α''', β', β'', β''', dieses in a', a'', a''', b', b'', b'''.

9) Werden die Werthe von λ aus III. und IX. einander gleich gesetzt, so erhält man

$$x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x'''$$
$$= \sqrt{(\alpha'\alpha''\alpha''' + 2\beta'\beta''\beta''' - \alpha'\beta'^2 - \alpha''\beta''^2 - \alpha'''\beta'''^2)}.$$

Aus I. und VII. erhellet aber, daß die Größen x', x'', x''', y', y'', y''', z', z'', z''', α', α'', α''', β', β'', β''', die nämliche Beziehung gegen einander haben, als die Größen ξ', ξ'', ξ''', η', η'', η''', ζ', ζ'', ζ''', a', a'', a''', b', b'', b'''; man kann also auch jene mit diesen vertauschen, und alsdann erhält man $\xi'\eta''\zeta''' + \eta'\zeta''\xi''' + \zeta'\xi''\eta''' - \xi'\zeta''\eta''' - \eta'\xi''\zeta''' - \zeta'\eta''\xi''' = \sqrt{(a'a''a''' + 2b'b''b''' - a'b'^2 - a''b''^2 - a'''b'''^2)}$. Der Theil zur Rechten dieser Gleichung ist $= \lambda^2$ (XIV.); woraus sich die Gleichung XV. ergiebt.

10) Die Relationen XVI. ergeben sich unmittelbar aus denen in X. Sie können dazu dienen, die Größen α', α'', α''', β', β'', β''', aus a', a'', a''', b', b'', b''', zu bestimmen, wenn diese gegeben sind; denn die Größen A', A'', A''', B', B'', B''', hat man aus V. und λ^2 aus XIV.

11) Die Gleichungen XVII. erhält man aus denen in II, wenn man diese mit x', x'', x''', y', y'', y''', z', z'', z''', in einer leicht zu erkennenden Ordnung multiplicirt.

12) Eben so erhält man die Gleichungen XVIII.

13) Multiplicirt man die Gleichungen der ersten Vertikal-Columne in XVII. mit ξ', η', ζ', und zwar die erste mit ξ', die zweite mit η', und die dritte mit ζ', und addiret die

Produkte zusammen, so erhält man $x'(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + x''(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'') + x'''(\xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''') = \lambda\xi'$, oder (VII.) $a'x' + b'''x'' + b''x''' = \lambda\xi'$, also $\xi' = \frac{a'x' + b'''x'' + b''x'''}{\lambda}$; welches die erste Gleichung der ersten Vertikal-Columne in XIX. ist. Die beyden anderen Gleichungen erhält man eben so, wenn man nur mit ξ'', η'', ζ'', und hierauf mit ξ''', η''', ζ''', auf die nämliche Art wie vorher mit ξ', η', ζ', multiplicirt. Auf die nämliche Art, wie hier die erste Vertikal-Columne in XIX. aus der in XVII. abgeleitet worden, kann man auch die beyden anderen Vertikal-Columnen von einander ableiten.

14) Multiplicirt man hingegen die erste Horizontalreihe der Gleichungen in XVII. mit x', y', z', nämlich die erste mit x', die zweite mit y', die dritte mit z', und addiret hierauf alles zusammen, so erhält man $\xi'(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \xi''(x'x'' + y'y'' + z'z'') + \xi'''(x'x''' + y'y''' + z'z''') = \lambda x'$, oder, (I.) $\alpha'\xi' + \beta'''\xi'' + \beta''\xi''' = \lambda x'$; also

$$x' = \frac{\alpha'\xi' + \beta'''\xi'' + \beta''\xi'''}{\lambda};$$

und dies ist die erste Gleichung in XX. Eben so erhält man, wenn mit x'', y'', z'', und x''', y''', z''', multiplicirt wird, die beyden anderen Gleichungen der ersten Vertikal-Columne in XX. Verfährt man mit den beyden anderen Horizontalreihen von Gleichungen in XVII. eben so, wie hier mit der ersten geschehen ist, so erhält man die beyden anderen Vertikal-Columnen in XX.

§ 256.

Aufg. Die Kanten einer dreyseitigen Pyramide aus den Coordinaten ihrer Eckpunkte zu finden.

Aufl. Es sey $AM'M''M'''$ (Fig. 115) irgend eine Pyramide, und eine ihrer Ecken, etwa A, für die Spitze und zugleich für den Anfangspunkt der Coordinaten angenommen. Es seyen ferner x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', die Coordinaten der drey Eckpunkte M', M'', M'''. Alsdann hat man nach § 244 und § 255. I.

$$AM' = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)} = \sqrt{\alpha'},$$
$$AM'' = \sqrt{(x''^2 + y''^2 + z''^2)} = \sqrt{\alpha''},$$
$$AM''' = \sqrt{(x'''^2 + y'''^2 + z'''^2)} = \sqrt{\alpha'''},$$

$$M'M'' = \sqrt{[(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2]}$$
$$= \sqrt{(\alpha' + \alpha'' - 2\beta''')}$$
$$M'M''' = \sqrt{[(x' - x''')^2 + (y' - y''')^2 + (z' - z''')^2]}$$
$$= \sqrt{(\alpha' + \alpha''' - 2\beta'')}$$
$$M''M''' = \sqrt{[(x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 + (z'' - z''')^2]}$$
$$= \sqrt{(\alpha'' + \alpha''' - 2\beta')}.$$

Bezeichnet man daher die Seitenlinien AM', AM'', AM''', durch k', k'', k''', und die Seiten der Grundfläche $M'M''$, $M'M'''$, $M''M'''$ durch $\sqrt{l'}$, $\sqrt{l''}$, $\sqrt{l'''}$, so hat man,

$$k' = \sqrt{\alpha'},\quad k'' = \sqrt{\alpha''},\quad k''' = \sqrt{\alpha'''},$$
$$l' = \alpha' + \alpha'' - 2\beta''',\quad l'' = \alpha' + \alpha''' - 2\beta'',$$
$$l''' = \alpha'' + \alpha''' - 2\beta'.$$

Zus. Aus den drey letzten Gleichungen erhält man,

$$\beta' = \frac{\alpha'' + \alpha''' - l'''}{2},\quad \beta'' = \frac{\alpha' + \alpha''' - l''}{2},$$

$$\beta''' = \frac{\alpha' + \alpha'' - l'}{2},$$

welche Ausdrücke in der Folge von Nutzen seyn werden. Man

muß hierbey nicht vergessen, daß l', l'', l''', nicht die Seiten der Grundfläche selbst, sondern ihre Quadrate bezeichnen.

§ 257.

Aufg. Die Gränzflächen einer dreyseitigen Pyramide durch die Coordinaten ihrer Eckpunkte auszudrücken.

Aufl. Wenn f, g, h, die drei Seiten eines Dreyeckes bezeichnen, so ist, wie bekannt, der Inhalt desselben $= \frac{1}{4}\sqrt{[4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2]}$. Um daher den Inhalt des Dreyeckes $AM'M''$ zu finden, muß man (§ 256) $f = \sqrt{\alpha'}$, $g = \sqrt{\alpha''}$, $h = \sqrt{(\alpha' + \alpha'' - 2\beta''')}$ setzen; dies giebt $\triangle AM'M'' = \frac{1}{4}\sqrt{(4\alpha'\alpha'' - 4\beta'''^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha'\alpha'' - \beta'''^2)}$ $=$ (§ 255 IV.) $\frac{\sqrt{a'''}}{2}$. Eben so findet man $\triangle AM'M'''$ $= \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha'\alpha''' - \beta''^2)} = \frac{\sqrt{a''}}{2}$, und $\triangle AM''M''' =$ $\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha''\alpha''' - \beta'^2)} = \frac{\sqrt{a'}}{2}$. Bezeichnet man daher die Seitenflächen $AM'M''$, $AM'M'''$, $AM''M'''$ durch f', f'', f''', so ist,

$$f' = \frac{\sqrt{a'''}}{2},\quad f'' = \frac{\sqrt{a''}}{2},\quad f''' = \frac{\sqrt{a'}}{2}.$$

Es bleibt nun noch übrig, die Grundfläche $M'M''M'''$ zu berechnen, deren Seiten (§ 256) $\sqrt{l'}$, $\sqrt{l''}$, $\sqrt{l'''}$ sind. Substituirt man diese Werthe für f, g, h, so erhält man, wenn $\triangle M'M''M''' = q$ gesetzt wird,

$$q = \frac{1}{4}\sqrt{[4l'l'' - (l' + l'' - l''')^2]},$$

oder $$16q^2 = 4l'l'' - (l' + l'' - l''')^2.$$

Hierin setze man für l', l'', l''', ihre Werthe aus dem vor. §; dies giebt,

$$4q^2 = (\alpha' + \alpha'' - 2\beta''')(\alpha' + \alpha''' - 2\beta'') - (\alpha' + \beta' - \beta'' - \beta''')^2$$
$$= \alpha'\alpha'' + \alpha'\alpha''' + \alpha''\alpha''' - 2\alpha'\beta' - 2\alpha''\beta'' - 2\alpha'''\beta''' +$$
$$+ 2\beta'\beta'' + 2\beta'\beta''' + 2\beta''\beta''' - \beta'^2 - \beta''^2 - \beta'''^2$$
$$= a' + a'' + a''' + 2b' + 2b'' + 2b''',$$

und daher,

$$q = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a' + a'' + a''' + 2b' + 2b'' + 2b''')}.$$

Anmerk. Wollte man die Gränzflächen unmittelbar in x', y', z', x'', y'', rc., ausgedrückt haben, so dürfte man nur für die Buchstaben a', a'', a''', b', b'', b''' ihre Werthe aus § 255 I. und IV. substituiren. Es ist indessen weit vortheilhafter, diese verkürzten Ausdrücke beyzubehalten, weil sie eine leichtere Uebersicht und eine leichtere Behandlung gestatten.

§ 258.

Aufg. Den Inhalt einer dreyseitigen Pyramide aus den Coordinaten ihrer Eckpunkte zu finden.

Aufl. 1) Um den Inhalt der Pyramide zu finden, muß man ihre Grundfläche $M'M''M'''$ mit dem dritten Theile der Höhe multipliciren, d. h. mit dem dritten Theile des Perpendikels, welches aus A auf die Ebene $M'M''M'''$ herabgelassen wird. Man setze dieses Perpendikel $= p$; es kann aus § 246 gefunden werden, wenn die Gleichung der Ebene $M'M''M'''$ bekannt ist. Denn ist $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung dieser Ebene, so ist, weil für den gegenwärtigen Fall die Coordinaten des Punktes, woraus das Perpendikel gezogen wird, $= 0$ sind,

$$p = \frac{-D}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}} = \frac{-1}{\sqrt{\left[\left(\frac{A}{D}\right)^2 + \left(\frac{B}{D}\right)^2 + \left(\frac{C}{D}\right)^2\right]}}$$

2) Da

2) Da hier drey Punkte M', M'', M''', vermittelst ihrer Coordinaten x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', gegeben sind, so lassen sich nach § 240 die Größen $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, für die durchgelegte Ebenen M'M''M''' bestimmen. Es ist nämlich, wenn von den Substitutionen § 255 II. und III. Gebrauch gemacht wird,

$$\frac{A}{D} = \frac{-(\xi' + \xi'' + \xi''')}{\lambda}, \quad \frac{B}{D} = \frac{-(\eta' + \eta'' + \eta''')}{\lambda},$$

$$\frac{C}{D} = \frac{-(\zeta' + \zeta'' + \zeta''')}{\lambda}.$$

Man erhält also durch die Substitution dieser Werthe,

$$p = \frac{\lambda}{\sqrt{[(\xi' + \xi'' + \xi''')^2 + (\eta' + \eta'' + \eta''')^2 + (\zeta' + \zeta'' + \zeta''')^2]}}$$

oder, wenn man das, was sich unter dem Wurzelzeichen befindet, entwickelt, und hierauf von den Relationen § 255 VII. Gebrauch machet,

$$p = \frac{\lambda}{\sqrt{(a' + a'' + a''' + 2b' + 2b'' + 2b''')}}$$

3) Nach dem vor. § ist aber der Inhalt der Grundfläche M'M''M''' $= \frac{1}{2}\sqrt{(a' + a'' + a''' + 2b' + 2b'' + 2b''')}$; also ist der Inhalt der Pyramide $= \frac{\lambda}{6}$.

Dieser höchst einfache und merkwürdige Ausdruck ist mancherley Formen fähig, je nachdem man einen oder den anderen von den in § 255 III, XI, XII, XIII, XIV, XV, angegebenen Ausdrücken nimmt.

§ 259.

Aufg. Den Inhalt einer dreyseitigen Pyramide aus ihren Kanten zu finden.

Aufl. Nach dem vorigen § ist dieser Inhalt $= \frac{\lambda}{6}$

$$= \tfrac{1}{6}\sqrt{(\alpha'\alpha''\alpha''' + 2\beta'\beta''\beta''' - \alpha'\beta'^2 - \alpha''\beta''^2 - \alpha'''\beta'''^2)}.$$

Werden hierin für β', β'', β''', ihre Werthe aus § 256 Zus. gesetzt, so erhält man den Inhalt der Pyramide =

$$\tfrac{1}{12}\sqrt{\left[\begin{matrix} 4\alpha'\alpha''\alpha''' - \alpha'(\alpha'' + \alpha''' - l''')^2 - \alpha''(\alpha' + \alpha''' - l'')^2 \\ - \alpha'''(\alpha' + \alpha'' - l')^2 + (\alpha'' + \alpha''' - l''')(\alpha' + \alpha''' - l'') \\ (\alpha' + \alpha'' - l') \end{matrix}\right]}$$

worin (§ 256) $\sqrt{\alpha'}$, $\sqrt{\alpha''}$, $\sqrt{\alpha'''}$, $\sqrt{l'}$, $\sqrt{l''}$, $\sqrt{l'''}$, die sechs Kanten der Pyramide sind.

Dieses Resultat stimmt mit dem in § 100. 3 gefundenen völlig überein, wenn man nur der dortigen Bezeichnung gemäß, a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2, für α', α'', α''', l', l'', l''', setzt.

§ 260.

Aufg. Die vier Eckpunkte einer Pyramide sind, vermittelst ihrer Coordinaten gegeben: man soll eine Gleichung zwischen den Entfernungen eines beliebigen Punkts P von diesen vier Eckpunkten finden.

Aufl. Es seyen $\sqrt{d}$, $\sqrt{d'}$, $\sqrt{d''}$, $\sqrt{d'''}$, die Entfernungen des Punktes P von den Punkten A, M', M'', M''', und x, y, z, die Coordinaten des Punktes P; alsdann ist (§ 244)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= d \\ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 &= d' \\ (x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2 &= d'' \\ (x-x''')^2 + (y-y''')^2 + (z-z''')^2 &= d'''; \end{aligned}$$

oder (§ 255. I.)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= d \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xx' - 2yy' - 2zz' &= d' - \alpha' \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xx'' - 2yy'' - 2zz'' &= d'' - \alpha'' \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xx''' - 2yy''' - 2zz''' &= d''' - \alpha''', \end{aligned}$$

Wird jede von den drey letzten Gleichungen von der ersten abgezogen, und der Kürze wegen,

$$\frac{a'+d-d'}{2}=k',\quad \frac{a''+d-d''}{2}=k'',$$

$$\frac{a'''+d-d'''}{2}=k''',$$

gesetzt; so erhält man die drey Gleichungen

$$\begin{aligned} xx' + yy' + zz' &= k' \\ xx'' + yy'' + zz'' &= k'' \\ xx''' + yy''' + zz''' &= k'''. \end{aligned} \qquad b.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach x, y, z, giebt, wenn man die Substitutionen § 255 II. III. braucht,

$$x = \frac{k'\xi' + k''\xi'' + k'''\xi'''}{\lambda}$$

$$y = \frac{k'\eta' + k''\eta'' + k'''\eta'''}{\lambda}$$

$$z = \frac{k'\zeta' + k''\zeta'' + k'''\zeta'''}{\lambda}$$

Werden diese Werthe in der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = d$ substituirt, so erhält man vermittelst der Relationen § 255 VII.

$$\lambda^2 d = a'k'^2 + a''k''^2 + a'''k'''^2 + 2(b'''k'k'' + b''k'k''' + b'k''k''')$$

Hierin kann man nun wieder für k', k'', k''', ihre Werthe substituiren; alsdann wird eine Gleichung herauskommen, welche keine andere Größen als die Entfernungen d, d', d'', d''', und die gegebenen Größen a', a'', a''', b', b'', b''', enthält.

Anmerk. Vermittelst der hier gefundenen Gleichung läßt sich auch die Aufgabe auflösen, wenn vier Punkte A, B, C, D, gegeben sind, und die Entfernung eines anderen Punk-

tes P von dreyen derselben A, B, C, bekannt ist, seine Entfernung von dem vierten D zu finden.

§ 261.

Aufg. Um eine gegebene dreyseitige Pyramide eine Kugel zu beschreiben.

Aufl. Wird der Punkt P des vorigen §'s für den Mittelpunkt der umschriebenen Kugel angenommen, so muß $d = d' = d'' = d'''$ seyn. Alsdann wird aber $k' = \frac{\alpha'}{2}$, $k'' = \frac{\alpha''}{2}$, $k''' = \frac{\alpha'''}{2}$. Werden diese Werthe in der Gleichung des vor. §'s substituirt, so erhält man,

$$4\lambda^2 d = \begin{bmatrix} a'\alpha'^2 + a''\alpha''^2 + a'''\alpha'''^2 + \\ 2(b'''\alpha'\alpha'' + b''\alpha'\alpha''' + b'\alpha''\alpha''') \end{bmatrix}$$

und daher,

$$d = \frac{a'\alpha'^2 + a''\alpha''^2 + a'''\alpha'''^2 + 2(b'''\alpha'\alpha'' + b''\alpha'\alpha''' + b'\alpha''\alpha''')}{4\lambda^2}$$

Man hat also den Halbmesser der Kugel.

Um die Lage ihres Mittelpunktes P zu bestimmen, muß man in den im vor. § für x, y, z gefundenen Ausdrücken für k', k'', k''', ihre Werthe $\frac{\alpha'}{2}, \frac{\alpha''}{2}, \frac{\alpha'''}{2}$ substituiren; man erhält alsdann

$$x = \frac{\alpha'\xi' + \alpha''\xi'' + \alpha'''\xi'''}{2\lambda}$$

$$y = \frac{\alpha'\eta' + \alpha''\eta'' + \alpha'''\eta'''}{2\lambda}$$

$$z = \frac{\alpha'\zeta' + \alpha''\zeta'' + \alpha'''\zeta'''}{2\lambda}$$

Werden hierin für ξ', ξ'', ξ''', η', η'', η''', ζ', ζ'', ζ''', ihre Werthe aus § 255 II. und für α', α'', α''', λ, ihre Werthe aus I. und III. gesetzt, so erhält man die Coordinaten des Mittelpunktes unmittelbar durch die Coordinaten der Eckpunkte ausgedrückt.

Zus. Will man d, d. h. das Quadrat vom Halbmesser der Kugel, unmittelbar durch die Kanten der Pyramide ausdrucken, so darf man nur in dem für dasselbe gefundenen Ausdrucke für a', a'', a''', b', b'', b''', ihre Werthe aus § 255 IV. und für λ^2 seinen Werth aus § 253 XI. substituiren. Man erhält alsdann d bloß durch α', α'', α''', β', β'', β''', ausgedruckt und diese Größen sind durch die Kanten der Pyramide gegeben (§ 256).

§ 262.

Aufg. Die Perpendikel zu finden, welche aus irgend einem gegebenen Punkte P, außerhalb oder innerhalb der Pyramide, auf ihre Gränzflächen herabgelassen werden.

Aufl. Es seyen x^1, y^1, z^1, die Coordinaten des Punktes P, also gegeben. Es bezeichne ferner p das Perpendikel auf der Grundfläche $M'M''M'''$, und p', p'', p''', die Perpendikel auf die Seitenflächen $AM'M''$, $AM'M'''$, $AM''M'''$.

1) Es sey $Ax + By + Cz + D = o$ die Gleichung der Ebene $M'M''M'''$; alsdann ist das Perpendikel, welches aus dem Punkte P auf die Ebene herabgelassen wird (§ 246)

$$= -\frac{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}} =$$

$$-\frac{\frac{A}{D}x^1 + \frac{B}{D}y^1 + \frac{C}{D}z^1 + 1}{\sqrt{\left[\left(\frac{A}{D}\right)^2 + \left(\frac{B}{D}\right)^2 + \left(\frac{C}{D}\right)^2\right]}}.$$

Werden hierin für $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$, ihre Werthe aus § 258. 2 substituirt, so erhält man

$$p = \frac{\left[\begin{matrix}-\lambda + (\xi' + \xi'' + \xi''') x^1 + (\eta' + \eta'' + \eta''') y^1 + \\ (\zeta' + \zeta'' + \zeta''') z^1\end{matrix}\right]}{\sqrt{[(\xi' + \xi'' + \xi''')^2 + (\eta' + \eta'' + \eta''')^2 + (\zeta' + \zeta'' + \zeta''')^2]}}$$

aber auch, wenn man das, was sich unter dem Wurzelzeichen befindet, entwickelt, und von den Relationen § 255 VII. Gebrauch machet,

$$p = \frac{\left[\begin{matrix}-\lambda + (\xi' + \xi'' + \xi''') x^1 + (\eta' + \eta'' + \eta''') y^1 + \\ (\zeta' + \zeta'' + \zeta''') z^1\end{matrix}\right]}{\sqrt{(a' + a'' + a''' + 2b' + 2b'' + 2b''')}}$$

und dies ist der Ausdruck des Perpendikels auf der Grundfläche.

2) Aus diesem für p gefundenen Ausdrucke lassen sich nun die Ausdrücke für p', p'', p''' herleiten. Denn läßt man nach einander die Punkte M''', M'', M', auf A fallen, indem man jedesmal die beyden anderen Punkte unverändert läßt, so gehet das Dreyeck $M'M''M'''$ nach einander in $AM'M''$, $AM'M'''$, $AM''M'''$ über; alsdann werden aber auch jedesmal die Coordinaten des vorgesetzten Punktes = 0. Fällt also zuerst M''' auf A, so verschwinden die Coordinaten x''', y''', z''', also auch ξ', ξ'', η', η'', ζ', ζ'', a', a'', b', b'', b''' und λ. Fällt M'' auf A, so verschwinden die Coordinaten x'' y'' z'', also auch ξ', ξ''', η', η''', ζ', ζ''', a', a''', b', b'', b''' und λ. Fällt endlich der Punkt M' auf A, so verschwinden die Coordinaten x', y', z', also auch ξ'', ξ''', η'', η''', ζ'', ζ''', a'', a''', b', b'', b''' und λ. Man hat also,

$$p' = \frac{\xi''' x^I + \eta''' y^I + \zeta''' z^I}{\sqrt{a'''}}$$

$$p'' = \frac{\xi'' x^I + \eta'' y^I + \zeta'' z^I}{\sqrt{a''}}$$

$$p''' = \frac{\xi' x^I + \eta' y^I + \zeta' z^I}{\sqrt{a'}},$$

und dies sind die Perpendikel auf den Seitenflächen der Pyramide.

§ 263.

Aufg. Die Perpendikel aus irgend einem Punkte P auf die drey Seitenflächen einer Pyramide sind gegeben: man soll die Lage dieses Punktes bestimmen.

Aufl. Diese Aufgabe ist das Umgekehrte von der des vor. §s. Hier sind nämlich die Perpendikel p', p'', p''' gegeben, und die Coordinaten x^I, y^I, z^I, des Punktes P werden gesucht. Man muß also die daselbst gefundenen drey Gleichungen

$$\xi''' x^I + \eta''' y^I + \zeta''' z^I = p' \sqrt{a'''}$$
$$\xi'' x^I + \eta'' y^I + \zeta'' z^I = p'' \sqrt{a''}$$
$$\xi' x^I + \eta' y^I + \zeta' z^I = p''' \sqrt{a'}$$

nach x^I, y^I, z^I auflösen. Die Auflösung dieser Gleichungen giebt, wenn man die Relationen § 255 VI. XV. braucht,

$$x^I = \frac{p''' \sqrt{a'} \,.\, X' + p'' \sqrt{a''} \,.\, X'' + p' \sqrt{a'''} \,.\, X'''}{\lambda^2}$$

$$y^I = \frac{p''' \sqrt{a'} \,.\, Y' + p'' \sqrt{a''} \,.\, Y'' + p' \sqrt{a'''} \,.\, Y'''}{\lambda^2}$$

$$z^I = \frac{p''' \sqrt{a'} \,.\, Z' + p'' \sqrt{a''} \,.\, Z'' + p' \sqrt{a'''} \,.\, Z'''}{\lambda^2}.$$

oder wenn für X', X'', X''', Y', Y'', rc., ihre Werthe aus § 255 IX. substituirt werden,

$$x^1 = \frac{p''' \sqrt{a'} . x' + p'' \sqrt{a''} . x'' + p' \sqrt{a'''} . x'''}{\lambda}$$

$$y^1 = \frac{p''' \sqrt{a'} . y' + p'' \sqrt{a''} . y'' + p' \sqrt{a'''} . y'''}{\lambda}$$

$$z^1 = \frac{p''' \sqrt{a'} . z' + p'' \sqrt{a''} . z'' + p' \sqrt{a'''} . z'''}{\lambda}$$

Die Coordinaten des Punktes P sind also gefunden, und hierdurch der Punkt selbst.

XVII. Einige vermischte Aufgaben und Lehrsätze.

---

§ 264.

Aufg. Die drey Seiten eines Dreyeckes sind gegeben: man soll die Linien finden, welche von den Spitzen desselben nach den Halbirungspunkten der gegenüber liegenden Seiten gezogen werden.

Aufl. Die Seiten AB = 2s, BC = 2s', AC = 2s'', (Fig. 116) sind gegeben; es werden die Linien CD = d, AE = d', BF = d'' gesucht.

In dem Dreyecke ADC hat man,

$$\text{Cos. } ADC = \frac{CD^2 + AD^2 - AC^2}{2CD.AD} = \frac{d^2 + s^2 - 4s''^2}{2ds}$$

und in dem Dreyecke CDB,

$$\text{Cos. } CDB = \frac{CD^2 + DB^2 - BC^2}{2CD.DB} = \frac{d^2 + s^2 - 4s'^2}{2ds}.$$

Da nun Cos. ADC = − Cos. CDB; so hat man die Gleichung,

$$d^2 + s^2 - 4s''^2 = - d^2 - s^2 + 4s'^2.$$

Hieraus erhält man

$$d^2 = 2s'^2 + 2s''^2 - s^2$$

und eben so

$$d'^2 = 2s^2 + 2s''^2 - s'^2$$
$$d''^2 = 2s^2 + 2s'^2 - s''^2.$$

§. 265.

Aufg. Die drey Linien, welche von den Spitzen eines Dreyeckes nach den Halbirungspunkten der gegenüber liegenden Seiten gezogen worden, sind gegeben: man soll die Seiten des Dreyeckes finden.

Aufl. Man darf nur in den drey Gleichungen des vor. §'s

$$2s'^2 + 2s''^2 - s^2 = d^2$$
$$2s^2 + 2s''^2 - s'^2 = d'^2$$
$$2s^2 + 2s'^2 - s''^2 = d''^2$$

die Größen s, s', s'', als die unbekannten ansehen, und sie darnach auflösen, so erhält man:

$$9s^2 = 2d'^2 + 2d''^2 - d^2$$
$$9s'^2 = 2d^2 + 2d''^2 - d'^2$$
$$9s''^2 = 2d^2 + 2d'^2 - d''^2$$

woraus sich s, s', s'', bestimmen läßt.

§. 266.

Lehrs. In jedem Vierecke ist die Summe der Quadrate der vier Seiten so groß als die Summe der Quadrate seiner beyden Diagonalen nebst dem vierfachen Quadrate der Linie, welche ihre Halbirungspunkte verbindet.

Bew. Es sey (Fig. 117) $AB = s$, $BC = s'$, $CD = s''$, $DA = s'''$, $AC = d$, $BD = d'$, und die Linie MM', welche die Halbirungspunkte verbindet $= m$.

Man lasse von den Punkten M, M', die Perpendikel Mm, $M'm'$, herab, und setze $Am = x$, $Mm = y$, $Am' = x'$, $M'm' = y'$. Alsdann ist

$DP = 2y$, $CQ = 2y'$, $Bm = s - x$, $BP = 2Bm = 2s - 2x$, $AQ = 2x'$, $AP = BP - AB = s - 2x$, $BQ = AQ - AB = 2x' - s$, $PQ = AP + AQ = s - 2x + 2x'$.

Nun ist $BC^2 = BQ^2 + CQ^2$, $CD^2 = PQ^2 + (DP - CQ)^2$, $AD^2 = AP^2 + DP^2$, $AC^2 = AQ^2 + CQ^2$, $BD^2 = BP^2 + DP^2$, $MM'^2 = (Mm - M'm')^2 + (Am' - Am)^2$. Werden hierin für die Linien ihre Werthe gesetzt, so erhält man,

$$s'^2 = 4x'^2 - 4sx' + s^2 + 4y'^2$$

$$s''^2 = s^2 - 4sx + 4sx' + 4x^2 - 8xx' + 4x'^2 + 4y^2 - 8yy' + 4y'^2$$

$$s'''^2 = s^2 - 4sx + 4x^2 + 4y^2$$

$$d^2 = 4x'^2 + 4y'^2$$

$$d'^2 = 4s^2 - 8sx + 4x^2 + 4y^2$$

$$m^2 = x'^2 - 2x'x + x^2 + y^2 - 2yy' + y'^2$$

Wird nunmehr von der Summe der drey ersten Gleichungen die Summe der vierten und fünften abgezogen, so erhält man die Gleichung

$$s'^2 + s''^2 + s'''^2 - d^2 - d'^2 = 4x'^2 - 8x'x + 4x^2 + 4y^2 - 8yy' + 4y'^2 - s^2$$

oder

$$s'^2 + s''^2 + s'''^2 - d^2 - d'^2 = 4m^2 - s^2$$

oder endlich

$$s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2 = d^2 + d'^2 + 4m^2.$$

W. Z. E. W.

§ 267.

Aufg. Es soll ein Dreyeck gefunden werden, in welchem zwey der Seiten ein gegebenes Verhältniß haben,

und der Cubus der dritten Seite so groß ist, als die Summe der Cuben jener beyden Seiten.

Aufl. Es sey $1 : m$ das gegebene Verhältniß der zwey Seiten, und x die eine derselben; alsdann ist die andere $= mx$. Setzt man nun den unbekannten Winkel, welcher von diesen Seiten eingeschlossen wird, $= \varphi$, so ist die dritte Seite $=$

$\sqrt{(x^2 + m^2x^2 - 2mx^2 \operatorname{Cos.} \varphi)} = x\sqrt{(1 + m^2 - 2m \operatorname{Cos.} \varphi)}$.

Nach den Bedingungen der Aufgabe soll aber der Cubus dieser Seite der Summe der Cuben der beyden anderen Seiten gleich seyn; man hat also die Gleichung

$$x^3 (1 + m^2 - 2m \operatorname{Cos.} \varphi)^{\frac{3}{2}} = x^3 + m^3x^3$$

oder $$(1 + m^2 - 2m \operatorname{Cos.} \varphi)^{\frac{3}{2}} = 1 + m^3$$

oder $$1 + m^2 - 2m \operatorname{Cos.} \varphi = (1 + m^3)^{\frac{2}{3}};$$

und diese giebt

$$\operatorname{Cos.} \varphi = \frac{1 + m - (1 + m^3)^{\frac{2}{3}}}{2m},$$

woraus sich φ bestimmen läßt.

§ 268.

Aufg. Ein Winkel eines Dreyeckes ist gegeben: man soll dasjenige finden, für welches der Cubus der diesem Winkel gegenüber liegenden Seite so groß ist, als die Summe der Cuben der ihn einschließenden Seiten.

Aufl. Da der Winkel gegeben ist, so ist auch sein Cosinus gegeben; er sey $= c$. Da ferner die Aufgabe nur zwey Bedingungen enthält, zur Bestimmung eines Dreyecks aber drey Bedingungen erfordert werden, so gehöret sie zu den unbestimmten.

Es sey 1 : x das Verhältniß der beyden den gegebenen Winkel einschließenden Seiten, und die eine dieser Seiten = y, also die andere = xy. Aus den Seiten x, xy, und dem eingeschlossenen Winkel findet man nun die dritte Seite

$$= \sqrt{(y^2 + x^2y^2 - 2cy^2x)} = y\sqrt{(1 + x^2 - 2cx)}.$$

Da nun der Cubus dieser Seite der Summe der Cuben der beyden anderen Seiten gleich seyn soll; so hat man die Gleichung

$$y^3 (1 + x^2 - 2cx)^{\frac{3}{2}} = y^3 + x^3y^3$$

oder $$(1 + x^2 - 2cx)^{\frac{3}{2}} = 1 + x^3$$

oder $$(1 + x^2 - 2cx)^3 = (1 + x^3)^2.$$

Wenn man diese Gleichung entwickelt, und das, was sich aufhebt, wegläßt, so erhält man,

$$6cx^5 - (12c^2 + 3)x^4 + (8c^3 + 12c + 2)x^3 - (12c^2 + 3)x^2 + 6cx = 0,$$

oder

$$x^4 - \frac{12c^2 + 3}{6c}x^3 + \frac{8c^3 + 12c + 2}{6c}x^2 - \frac{12c^2 + 3}{6c}x + 1 = 0.$$

Diese Gleichung ist von vierten Grade, und zwar gehöret sie zu derjenigen Classe, welche man reciproke Gleichungen zu nennen pflegt, die sich immer in quadratische Gleichungen zerlegen lassen. (Man sehe unter anderen Eulers Analys. des Unendl. übers. von Michelsen, Th. III. Seite 13 u. f.)

§ 269.

Aufg. Ein Dreyeck zu finden, worin die nten Po-

tenzen zweyer Seiten zusammen genommen der nten Potenz der dritten Seite gleich ist, und worin jene beyden Seiten ein gegebenes Verhältniß haben.

Aufl. Die Auflösung ist der in § 267 für die dritte Potenz völlig ähnlich. Man hat also, wenn die dort gebrauchte Bezeichnung beybehalten wird,

$$x^n(1 + m^2 - 2m \text{ Cos. } \varphi)^{\frac{n}{2}} = x^n + m^n x^n$$

oder $$(1 + m^2 - 2m \text{ Cos. } \varphi)^{\frac{n}{2}} = 1 + m^n;$$

also $$1 + m^2 - 2m \text{ Cos. } \varphi = (1 + m^n)^{\frac{2}{n}}$$

und $$\text{Cos. } \varphi = \frac{1 + m^2 - (1 + m^n)^{\frac{2}{n}}}{2m}.$$

Anmerk. Zu dieser und den beyden vorhergehenden Aufgaben wurde ich durch eine ähnliche eines Engländers, Namens Glenie veranlaßt, (m. s. Archiv der reinen und angew. Mathem. Heft IV. Seite 481,) die in der That durch Kästners Anzeige mehr Aufmerksamkeit erregt hat, als sie verdient, und von welcher sich im achten Hefte des Archivs drey Auflösungen, nämlich von Hagner, Hauber und Becker befinden.

§ 270.

Aufg. Es sind zwey Kreise der Lage und Größe nach gegeben: man soll eine Linie ziehen, welche beyde Kreise zugleich berührt.

Aufl. Es seyen C, C', (Fig. 118) die Mittelpunkte der beyden Kreise; ihre Entfernung CC' = d, der Halbmesser

des ersten = r, des zweyten = r'. Die gesuchte Tangente kann nun entweder die Lage MM' haben, so daß beyde Berührungspunkte M, M' auf einer und derselben Seite der Linie CC' fallen, oder die Lage PP', so daß die Berührungspunkte P, P' auf verschiedenen Seiten der CC' fallen.

Erster Fall. Es sey T der Punkt, wo die Tangente MM' die Linie CC' trifft, und C'T = x. Ziehet man nun die Halbmesser CM, C'M', so ist CM : C'M' = CT : C'T, oder r : r' = d + x : x, und daher

$$x = \frac{dr'}{r - r'} = C'T,$$

also

$$CT = d + \frac{dr'}{r - r'} = \frac{dr}{r - r'}.$$

Zweyter Fall. Es sey t der Punkt, wo die Tangente PP' die Linie CC' schneidet, und C't = y. Ziehet man nun die Halbmesser CP, C'P', so ist CP : C'P' = Ct : C't, oder r : r' = d − y : y, und daher

$$y = \frac{dr'}{r + r'} = C't,$$

also

$$Ct = d - \frac{dr'}{r + r'} = \frac{dr}{r + r'}.$$

Zus. Wenn die Tangenten M''M''', P''P''', gezogen werden, so haben x und y für diese Tangenten die nämlichen Werthe als für die Tangenten MM', PP'. Hieraus folgt aber, daß sowohl der Punkt, in welchem sich die Linien MM', M''M''' schneiden, als auch der, in welchem sich die Linien PP', P''P''' schneiden, auf die Linie CC' fällt.

§ 271.

Lehrs. Wenn man an jede zwey von drey ungleis

chen, der Größe und Lage nach gegebenen Kreisen, Tangenten, wie die im ersten Falle des vor. §'s ziehet: so liegen die Durchschnittspunkte von jedem Paare solcher Tangenten in einer einzigen geraden Linie.

Bew. 1) Es seyen C, C', C'' (Fig. 129) die Mittelpunkte der drey gegebenen Kreise, und M, M', M'', die Punkte, wo die drey Paare von Tangenten sich schneiden; es soll nun bewiesen werden, daß die Punkte M, M', M'' in einer geraden Linie liegen werden. Zu dem Ende darf nur bewiesen werden, daß, wenn von den Punkten M', M'', auf die Linie CC' die Perpendikel M'm', M''m'', gezogen werden, die Proportion Mm' : Mm'' = M'm' : M''m'' statt finde.

2) Man bezeichne die Halbmesser der drey Kreise, deren Mittelpunkte C, C', C'', sind, durch r, r', r'', und die Entfernungen dieser Mittelpunkte von einander, oder CC', CC'', C'C'', in der Ordnung, wie sie hier genannt werden, durch d, d', d''. Man ziehe ferner auf CC' das Perpendikel C''p, und setze C''p = h.

3) Aus den drey Seiten des Dreyeckes CC'C'' findet man die Segmente Cp, C'p; es ist nämlich,

$$Cp = \frac{d^2 + d'^2 - d''^2}{2d},$$

$$C'p = \frac{d^2 + d''^2 - d'^2}{2d}.$$

4) Aus dem vor. § erhält man,

$$CM = \frac{dr}{r - r'}, \quad C'M = \frac{dr'}{r - r'},$$

$$C'M'' = \frac{d''r'}{r'' - r'}, \quad CM' = \frac{d'r}{r'' - r}.$$

5) Die

5) Die ähnlichen Drenecke $C''Cp$, $M'Cm'$ geben nun

$$M'm' = \frac{CM' \cdot C''p}{CC''} = \frac{hr}{r''-r}$$

$$Cm' = \frac{CM' \cdot Cp}{CC''} = \frac{r\,(d^2 + d'^2 - d''^2)}{2d\,(r''-r)}.$$

ferner die ähnlichen Drenecke $C''C'p$, $M''C'm''$

$$M''m'' = \frac{C'M'' \cdot C''p}{C'C''} = \frac{hr'}{r''-r'}$$

$$C'm'' = \frac{C'M'' \cdot C'p}{C'C''} = \frac{r'\,(d^2 + d''^2 - d'^2)}{2d\,(r''-r')}.$$

6) Hieraus ferner,

$$Mm' = CM + Cm' = \frac{dr}{r-r'} + \frac{r\,(d^2 + d'^2 - d''^2)}{2d\,(r''-r)}$$

$$= \frac{d^2 r\,(2r''-r'-r) + r\,(r-r')\,(d'^2 - d''^2)}{2d\,(r-r')\,(r''-r)}$$

$$Mm'' = C'M - C'm'' = \frac{dr'}{r-r'} - \frac{r'\,(d^2 + d''^2 - d'^2)}{2d\,(r''-r')}$$

$$= \frac{d^2 r'\,(2r''-r'-r) + r'\,(r-r')\,(d'^2 - d''^2)}{2d\,(r-r')\,(r''-r')}$$

oder

$$Mm' = \frac{r}{r''-r}\left[\frac{d^2\,(2r''-r'-r) + (r-r')\,(d'^2 - d''^2)}{2d\,(r-r')}\right]$$

$$Mm'' = \frac{r'}{r''-r'}\left[\frac{d^2\,(2r''-r'-r) + (r-r')\,(d'^2 - d''^2)}{2d\,(r-r')}\right]$$

Hieraus ergiebt sich,

$$Mm' : Mm'' = \frac{r}{r''-r} : \frac{r'}{r''-r'}.$$

Nach 5 ist aber auch

$$M'm' : M''m'' = \frac{r}{r''-r} : \frac{r'}{r''-r'};$$

folglich ist

$$Mm' : Mm'' = M'm' : M''m'',$$

und daher liegen die Punkte M, M', M'', in einer geraden Linie. W. Z. E. W.

§ 272.

Lehrs. Wenn zwey auf einer Kugelfläche beschriebene Kreise sich berühren: so liegt ihr Berührungspunkt in dem Bogen eines größten Kreises, welcher ihre Pole verbindet.

Bew. Es seyen A, B, die Pole der beyden Kreise KL, MN, (Fig. 120) welche man sich auf einer Kugelfläche gezeichnet denken muß. Läge nun der Berührungspunkt C der beyden Kreise nicht in dem Bogen ADEB, welcher ihre beyden Pole verbindet, so könnte man die Bogen größter Kreise AC, BC, ziehen; alsdann wäre AC = AD, BC = BE, also AC + BC < AB, welches unmöglich ist, da in jedem sphärischen Dreyecke die Summe zweyer Seiten immer größer ist, als die dritte.

§ 273.

Aufg. Auf einer Kugelfläche sind drey Kreise gegeben: man soll auf der nämlichen Kugelfläche einen vierten Kreis finden, welcher jene drey berührt.

Aufl. 1) Es seyen A, B, C (Fig. 121) die Pole der drey gegebenen Kreise, und D der Pol des gesuchten Kreises.

Man verbinde die Punkte A, B, C, D durch die Bogen größter Kreise AB, AC, BC, DA, DB, DC; wovon die drey letzteren, nach dem vor. §. durch die Berührungspunkte a, b, c, des gesuchten Kreises mit den drey gegebenen, gehen werden.

2) Man bezeichne nun die Bogen Aa, Bb, Cc, welche hier als die Bogen-Halbmesser der drey gegebenen Kreise angesehen werden können, durch a, b, c, und den Bogen-Halbmesser des gesuchten Kreises Da = Db = Dc durch x.

3) In § 55 wurde eine Gleichung zwischen den vier Seiten eines sphärischen Viereckes und seinen beyden Diagonalen gefunden. Setzt man nämlich AB = m, AC = n, BD = p, CD = q, AD = r, BC = s, so ist nach dem angeführten Orte

$$1 - (\text{Cos.}\,m^2 + \text{Cos.}\,n^2 + \text{Cos.}\,p^2 + \text{Cos.}\,q^2 + \text{Cos.}\,r^2 + \text{Cos.}\,s^2)$$
$$+ (\text{Cos.}\,m^2\,\text{Cos.}\,q^2 + \text{Cos.}\,n^2\,\text{Cos.}\,p^2 + \text{Cos.}\,r^2\,\text{Cos.}\,s^2)$$
$$+ \begin{pmatrix} 2\,\text{Cos.}\,m\,\text{Cos.}\,n\,\text{Cos.}\,s + 2\,\text{Cos.}\,m\,\text{Cos.}\,p\,\text{Cos.}\,r + \\ 2\,\text{Cos.}\,n\,\text{Cos.}\,q\,\text{Cos.}\,r + 2\,\text{Cos.}\,p\,\text{Cos.}\,q\,\text{Cos.}\,s \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} 2\,\text{Cos.}\,m\,\text{Cos.}\,n\,\text{Cos.}\,p\,\text{Cos.}\,q + 2\,\text{Cos.}\,m\,\text{Cos.}\,q\,\text{Cos.}\,r\,\text{Cos.}\,s \\ + 2\,\text{Cos.}\,n\,\text{Cos.}\,p\,\text{Cos.}\,r\,\text{Cos.}\,s \end{pmatrix}$$
$$= 0.$$

4) In dieser Gleichung sind die Bogen m, n, s, gegeben, weil es die Kreise A, B, C ihrer Lage nach sind; ferner ist r = a + x, p = b + x, q = c + x. Es ist also in dieser Gleichung bloß x unbekannt; ihre Auflösung kann nun, wie folgt, geschehen.

5) Es kommt alles bloß darauf an, die Ausdrücke Cos. p², Cos. q², Cos. r², Cos. p Cos. q, Cos. p Cos. r, Cos. q Cos. r, so zu entwickeln, daß man das x, in so fern es sich unter den goniometrischen Zeichen befindet, abgesondert von den übrigen

Größen erhalte: Nun ist $\mathrm{Cos.}\, p^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, 2p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, (2b + 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, 2b\, \mathrm{Cos.}\, 2x - \frac{1}{2}\, \mathrm{Sin.}\, 2b\, \mathrm{Sin.}\, 2x$, und eben so $\mathrm{Cos.}\, q^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, 2c\, \mathrm{Cos.}\, 2x - \frac{1}{2}\, \mathrm{Sin.}\, 2c\, \mathrm{Sin.}\, 2x$, $\mathrm{Cos.}\, r^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, 2a\, \mathrm{Cos.}\, 2x - \frac{1}{2}\, \mathrm{Sin.}\, 2a\, \mathrm{Sin.}\, 2x$. Ferner ist $\mathrm{Cos.}\, p\, \mathrm{Cos.}\, q = \mathrm{Cos.}\, (b + x)\, \mathrm{Cos.}\, (c + x) =$
$\frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, (b - c) + \frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, (b + c + 2x) =$
$\frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, (b - c) + \frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, (b + c)\, \mathrm{Cos.}\, 2x - \frac{1}{2}\, \mathrm{Sin.}\, (b + c)\, \mathrm{Sin.}\, 2x$, und eben so,

$$\mathrm{Cos.}\, p\, \mathrm{Cos.}\, r =$$
$$\frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, (a - b) + \frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, (a + b)\, \mathrm{Cos.}\, 2x - \frac{1}{2}\, \mathrm{Sin.}\, (a + b)\, \mathrm{Sin.}\, 2x,$$
$$\mathrm{Cos.}\, q\, \mathrm{Cos.}\, r =$$
$$\frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, (a - c) + \frac{1}{2}\, \mathrm{Cos.}\, (a + c)\, \mathrm{Cos.}\, 2x - \frac{1}{2}\, \mathrm{Sin.}\, (a + c)\, \mathrm{Sin.}\, 2x.$$

Werden alle diese Werthe in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält diese die Form $A + B\, \mathrm{Sin.}\, 2x + C\, \mathrm{Cos.}\, 2x = 0$. Wie eine solche Gleichung aufgelöst wird, ist schon aus dem ersten Theile dieser Sammlung zur Genüge bekannt. Dividiret man nämlich diese Gleichung durch C, und setzt hierauf $\frac{B}{C} = \mathrm{Cot.}\, \alpha$, so hat man $\mathrm{Sin.}\, (\alpha + 2x) = -\frac{A\, \mathrm{Sin.}\, \alpha}{C}$, woraus sich x bestimmen läßt.

Verbesserungen.

Seite 177 Z. 4 v. u. statt $\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2} n''}{\text{Sin. } \frac{1}{2} \theta'}$ l. $\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2} n''}{\text{Sin. } \frac{1}{2} \theta''}$. —

— 222 — 11. v. o. statt $Ce;$ l. $Ce_{,}$ —

— 231 — 9 v. o. statt M l. M' —

— 231 — 9 v. u. statt $AB \times MM''$ l. $AB \times M'M''$ —

— 255 — 7 v. u. statt $+ CDE$ l. $+ \triangle CDE$ —

— 284 — 7 v. o. statt $+ 2BPC$ l. $2 \triangle BPC$ —

— 342 — 5 v. o. statt $z' x''$ l. $z'z''$ —

— 346 — 10 v. o. statt $yy'''z'z''$ l. $y'y'''z'z''$ —

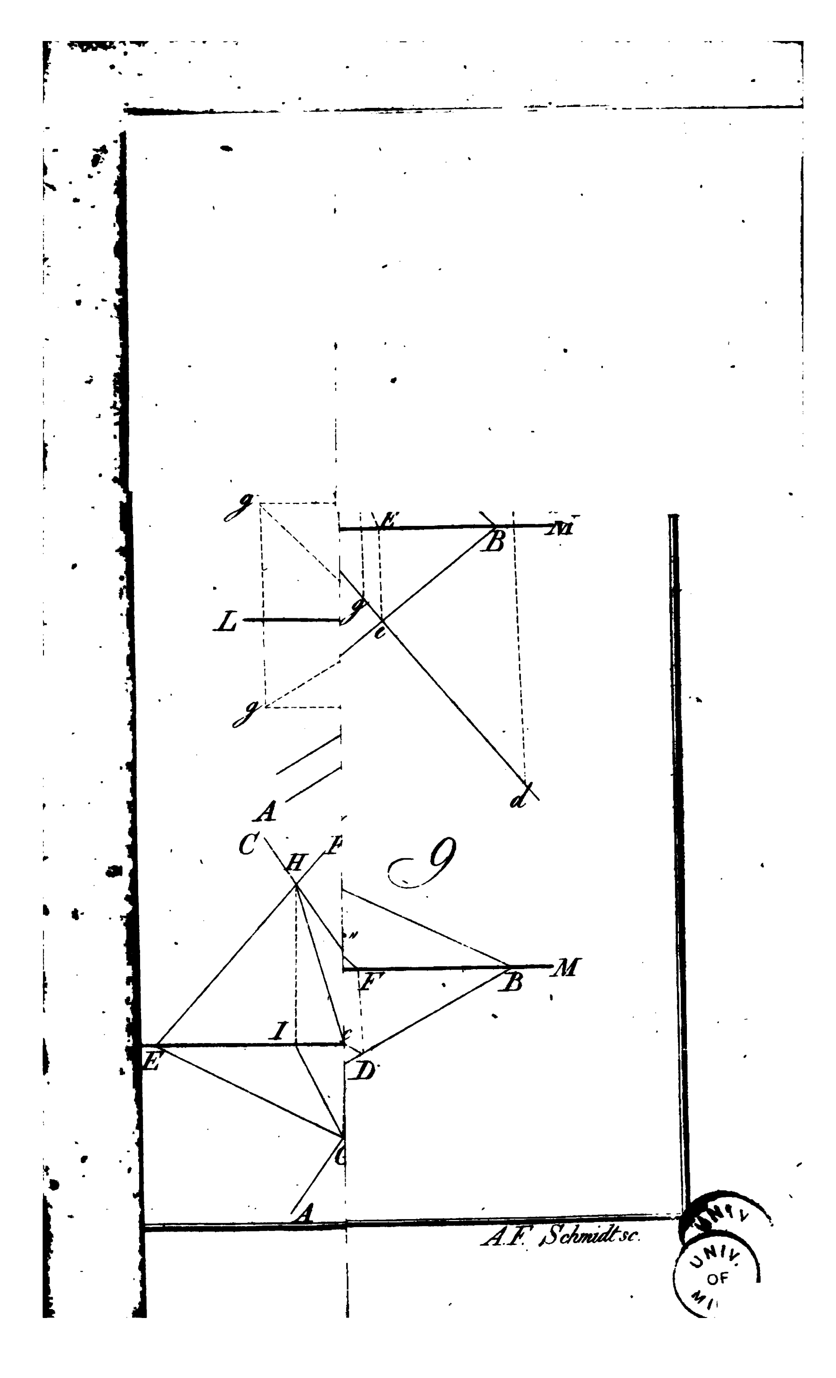
— 349 — 12 v. u. ist λ wegzustreichen. —

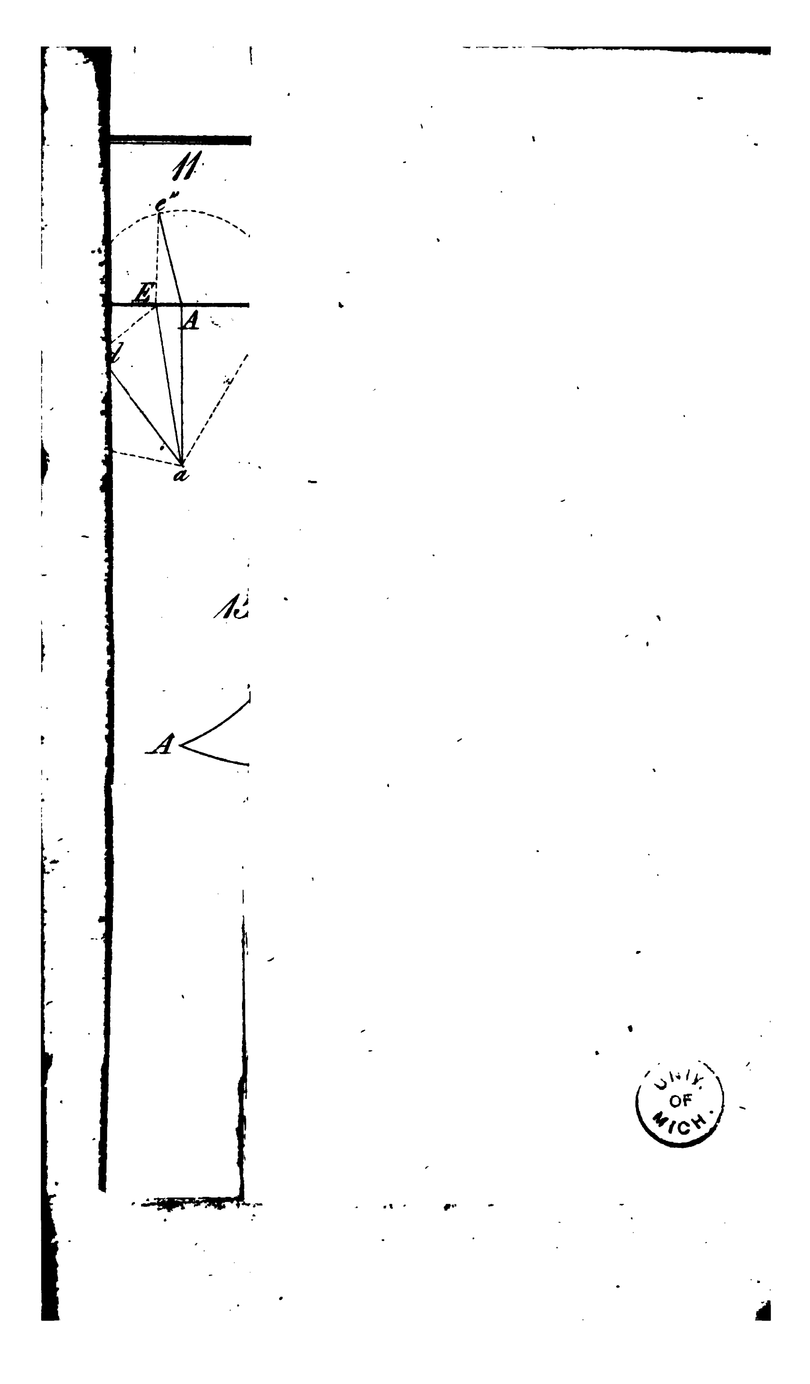
[illegible]

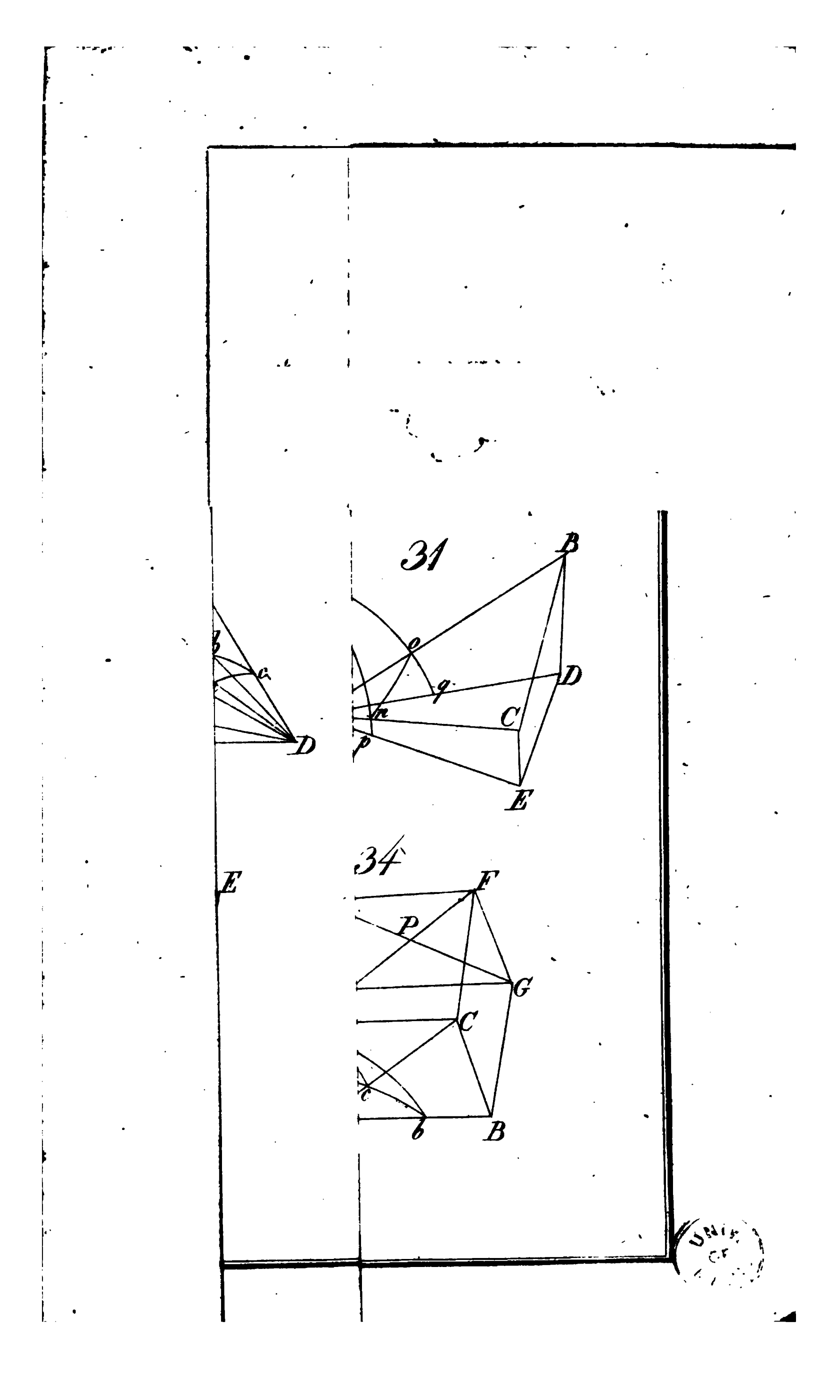
[illegible]

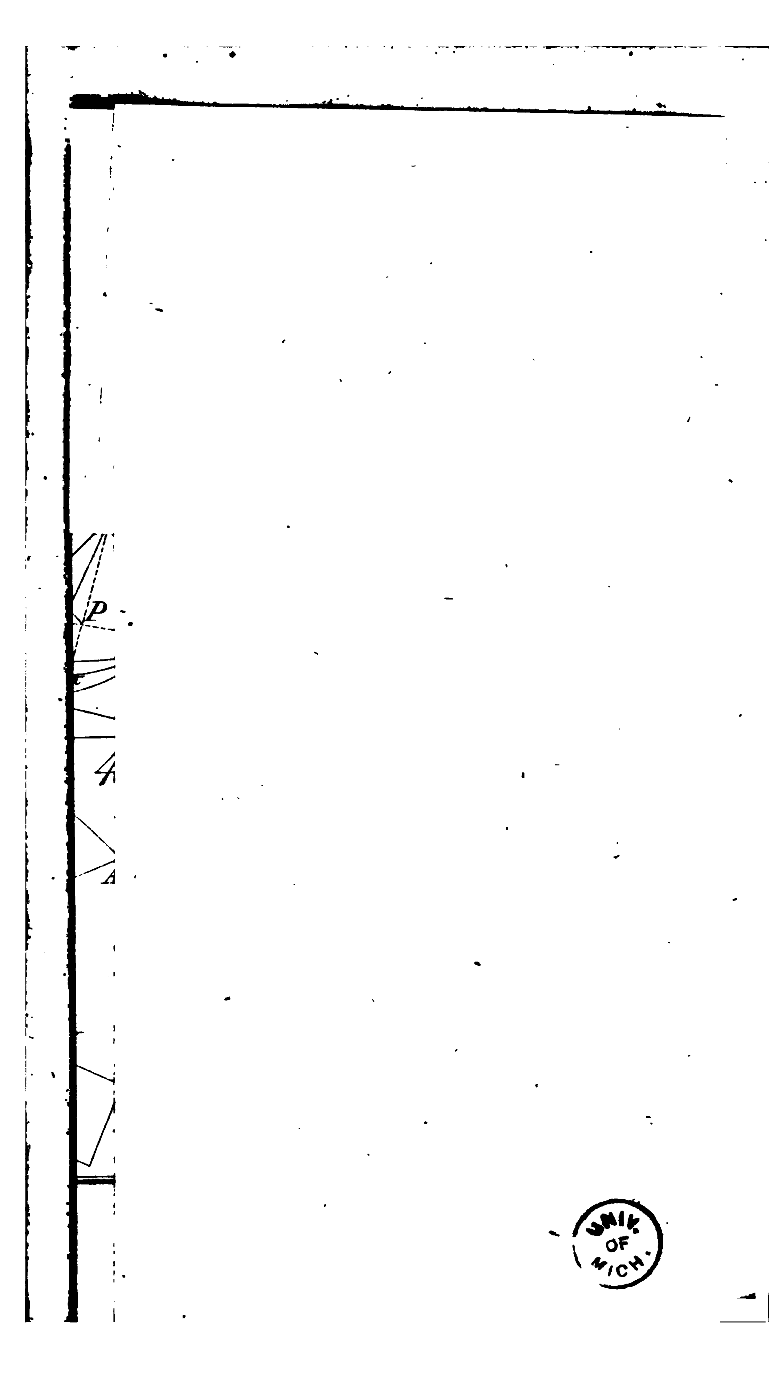
[illegible]

[illegible]

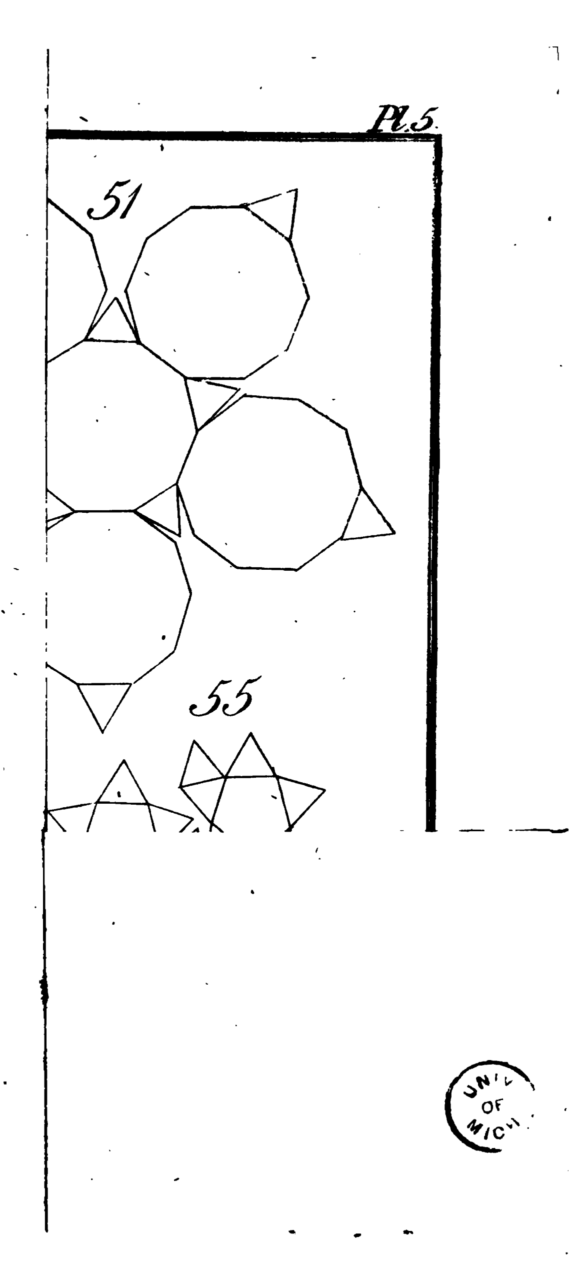

g
E
M
B
L
g
e
g
d
A
C
H
F
9
F
B
M
I
c
E
D
G
A
A.F. Schmidt sc.

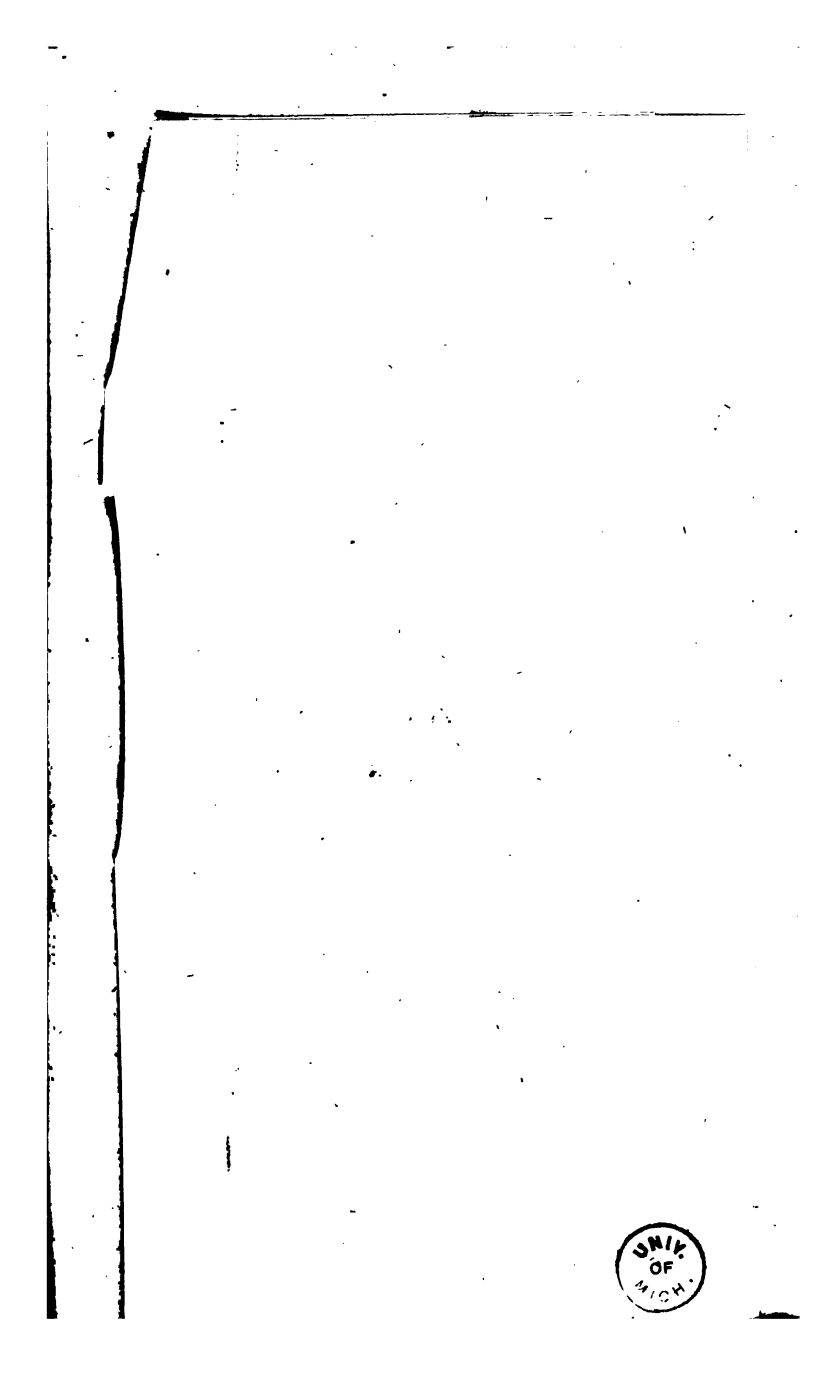

11
c''
E
A
d
a
A

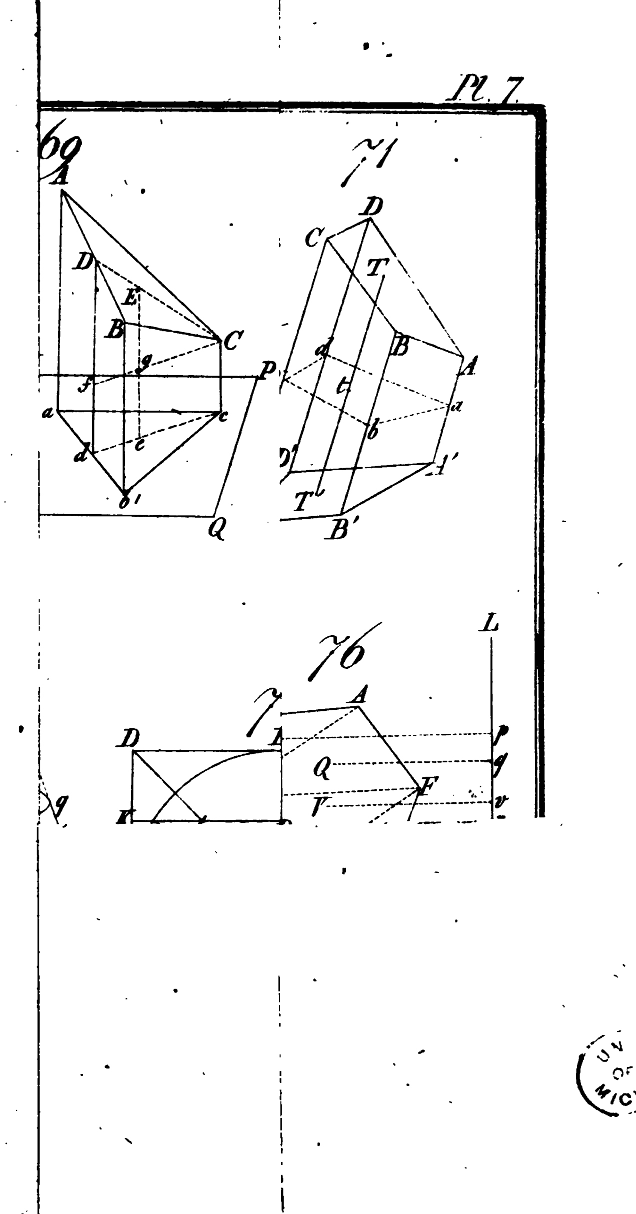

31
B
o
q
D
n
C
p
E
b
c
D
E
34
F
P
G
C
c
b
B



Pl. 5.




UNIV.
OF
MICH.



Pl. 7.
69
A
D
E
B
C
g
f
P
a
c
d
e
b'
Q
71
D
C
T
B
d
A
t
a
b
D'
A'
T'
B'
B'
76
L
A
D
p
Q
q
F
V
v

E

B

D

A

P

Pl. 9.

